Tema 7. Aplicaciones de las derivadas: Representación gráfica de funciones y Optimización

1. Aplicaciones de la derivada primera para el estudio de la variación de una función

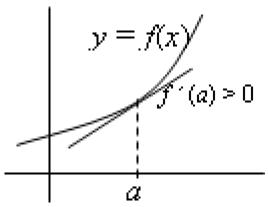
El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de máximos y mínimos relativos.

1.1. Crecimiento y decrecimiento

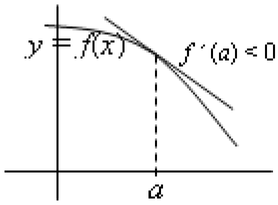
- $f(x)$ es creciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.
- La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

Caracterización mediante la derivada primera

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.



En general, si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.
La demostración de este resultado es fácil, pues si $f'(a) > 0$, se tiene que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ en un entorno de a. Esto implica que los dos términos de la fracción deben tener el mismo signo. Luego:



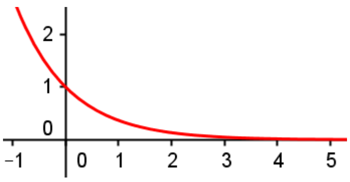
Si $h > 0$, (a la derecha de a), entonces $f(a+h) - f(a) > 0 \Leftrightarrow$ $f(a) < f(a+h) \to$ Luego f es creciente en a.
Si $h < 0$, (a la izquierda de a), entonces $f(a-h) - f(a) < 0 \Leftrightarrow$ $f(a-h) < f(a) \to$ Luego f es creciente en a.

- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.

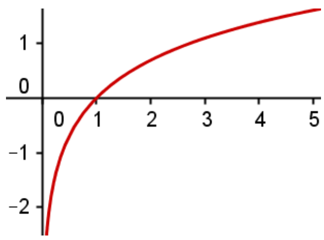
Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente ese el intervalo.

Ejemplos:

a) La derivada de $f(x) = e^{-x}$ es $f'(x) = -e^{-x}$, que es negativa para todo $x \in \mathbf{R}$. Por tanto, $f(x) = e^{-x}$ es decreciente en todo su dominio.



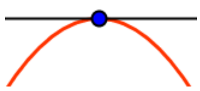
b) La derivada de la función $f(x) = \ln x$ es $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, para todo $x \in \mathbf{R}^+$. Por tanto, $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio, para $x > 0$.



1.2. Determinación de máximos y mínimos con la derivada primera

Los puntos en los que se anula la derivada, las soluciones de $f'(x)=0$, son candidatos a máximos o mínimos.

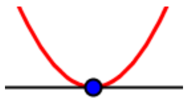
Para que en punto $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es necesario que $f'(a)=0$.



- <u>Máximos</u>. El punto a es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:

  a es un máximo si: $f'(a^-)>0$, $f'(a)=0$, $f'(a^+)<0$.

(En un máximo, la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0).

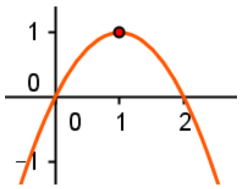


- <u>Mínimos</u>. El punto a es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:

  a es un mínimo si: $f'(a^-)<0$, $f'(a)=0$, $f'(a^+)>0$.

(En un mínimo, la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0).

Ejemplo:



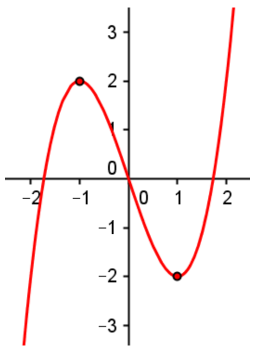
La función $f(x)=-x^2+2x$ es creciente a la izquierda del punto $x = 1$, y decreciente a su derecha, pues $f'(x)=-2x+2$ es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$.

Por tanto, $f(x)=-x^2+2x$ tiene un máximo en $x = 1$.

(Es evidente que $f'(1)=0$).

- La determinación de los <u>puntos singulares</u> de una función (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también <u>puntos estacionarios</u>; y los puntos en lo que la función no está definida), permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.

Ejemplo:



La derivada de $f(x)=x^3-3x$, que es $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$, se anula en los puntos $x = –1$ y $x = 1$: son sus puntos singulares.

A la izquierda de $x = –1$, para $x < –1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece.

Para $–1 < x < 1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

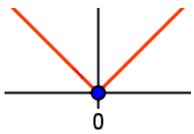
Por tanto, en $x = –1$ la función tiene un máximo relativo.

A la derecha de $x = 1$, para $x > 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Como a la izquierda de x = 1 la función decrece, y a su derecha crece, en ese punto la función tiene un mínimo relativo.

<u>Advertencias</u>:

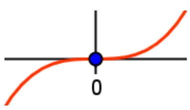
- No siempre que $f'(x)=0$ se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria (lo es solo para funciones derivables).



- Puede haber mínimo sin que $f'(x)=0$. Así, la función $f(x)=|x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.
- Puede suceder que $f'(x)=0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x)=x^3$. Su derivada, $f'(x)=3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:

Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = –0,1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 0,1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.



Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.

2. Trazado de gráficas de funciones con ayuda de la derivada primera

Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:

1) Determinar los puntos en los que no está definida $f(x)$. Dominio de definición.

2) Hallar la derivada $f'(x)$.

3) Calcular las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos singulares).

4) Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no está definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.

5) Estudiar el signo de la derivada en cada intervalo anterior: deducir si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f'(x)$ es positiva o negativa).

6) Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.

7) Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre ellos los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

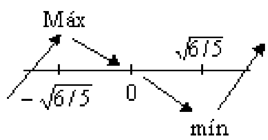
Ejemplo:

Proceso para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^3$.

1) Está definida siempre: Dom(*f*) = **R**.

2) y 3) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$.

4), 5) y 6) Se marcan los puntos en la recta, y se observa que:



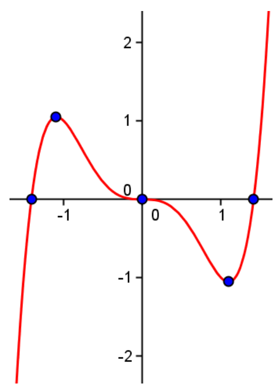
- Si $x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = -2$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-\sqrt{\frac{6}{5}} < x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ hay máximo.
- Si $0 < x < \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.
- Si $x > \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 3$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\Rightarrow$ en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ hay mínimo.

7) Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.

Para $x = 0$, $f(0) = 0 \to$ punto (0, 0).

Para $x = -\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1$, $f(-\sqrt{6/5}) \approx 1{,}05 \to$ punto (−1,1, 1,05).

Para $x = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1$, $f(\sqrt{6/5}) \approx -1{,}05 \to$ punto (1,1, −1,05).

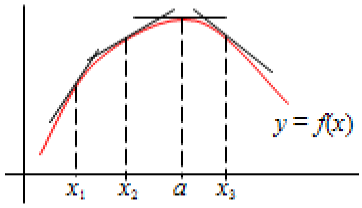


Los cortes con el eje *OX* son las soluciones de $x^5 - 2x^3 = 0$, que son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2} \to$ puntos $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 0) y $(\sqrt{2}, 0)$.

3. Aplicaciones de la derivada segunda. Curvatura

La concavidad y la convexidad dependen del punto de vista del que mira. Aquí se mirará siempre desde la parte negativa del eje *OY*. Por tanto, la concavidad será así: $\cap$; y la convexidad, así: $\cup$.

3.1. Concavidad y convexidad

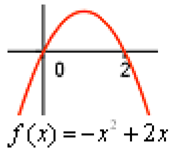


concavidad

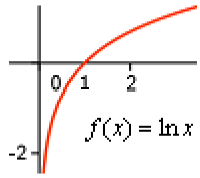
- Observa lo que sucede en un intervalo de **concavidad**.

– Las tangentes a la curva están por encima de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez menor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes decrecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada decrece: $f'(x)$ es decreciente.
– En consecuencia, su derivada (la de $f'(x)$) será negativa: $f''(x) < 0$.
– Los máximos se dan siempre en una concavidad.
– Por tanto, si en $x = a$ hay un máximo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) < 0$.

Ejemplos:

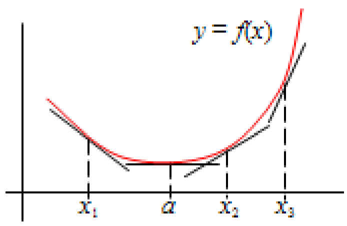


a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$ es cóncava, pues su derivada segunda es siempre negativa: $f'(x) = -2x + 2 \to f''(x) = -2 < 0$.



b) La función logaritmo, $f(x) = \ln x$ es cóncava en todo su dominio: $\mathbf{R}^+$.
Efectivamente, derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ para todo } x.$$



convexidad

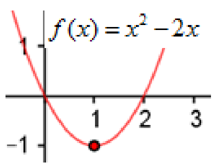
- Observa lo que sucede en un intervalo de **convexidad**.

– Las tangentes a la curva están por debajo de ella.
– Las rectas tangentes, de izquierda a derecha, tienen cada vez mayor pendiente. O, lo que es lo mismo, sus pendientes crecen. (La pendiente viene dada por la derivada)
– Luego la derivada crece: $f'(x)$ es creciente.
– En consecuencia, su derivada será positiva: $f''(x) > 0$.
– Los mínimos se dan siempre en una convexidad.
– Por tanto, si en $x = a$ hay un mínimo de $f(x)$, se cumplirá que $f''(a) > 0$.

Resumiendo:

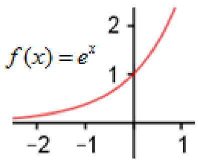
Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \Rightarrow f(x)$ es cóncava en ese intervalo.
Si $f''(x) > 0$ en el intervalo $(x_1, x_2) \Rightarrow f(x)$ es convexa en ese intervalo.

Ejemplos:



a) La función $f(x) = x^2 - 2x$, cuya gráfica es una parábola, es convexa, pues su derivada segunda es siempre positiva:

$$f'(x) = 2x - 2 \to f''(x) = 2 > 0.$$



b) La función exponencial, $f(x) = e^x$ es convexa siempre, pues su derivada segunda es siempre positiva:

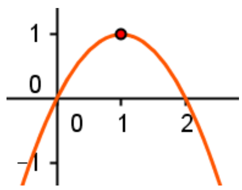
$$f'(x) = e^x \to f''(x) = e^x > 0 \text{ para todo } x.$$

3.2. Determinación de máximos y mínimos con el signo de la derivada segunda

- Si $f´(a) = 0$ y $f´´(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un máximo en $x = a$.
- Si $f´(a) = 0$ y $f´´(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en $x = a$.

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f(x)$ tenga un máximo (o un mínimo) en $x = a$ siendo $f´(a) = 0$ y $f´´(a) = 0$ (sin que $f´´(x) < 0$ o $f´´(a) > 0$).
En definitiva: La condición necesaria para que en $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es que $f´(a) = 0$; pero no es condición suficiente.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = -x^2 + 2x$, vista anteriormente, cumple:
$f´(x) = -2x + 2 \to$ la derivada se anula en $x = 1$.
Como $f´´(x) = -2 < 0$ para todo x, en $x = 1$ se da un máximo.



b) La función $f(x) = \sin x$, cumple:

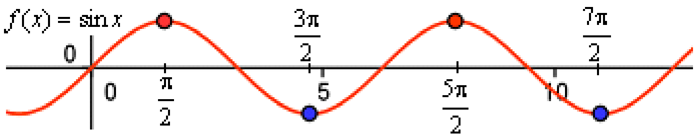
Su derivada primera: $f´(x) = \cos x$, se anula cuando $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Su derivada segunda: $f´´(x) = -\sin x$

$\to$ toma valores negativos cuando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{2}$ o en $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$

$\Rightarrow$ en esos puntos tendrá máximos.

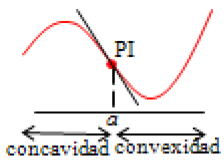
$\to$ toma valores positivos cuando $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$. Por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ o en $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$ $\Rightarrow$ en esos puntos tendrá mínimos.



Puede observarse que los máximos se dan en concavidades; y los mínimos, en convexidades.

3.3. Puntos de inflexión

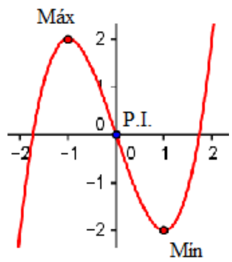
Los puntos en los que la curva cambia de cóncava a convexa, o al revés, se llaman puntos de inflexión; en esos puntos, la tangente corta a curva.
Se cumple también que:



- Si $x = a$ es un punto de inflexión de $f(x) \Rightarrow f´´(a) = 0$.

El recíproco no es cierto. Esto es, puede suceder que $f´´(a) = 0$ y en $x = a$ no haya punto de inflexión. Por tanto, que $f´´(a) = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente.

Ejemplo:
Para la función $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f´(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f´´(x) = 6x$.
La derivada primera se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.
Como $f´´(-1) < 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ hay un máximo relativo.
Como $f´´(1) > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo relativo.
Como $f´´(0) = 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay un punto de inflexión.



3.4. Criterio general para la determinación de puntos máximos, mínimos y de inflexión

Si $x = a$ es un punto que cumple:

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0,\ f'''(a) = 0,\ \ldots\ f^{n-1)}(a) = 0 \text{ y } f^{n)}(a) \neq 0,$$

entonces:

–Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo.

–Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$, en $x = a$ hay un mínimo.

–Si n es impar, en $x = a$ hay un punto de inflexión, aunque $f'(a) \neq 0$.

Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^5 - 2x^3$, vista en un ejemplo anterior, cumple:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \text{ si } x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ o } x = -\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Los puntos $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$, $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ son candidatos a máximos o mínimos.

Para decidirlo se hace la derivada segunda:

$$f''(x) = 20x^3 - 12x \Rightarrow 20x^3 - 12x = 0 \Rightarrow 4x(5x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Como:

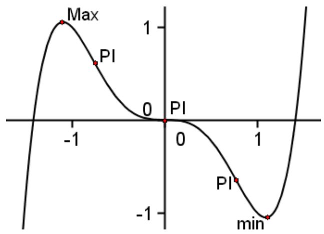
$f''(-\sqrt{6/5}) < 0 \Rightarrow$ en $x = -\sqrt{6/5}$ se da un máximo relativo

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da un punto de inflexión.

(Es un punto de inflexión con tangente horizontal).

$f''(\sqrt{6/5}) > 0 \Rightarrow$ en $x = \sqrt{6/5}$ se da un mínimo relativo

Otros puntos de inflexión son $x = -\sqrt{3/5}$ y $x = \sqrt{3/5}$.



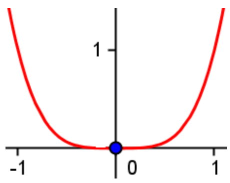
Para confirmar que los tres puntos indicados son de inflexión hay que ver que $f'''(x) = 60x^2 - 12$ es $\neq 0$ en los tres casos: así es, como puede comprobar el lector interesado.

b) La función $f(x) = x^4$, cumple:

$f'(x) = 4x^3 = 0$ en $x = 0$; $f''(x) = 12x^2 = 0$ en $x = 0$;

$f'''(x) = 24x = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 24 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ en $x = 0$ se da un mínimo.

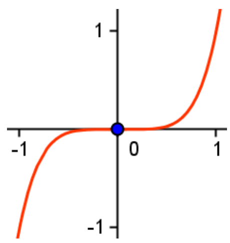


c) La función $f(x) = x^5$, cumple:

$f'(x) = 5x^4 = 0$ en $x = 0$; $f''(x) = 20x^3 = 0$ en $x = 0$;

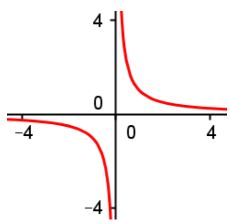
$f'''(x) = 60x^2 = 0$ en $x = 0$; $f^{4)}(x) = 120x = 0$ en $x = 0$;

$f^{5)}(x) = 120 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da un punto de inflexión.



d) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene máximos ni mínimos, pues su derivada no se anula en ningún punto: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \neq 0$.

Tampoco tiene puntos de inflexión, pues $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ nunca se hace 0.



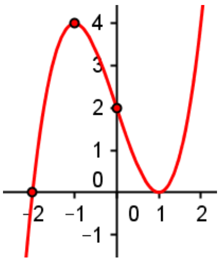
3.5. Ejercicios para profundizar

1. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ verifique:
a) Tenga un máximo en $x = -1$; b) Su gráfica corte al eje *OX* en el punto de abscisa $x = -2$;
c) Tenga un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.
Para los valores obtenidos, comprueba la naturaleza de los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
<u>Solución:</u>
Derivando dos veces:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b.$$

Por tener un máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \Rightarrow 0=3a-2b+c$.
Por cortar al eje en $x = -2$, $f(-2) = 0 \Rightarrow 0=-8a+4b-2c+2$.
Por tener un punto de inflexión en $x = 0$, $f''(0) = 0 \Rightarrow 0=2b \to b = 0$.
Sustituyendo *b* en las dos primeras ecuaciones se tiene: $\begin{cases} 3a+c=0 \\ 8a+2c=2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ c = -3$.

Luego, la función es: $f(x)=x^3-3x+2$.
Y sus derivadas: $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f''(x)=6x$.
Como $f'(-1)=3\cdot(-1)^2-3=0$ y $f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0 \Rightarrow$ en $x = -1$ se tiene un máximo.
Como $f''(0)=0$ y $f'''(0)=6\neq 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ se tiene un punto de inflexión.



2. Calcula los valores de *a* y *b* para que la gráfica de $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).
Para esos valores de *a* y *b*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
<u>Solución</u>:
Por pasar por (1/2, 4) $\Rightarrow f(1/2)=4 \to 4=a\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{1/2} \Rightarrow a+4b=8$.
Por tener un mínimo en $x = 1/2$, $f'(1/2)=0$.
De $f'(x)=a-\dfrac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1/2)=0=a-\dfrac{b}{1/4} \Rightarrow a-4b=0$.
Resolviendo el sistema $\begin{cases} a+4b=8 \\ a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow a = 4;\ b = 1$. La función es $f(x)=4x+\dfrac{1}{x}$.
La derivada $f'(x)=4-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 4-\dfrac{1}{x^2}=0 \Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.
Como la función no está definida en $x = 0$, para determinar su crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de la derivada en los intervalos:

$\left(-\infty,-1/2\right)$; (–1/2, 0); (0, 1/2) y $\left(1/2,+\infty\right)$

Se tiene:
- Si $x < -1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-1/2\right)$.
- Si $-1/2 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo (–1/2, 0).

En $x = -1/2$ hay un máximo. Punto (–1/2, –4).
- Si $0 < x < 1/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo (0, 1/2).
- Si $x > 1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el, intervalo $\left(1/2,+\infty\right)$.

En $x = 1/2$ hay un mínimo. Punto (1/2, 4).

4. Sugerencias para la representación gráfica de una función

Para representar una función $f(x)$, puede utilizarse el esquema siguiente:

1) Determinar el dominio de definición y el recorrido de $f(x)$. (Esto permite el estudio de posibles discontinuidades y de las regiones: intervalos en los que $f(x)$ es positiva o negativa; para su determinación deben conocerse los puntos de corte de la curva con el eje *OX*).
2) Asíntotas. Puede haberlas verticales, horizontales y oblicuas

- Verticales. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow$ la recta $x = a$ es asíntota vertical $f(x)$.

Las asíntotas verticales sólo pueden darse en puntos en los que la función no esté definida.

- Horizontales. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b \Rightarrow$ la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.
- Oblicuas. Si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ ($m\neq 0$ y $m\neq\infty$) y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$, ($n\neq\infty$) $\Rightarrow$ la recta

$y=mx+n$ es una asíntota oblicua de la curva $y=f(x)$.
Es muy útil determinar, mediante el cálculo de límites laterales, la posición de la curva respecto de las asíntotas.
3) Simetrías. Hay dos tipos de simetrías.

- Función par: $f(x)$ es simétrica respecto del eje *OY*. Se cumple que $f(-x)=f(x)$.
- Función impar: $f(x)$ es simétrica respecto del origen: Se cumple que $f(-x)=-f(x)$

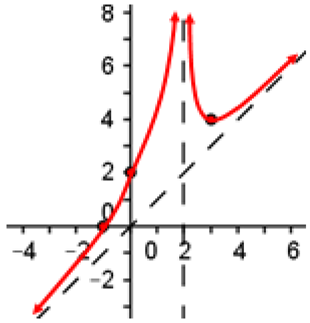
–El estudio de las simetrías no es imprescindible, aunque facilita el trazado de la curva.
4) Periodicidad. $f(x)$ es periódica de período *p* si $f(x+p)=f(x)$.
Las funciones periódicas se representan en un intervalo de amplitud *p*; después se repite el dibujo. En la práctica, solo se tiene en cuenta en las funciones trigonométricas.
5) Puntos singulares e intervalos de variación y curvatura.

- Con la derivada primera, $f'(x)$: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Con la derivada segunda, $f''(x)$: Concavidad, convexidad y puntos de inflexión; y

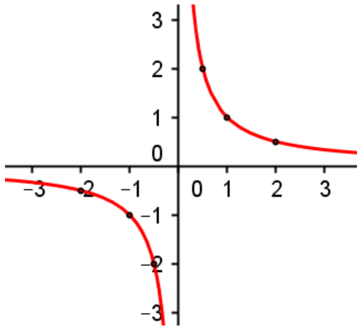
confirmación de máximos y mínimos.
6) Determinar algunos puntos significativos de la curva $y=f(x)$.
Puntos máximos, mínimos y de inflexión. Puntos de corte de la curva con los ejes.
7) Trazado de la curva.
Todas *las piezas deben encajar*. En caso contrario habrá que revisar los cálculos realizados.

A continuación se practica con ejemplos y ejercicios.

Ejemplo a):
Traza la gráfica de una función *f* que cumple lo que sigue:
1) Su domino es, Dom(*f*) = **R** – {2}. 2) Tiene dos asíntotas: las rectas $x = 2$ e $y=x$.
3) Tiene un mínimo en el punto (3, 4).
4) Es creciente para $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; decreciente si $x\in(2,\ 3)$.
5) Pasa por los puntos (–1, 0) y (0, 2).
6) Es convexa (∪) en todo su dominio.
Solución:
En primer lugar conviene trazar las asíntotas.
Después, marcar los puntos que se dan.
En tercer lugar se observa su crecimiento y decrecimiento.
Por último, se tiene en cuenta su curvatura.
Una posibilidad es la que se indica en la figura.



Ejemplo b):



La gráfica de la función de proporcionalidad inversa, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, es la que se adjunta.
Comprueba, aplicando el proceso indicado, sus características fundamentales.
En efecto:
– Dominio: **R** – {0}.
– Recorrido: **R** – {0}. Además: $f(x)<0$ si $x<0$; $f(x)>0$ si $x>0$
– Tiene dos asíntotas: una vertical, la recta $x = 0$; y otra horizontal, la recta $y = 0$.
Se cumple que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$.
– Se trata de una función simétrica respecto del origen, pues $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$.
– Siempre es decreciente, pues $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, para todo x de su dominio.
No tiene máximos ni mínimos, pues $f'(x)$ nunca vale 0.
– Su derivada segunda es $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$.
Para $x < 0$, $f''(x)<0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$).
Para $x > 0$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).
No tiene puntos de inflexión, pues $f''(x)$ nunca vale 0.
– Algunos valores son: (1, 1); (–1, –1); (2, 1/2); (–2, –1/2); (1/2, 2); (–1/2, –2).

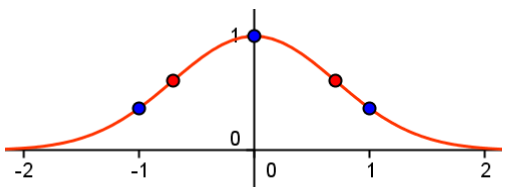
Ejemplo c):
Para dibujar la gráfica de la función $f(x)=e^{-x^2}$ deben observarse las siguientes cosas:
– Su dominio es **R**; y siempre es positiva.
– Es par: $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}$. (Simétrica respecto del eje *OY*).
– Tiene una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}=0^+$ → La curva va por encima de la asíntota, $y = 0$.
– Crecimiento y decrecimiento. Se hace la primera derivada:
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ → se anula en $x = 0$.
Si $x < 0$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece.
Si $x > 0$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece ⇒ En $x = 0$ hay un máximo.
– Concavidad y convexidad (segunda derivada):
$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=\left(-2+4x^2\right)e^{-x^2}$ → se anula en $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Si $x<-1/\sqrt{2}$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).
Si $-1/\sqrt{2}<x<1/\sqrt{2}$, $f''(x)<0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$).
Si $x>1/\sqrt{2}$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).

Para comprobar resultados pueden utilizarse Recursos informáticos.

GeoGebra

Mathway

Pueden darse algunos valores:
$(-1,\ e^{-1})\approx(-1,\ 0{,}37)$, $\left(-1/\sqrt{2},\ e^{-1/2}\right)$; (0, 1);
$\left(1/\sqrt{2},\ e^{-1/2}\right)$; (1, 0,37).
Su gráfica es la adjunta.

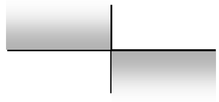


Ejemplo d):

Para trazar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ hay que tener en cuenta:

– Dominio: **R** – {1}.

– Regiones (signo): por debajo del eje *OX* (negativa) si $x < 0$; por encima de *OX* si $x > 0$ (excluido el punto $x = 1$).



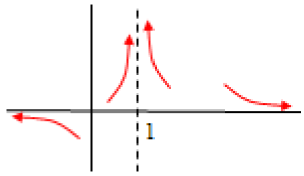
– Asíntotas:

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x-1)^2} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2} = 0$ (el denominador es de mayor grado que el numerador) $\Rightarrow$ la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Hacia –∞ la asíntota va por debajo del eje, pues toma valores negativos.

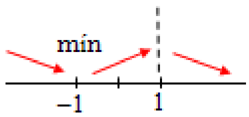
Hacia +∞ la asíntota va por encima del eje, pues el signo de la función es positivo.



– Derivada primera: $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)\cdot x}{(x-1)^4}=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$.

Se anula en $x = -1$. Se marcan los puntos –1 y 1 en la recta.

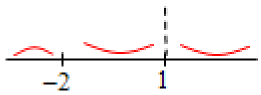
- Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. En $x = 1$ hay mínimo.
- Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.



– Derivada segunda: $f''(x)=\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}$. Se anula en $x = -2$.

Se marcan los puntos –2 y 1 en la recta.

- Si $x < -2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).
- Si $-2 < x < 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).
- Si $x > 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).

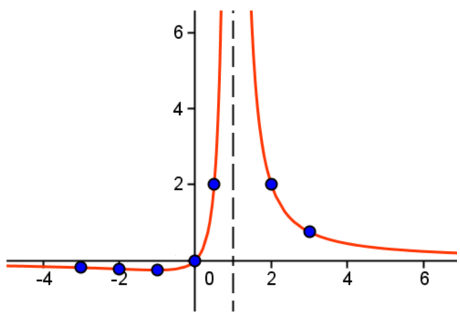


Como $f''(-1)=\dfrac{1}{8} > 0$, se confirma que en $x = -1$ hay un mínimo relativo.

– Con toda esta información y hallando algunos puntos se puede hacer su representación gráfica.

Algunos puntos:

(–3, –0,1875); (–2, –0,222); (–1, –0,25); (0, 0); (0,5, 2); (2, 2); (3, 0,75).



Ejemplo e):

Comprueba que la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene su vértice en el punto $x=-\dfrac{b}{2a}$, y que es convexa cuando $a > 0$.

<u>En efecto</u>:

– Su vértice es su punto máximo o mínimo $\Rightarrow$ es solución de $f'(x)=2ax+b=0 \to x=-\dfrac{b}{2a}$

– La derivada segunda es $f''(x)=2a$, que será positiva cuando $a > 0$; y por tanto convexa.

Ejercicio 1. Dada la función $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$, determina su dominio, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Haz un esbozo gráfico de ella.

Solución:

Dominio: **R**.

Derivando dos veces:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1} \to f'(x)=0 \text{ si } x=0. \qquad f''(x)=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \to f''(x)=0 \text{ si } x=-1 \text{ o } x=1.$$

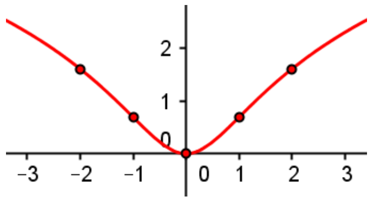
- Si $x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x>0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. En $x=0$ hay mínimo.
- Si $x<-1$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Si $-1<x<1$, $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
- Si $x>1$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

Como la función cambia de curvatura a izquierda y derecha de los puntos $x=-1$ y $x=1$, en esas abscisas se dan sendas inflexiones.

Algunos puntos de la gráfica son:

(–2, ln 5); (–1, ln 2); (0, 0); (1, ln 2); (2, ln 5).

Su gráfica es la adjunta. (Se ha trazado con GeoGebra).



Ejercicio 2. Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, indicando su dominio, cortes con los ejes, simetrías, asíntotas, intervalos de crecimiento y sus extremos.

Solución:

La función está definida siempre, pues el denominador no se anula en ningún caso.

Corte ejes:

si $x=0 \Rightarrow y=0 \to$ punto (0, 0); si $y=0 \Rightarrow x=0 \to$ el mismo punto.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas (impar), pues

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\frac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$$

Tiene una asíntota oblicua ($y=mx+n$), pues:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+1)}=1;\quad n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0.$$

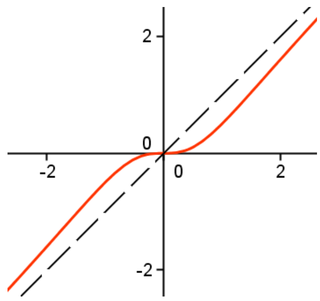
La asíntota es la recta $y=x$.

Como $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3+x-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$ se tiene:

– Si $x\to+\infty$, la curva va por debajo de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ resta)

– Si $x\to-\infty$, la curva va por encima de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ suma)

Derivando: $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-(x^3\cdot 2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.



Salvo en $x=0$, la derivada siempre es positiva $\Rightarrow$ la función es creciente siempre. En consecuencia, no tiene extremos. En $x=0$ hay un punto de inflexión con tangente horizontal.

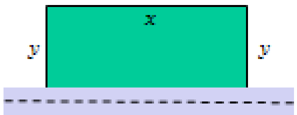
Algunos puntos de la curva son: (0, 0), (1, 1/2), (2, 8/5), (3, 27/10), y sus simétricos.

Representándolos se obtiene la gráfica adjunta.

5. Optimización de funciones. Problemas de optimización

La optimización es uno de los problemas económicos más interesantes de resolver. Consiste en determinar el valor que maximiza (beneficios) o minimiza (costes) una función sujeta a determinadas condiciones.

Un problema de optimización clásica es el siguiente:
Se desea construir, al lado de una carretera, una zona de descanso para automovilistas. Tendrá forma rectangular y estará vallada por los tres lados no adyacentes a la carretera. Si su superficie es de 7.200 m², ¿qué dimensiones debe tener para que el coste de la valla sea mínimo?
La situación planteada se representa en la figura adjunta, que, en este, como en la mayoría de los casos, es clave para entender el problema.



5.1. Planteamiento y resolución de un problema de optimización

Un problema de optimización vendrá dado, generalmente, en términos de enunciado. Se dice que está planteado cuando se sabe exactamente qué función hay que hacer máxima o mínima; quedará resuelto cuando se halle y critique la solución. Para ello, puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

1) Saber qué objetivo hay que hacer máximo o mínimo. Esto se deduce de la lectura del enunciado.
En el ejemplo anterior hay que *hacer mínimo el coste de la valla*. (Este mismo ejemplo nos servirá para ilustrar los demás pasos).

2) Expresar en forma de función el objetivo propuesto.
→ *El coste de la valla será mínimo cuando su longitud (L) sea mínima*.
Por tanto, la función que hay que hacer mínima es $L = x + 2y$.
Generalmente esta función dependerá de varias variables; aquí, de dos. Hay que determinar cuál de ellas depende de la(s) otra(s) y buscar en el enunciado la relación que liga esas variables; esta relación siempre es una igualdad. Se obtendrá así una función de una sola variable, que puede designarse por $f(x)$ o por cualquier otra letra. Aquí se ha elegido *L*.
En $L = x + 2y$ *aparecen dos variables, x e y, que son las medidas del largo (x) y ancho (y) de la zona de descanso.*
¿Qué relación existe entre *x* e *y*? Como se dice que la superficie de la zona es de 7.200 m², y esta superficie vale $S = x \cdot y$, se tendrá que $xy = 7200$; de donde $y = \dfrac{7200}{x} \Rightarrow L(x) = x + 2\cdot\dfrac{7200}{x}$.
(Aquí termina el planteamiento del problema. Ahora hay que resolverlo).

3) Determinar el máximo o mínimo buscado.
Los óptimos se encuentran entre los puntos estacionarios de la función, que son las soluciones de $f'(x) = 0$. Para que sea máximo, además, debe cumplir que $f''(x) < 0$; y para que sea mínimo, que $f''(x) > 0$.
En este caso hay que buscar un punto que cumpla: $L'(x) = 0$ y $L''(x) > 0$.
Como $L(x) = x + 2\cdot\dfrac{7200}{x} = x + \dfrac{14400}{x} \Rightarrow L'(x) = 1 - \dfrac{14400}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 14400 \Rightarrow x = \pm 120.$
La solución $x = -120$ hay que descartarla por no ser del dominio de definición de la función.
La derivada segunda: $L''(x) = \dfrac{28800}{x^3}$ y $L''(120) = 2 > 0$.
Por tanto, el mínimo pedido se obtiene cuando $x = 120$ metros e $y = 60$ m.

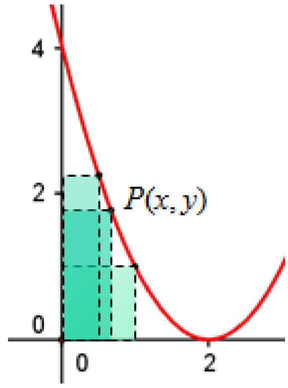
Ejercicio 1

Sea la parábola $y = (x-2)^2$ y un punto $P(x, y)$ de ella que esté en el primer cuadrante. Se forma un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos los puntos $O(0, 0)$ y $P(x, y)$. Determina las coordenadas de P para que el rectángulo tenga superficie máxima.

Solución:

Si (x, y) es el vértice sobre la parábola, el rectángulo tendrá base = x y altura = y; siendo $y = (x-2)^2$. Por tanto, su superficie vendrá dada por:

$$S = x \cdot y = x(x-2)^2 = x^3 - 4x^2 + 4x.$$



El máximo de S se da en la solución de $S´ = 0$ que hace negativa a $S´´$.

Derivando:

$$S´(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \begin{cases} 2/3 \\ 2 \end{cases}.$$

Como $S´´(x) = 6x - 8$:

– para el valor $x = \frac{2}{3}$, $S´´\left(\frac{2}{3}\right) = -4 < 0 \to$ Máximo. Punto $P\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$.

– para $x = 2$, $S´´(2) = 4 > 0 \to$ mínimo.

Ejercicio 2

Los costes mensuales de producción de un determinado producto vienen dados por la función $C(x) = 180x + 12000$ €. Los ingresos se ajustan a la función $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$ €.

Determina:

a) ¿En qué intervalo debe situarse la producción para no perder dinero?

b) ¿Cuántas unidades tiene que producir mensualmente la empresa para obtener el máximo beneficio? En este caso, ¿a cuánto asciende la ganancia por unidad de producto?

Solución:

a) La función de beneficios es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2 - 180x - 12000 \Rightarrow B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000.$$

Se desea que $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000 \geq 0$.

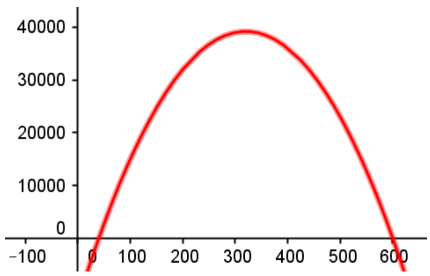
Resolviendo la ecuación asociada: $-\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000 = 0 \Rightarrow x = 40$ y $x = 600$.

Luego, $B(x) = -\frac{1}{2}(x-40)(x-600) \geq 0$ cuando $x \in [40, 600]$.

Para no perder dinero deben producirse entre 40 y 600 unidades de producto.

b) Derivando e igualando a 0:

$$B´(x) = -x + 320 = 0 \Rightarrow x = 320.$$



Como la derivada segunda, $B´´(x) = -1 < 0$, para ese valor de producción, $x = 320$, los beneficios serán máximos.

Esos beneficios máximos serán:

$$B(320) = -\frac{1}{2} \cdot 320^2 + 320 \cdot 320 - 12000 = 39200 \text{ euros}.$$

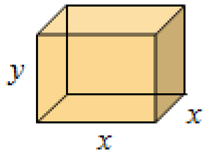
La ganancia por unidad será: 39200/320 = 122,5 €.

Ejercicio 3

Se quiere construir una caja de base cuadrada, sin tapa. Si se dispone de 108 cm^2 de material, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que la caja tenga volumen máximo?

Solución:

Si x es la medida del lado de la base e y la altura de la caja, se tiene:



– El área total de la caja (las cuatro caras laterales y la base) es 108 dm^2:

$$x^2 + 4xy = 108$$

– Su volumen será: $V = x^2 y$.

Despejando y en la primera igualdad, $y = \dfrac{108 - x^2}{4x}$, y sustituyendo en la expresión del volumen, se tiene:

$$V(x) = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = 27x - \frac{1}{4}x^3.$$

El máximo de $V(x)$ se da en la solución de $V'(x) = 0$ que hace negativa a $V''(x)$.

Derivando:

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4} = \frac{108 - 3x^2}{4} = 0 \Rightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

Como $V''(x) = -\dfrac{9x}{4}$ es negativa para $x = 6$, para ese valor se consigue el volumen máximo buscado.

Las dimensiones de la caja serán: lado de la base, $x = 6$; altura, $y = 3$.

Ejercicio 4

Después de x semanas de iniciarse un brote de gripe, el número de personas afectadas en una determinada población viene dado por la función $P(x) = \dfrac{350x}{2x^2 - 3x + 8}$, con $x \geq 0$.

Calcula el máximo número de personas afectadas y la semana en que se da.

Solución:

El máximo se da en la solución de $P'(x) = 0$ que cumpla, además, que $P''(x) < 0$.

Derivando:

$$P'(x) = \frac{350\left(2x^2 - 3x + 8\right) - 350x\left(4x - 3\right)}{\left(2x^2 - 3x + 8\right)^2} = \frac{-700x^2 + 2800}{\left(2x^2 - 3x + 8\right)^2} \rightarrow$$

$\rightarrow P'(x) = 0$ si $-700x^2 + 2800 = 0 \Rightarrow x = -2; x = 2$. La solución negativa no vale.

$$P''(x) = \frac{-1400x\left(2x^2 - 3x + 8\right)^2 - \left(-700x^2 + 2800\right)\cdot 2\left(2x^2 - 3x + 8\right)\cdot\left(4x - 3\right)}{\left(2x^2 - 3x + 8\right)^4} \Rightarrow$$

$$P''(x) = \frac{2800x^3 - 33600x + 16800}{\left(2x^2 - 3x + 8\right)^3} \rightarrow P''(2) = \frac{2800\cdot 8 - 33600\cdot 2 + 16800}{\left(8 - 6 + 8\right)^3} = -\frac{28000}{1000} = -28.$$

Por tanto, el máximo número de personas afectadas por la gripe se da a finales de la segunda semana; ese número será de $P(2) = \dfrac{350\cdot 2}{2\cdot 4 - 3\cdot 2 + 8} = 70$ personas.

Problemas Propuestos

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión

1. Halla, aplicando derivadas, los vértices de las parábolas:

a) $f(x)=x^2-4x$ b) $f(x)=-2x^2-8x-6$

Comprueba su crecimiento y curvatura.

2. Representa gráficamente en el intervalo [–2, 2], estudiando sus máximos y mínimos, la función $f(x)=\begin{cases} x(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Nota. Esta función es derivable en todo **R**. Se vio ene el problema 17 del Tema 6).

3. Dada la función $f(x)=x^3-21x^2+72x+60$, calcula sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

4. Demuestra que la función $f(x)=x-e^{-3x}$ es estrictamente creciente en todo **R**.

5. a) Comprueba que la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ tiene un máximo relativo.

b) Comprueba que función $f(x)=x^2-2e^{-x}$ tiene un punto de inflexión.

6. Comprueba que la función $f(x)=x-\ln(x^2+1)$ tiene en x = 1 un punto de inflexión con tangente horizontal.

7. Dada la función $f(x)=(x+3)(x-2)^4$, determina:

a) Los puntos de corte con el eje OX; y su signo.

b) Sus máximos y mínimo.

c) Sus puntos de inflexión.

8. Comprueba que la función $y=2\sqrt{\dfrac{2}{x}-1}$ es decreciente en todo su dominio.

9. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ en el intervalo [0, 2π].

10. Halla los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

11. Demuestra que la función $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$ nunca es decreciente. ¿Es posible que, a pesar de lo anterior, tenga puntos de inflexión?

12. Dada la función $f(x)=(x-1)e^{x+1}$, halla:

a) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.

b) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.

13. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3+3x^2$ en su punto de inflexión.

Estudio de una función dependiente de uno o más parámetros

14. a) Dada la función: $f(x)=-x^3+bx^2+x+d$, calcula los valores de b y d para que la función $f(x)$ tenga un mínimo relativo en el punto (–1, 2).
b) Para los valores hallados haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2], determinando su máximo y su punto de inflexión.

15. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un punto de inflexión de coordenadas (2, 32). Para esos valores halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas e investiga si hay un punto singular entre ellos.

16. Halla el valor de a para que la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{ax+1}$ tenga un extremo en el punto x = 1. En ese caso, determina si se trata de un máximo o de un mínimo.

17. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-a}$:
a) ¿Puede tener un mínimo para algún valor de a?
b) ¿Tiene siempre una asíntota vertical?

18. Halla el valor que debe tomar a para que la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en x = 2.

19. Halla el valor de a para que $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en x = 2.

20. Comprueba que la función $f(x)=e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en x = 0 para cualquier valor de p. ¿Tendrá algún punto de inflexión?

21. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{a}-ax^2+5x+10$, $a\neq 0$.
a) Halla los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en x = 1.
b) Calcula los extremos relativos de $f(x)$ para a = 3.

22. Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ corte al eje OY en el punto (0, –1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.
Representa gráficamente la función obtenida dando algunos de sus puntos.

Representación gráfica de una función

23. Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, estudiando su domino, asíntotas y crecimiento y decrecimiento.

24. Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$, estudiando su domino, asíntotas y crecimiento y decrecimiento. Determina también su curvatura.

25. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$. Determina su crecimiento y decrecimiento, ¿Tiene algún máximo? Haz un esbozo de su gráfica.

26. Dada la función $f(x)=x^5-5x^3$:
a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos relativos.
b) Determina sus intervalos de concavidad y convexidad; y sus puntos de inflexión.
c) Traza su gráfica.

27. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:
a) Su dominio, posibles simetrías y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sus máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.
d) Su representación gráfica.

28. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

29. Representa gráficamente la función $f(x)=xe^x$, calculando: asíntotas; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión.

30. Representa gráficamente la función $f(x)=\ln(1-x^2)$, estudiando: dominio de definición; asíntotas; máximos y mínimos; y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

31. Dada la función $f(x)=\ln\dfrac{3x}{x+1}$, determina su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y concavidad y convexidad. Haz un esbozo gráfico de ella.

32. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su gráfica.

33. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 8]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y de los cortes con los ejes.

a) $f(x)=\sin(2x)$ b) $g(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Problemas de optimización

34. Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

35. (Propuesto en Selectividad 2012)
Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros. ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?

36. La suma de dos números positivos es 36; encuentra aquellos cuya suma de cuadrados sea mínima.

37. (Propuesto en Selectividad)
Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

38. (Propuesto en Selectividad, Aragón 2012)
Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

39. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=0,02x^2+4x+80$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x)=200-x$ ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

40. (Propuesto en Selectividad)
El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función $B(x)=-0{,}01x^2+3{,}6x-180$
a) Determina los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
b) Determina los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

Otros problemas

41. Demuestra que las siguientes funciones son crecientes siempre:
a) $f(x)=e^x+2x$ b) $f(x)=x^3+x^2+x-1$

42. Determina si la función $f(x)=\frac{m}{1+x^2}$ tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión. ¿Depende del valor que tome m?

43. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).
b) Para esos valores de a y b, calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Esboza su gráfica.

44. (Propuesto en Selectividad 2012)
Dada la función $y=(x+2)(x-1)^2$ halla:
a) Dominio y cortes con los ejes. b) Máximos y mínimos.
c) Crecimiento y decrecimiento. d) Concavidad y convexidad.
e) Dibujar su gráfica.

45. (Propuesto en Selectividad 2016, La Rioja)
Sea la función $f(x)=\dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$, donde a es un cierto parámetro real.
a) ¿Cuál es el valor de a si sabemos que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal para la función dada? Justificar la respuesta.
b) Para $a = 1$, estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos.

46. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=0,1x^2+3x+100$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x)=25-0,3x$. ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.).
Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

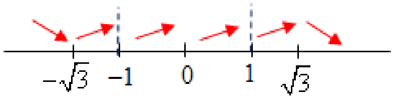
47. Estudia los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=x^3+ax^2+5$ dependiendo de los valores de a.

48. El coste de producir q unidades de un producto es $C(q)=1000+300q+\dfrac{1}{20}q^2$. Si cada unidad se vende a un precio $p=400-0,1q$
a) Calcula la función de beneficios. ¿Cuántas unidades deberá producirse para obtener el beneficio máximo?; cuál es dicho beneficio?
b) Cuál es el precio al que se obtiene el máximo beneficio.
c) Si el gobierno impone un impuesto que es un coste adicional de 10 euros por unidad. ¿Cuántas unidades maximizan ahora el beneficio?

Soluciones

1. a) (2, –4); convexa. b) (–2, 2); cóncava.
2. (–1/2, 1/4) y (1, 0), mínimos; (1/3, 4/27), máximo.
3. (2, 128), (12, –372), (7, –122).
5. a) x = 1. b) x = 0.
7. a) x = –3; x = 2. b) Máx. (–2, 256). Min. (2, 0). c) x = –1.
9. x = π/3, máximo; x = 5π/3, mínimo.
10. x = ±1.
12. a) Decrece: $x < 0$; crece, $x > 0$. b) x = –1; $x < -1$, cóncava (∩); $x > -1$, convexa (∪).
13. $y=-3x-1$.
14. a) b = –1, d = 3. b) x = 1/3, máximo; x = –1/3, inflexión.
15. a = –2; b = 12. Máximo en x = 4; mínimo x = 0.
16. a = –2. Máximo.
17. a) No. b) No si a = 1/3.
18. a = 18.

19. $a = -1/8$.
20. No.
21. a) $a = -\dfrac{1}{2}$ o $a = 3$. b) máximo, (1, 35/3); mínimo, (5, 5/3).
22. $b = -5$; $c = 8$; $d = -1$. (4/3, 3,15), máx; (5/3, 3,07), PI; (2, 3), mín.
23. Asíntotas: $x = 2$; $y = 2$. Siempre decreciente.
24. Asíntotas: $x = -1$; $y = 2$. Siempre creciente. $x < -1$, convexa; $x > -1$, cóncava.
25. Crece: $-1-\sqrt{3} < x < 0$ y $0 < x < -1+\sqrt{3}$; decrece: $x < -1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3} < x < 2$, $x > 2$
Máx: $x = -1+\sqrt{3}$.
26. Crece: $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$. Máx, $x = -\sqrt{3}$; mín, $x = +\sqrt{3}$; PI, $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/2}$.
27. **R** – {–1, 1}; impar); $x = -1$, $x = 1$, $y = -x$. b)



c) $x < -1$, (∪); $-1 < x < 0$, (∩); $0 < x < 1$, (∪); $x > 1$, (∩).
28. AV, $x = 0$; AO, $y = -x$. Decrece siempre.
29. AH, $y = 0$. Dec: (–∞, –1); cre: (–1, +∞). $x = -1$, mín; $x = -2$, PI. $x < -2$, (∩); $x > -2$, (∪).
30. Dom (f) = (–1, 1). AV: $x = -1$ y $x = 1$; Máx: (0, 0
31. **R** – [–1, 0]. AV: $x = -1$ (por la izquierda) y en $x = 0$ (por la derecha). Siempre es creciente.
32. Si $x < 0$, crece; $x > 0$, decrece ; Máx, $x = 0$. PI: $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. AH, $y = 0$.
33. a) $x = \pi/4$, máx; $x = 3\pi/4$, mín. b) $x = \pi$, máx; $x = 3\pi$, mín.
34. $x \approx 4{,}53$.
35. 4000 euros.
36. 18 y 18.
37. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.
38. $x = 4$ e $y = 8$.
39. a) $x = \sqrt{4000}$; 6,53 u.m. b) $x = 96{,}08$; 9336 u.m.
40. a) 180 kg. b) 300 kilos.
42. Si $m > 0$, un máximo. Si $m < 0$, un mínimo. Si $m \neq 0$, PI en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
43. a) $a = 4$; $b = 1$. b) AV, $x = 0$; AO, $y = 4x$; Máx, (–1/2, –4); mín, 1/2, 4).
44. a) **R**; (–2, 0); (1, 0); (0, 2). b) $x = -1$, máx; $x = 1$, mín.
45. a) 4. b) Crece: $x < 0$ o $1 < x < 4/3$. Decrece: $4/3 < x < 2$ o $x > 2$. Máx, $x = 4/3$; mín, $x = 0$.
46. a) $x = \sqrt{1000} \approx 32$. b) $x = 27$ o $x = 28$.
47. En $x = 0$ hay máximo si $a < 0$, y mínimo si $a > 0$. En $x = -2a/3$ hay mínimo si $a < 0$, y máximo si $a > 0$.
48. 333; 15700 €. b) 367 €. c) 300.