Tema 4. Programación lineal

1. Introducción a la Programación Lineal

La programación lineal es una herramienta matemática que permite encontrar la solución óptima –minimizar costos o maximizar beneficios– en problemas de planificación económica, logística, social... dependientes de recursos limitados; esto es, con restricciones.
(Cuando se habla de beneficios y costes no hay que entenderlo exclusivamente en clave monetaria. Puede tratarse de maximizar un beneficio de carácter salubre, como aumentar la calidad del agua potable de una ciudad; o de minimizar un coste de tipo social, como disminuir el tiempo de permanencia en autobús de unos niños que tienen que trasladarse de pueblo para asistir a la escuela).

Tanto la función objetivo (lo que se desea optimizar) como las restricciones deben ser lineales: expresiones de primer grado en todas sus variables.

Ejemplos:
a) Supongamos que las autoridades sanitarias de una determinada región planifican la puesta en marcha de centros de asistencia médica primaria. En la región hay dos zonas claramente diferentes, que llamaremos El Valle y La Montaña, y que, debido a sus peculiaridades, necesitan una dotación especifica distinta. Cada centro asistencial de El Valle requiere 3 médicos, 3 asistentes técnicos sanitarios (ATS) y una inversión de 3 millones de euros. En La Montaña, cada centro necesita 2 médicos y 4 ATS, más una inversión de 1 millón de euros. Para llevar a cabo tal proyecto se cuenta con un total de 30 médicos, 48 ATS y 24 millones de euros.
¿Cuál es el número máximo de centros asistenciales que pueden ponerse en funcionamiento? ¿Cuántos en cada zona?
En este caso:
El objetivo del problema está claramente enunciado: *poner en funcionamiento el máximo número de centros asistenciales*.
Las restricciones son de tres tipos:
1) De médicos: se necesitan 3 en cada centro de El Valle y 2 en La Montaña; y se dispone de un total de 30 médicos.
2) De ATS: se necesitan 3 y 4 por centro y zona; se dispone de un máximo de 48 ATS.
3) De dinero: se tienen 24 millones de euros; cada centro requiere 3 millones y 1 millón de euros, respectivamente.

b) Una determinada plantación necesita ser tratada con una mezcla de abono que contenga al menos 42 kilogramos de nitratos y 29 de fosfatos. En el mercado existen dos marcas cuyo contenido y precio por kg se da en la siguiente tabla:

Marca	Nitratos	Fosfatos	Precio (kg)
$M1$	300 g	400 g	2 €
$M2$	600 g	200 g	3 €

¿Cuántos kilos de cada abono hay que comprar para conseguir la mezcla deseada a un coste mínimo?
El este segundo ejemplo:
El objetivo es que el coste sea mínimo: *conseguir la mezcla deseada a un coste mínimo*.
Las restricciones son de dos tipos:
1) De oferta: Se dispone de las marcas $M1$ y $M2$, con las características indicadas.
2) De composición de la mezcla: debe contener, al menos, 40 kg de nitratos y 29 de fosfatos.

1.1. Formulación de un problema de programación lineal: terminología

Un problema de programación lineal, para dos variables, se presenta de manera algebraica estándar, de alguna de las dos formas siguientes:

1. Maximizar la función $f(x, y) = ax + by + c$.

Restringida por: $\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1 \\ a_2x + b_2y \le c_2 \\ \ldots \end{cases}$.

2. Minimizar la función $f(x, y) = ax + by + c$.

Restringida por: $\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1 \\ a_2x + b_2y \le c_2 \\ \ldots \end{cases}$.

→ A la función $f(x, y) = ax + by + c$ se le llama función objetivo. También puede denotarse por $z = ax + by + c$.
En esa expresión, x e y son las variables que intervienen en el problema, mientras que a, b y c son constantes que indican qué relación hay que establecer entre ellas para conseguir el objetivo deseado; c y a o b pueden ser cero.
→ Las restricciones deben ser inecuaciones lineales. Su número depende del problema en cuestión. Habitualmente aparecen restricciones de no negatividad de las variables; esto es, las exigencias: $x \ge 0$ e $y \ge 0$.
El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibilidades o necesidades, que son: inferiores a... (menores: < o ≤); como mínimo de ... (mayores: > o ≥). Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos (≤ y ≥); los coeficientes a_i, b_i y c_i pueden ser cero.
→ Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se le llama conjunto de soluciones o región factible. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; cualquier punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución.
→ La solución óptima del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que $f(x_0, y_0) \ge f(x, y)$, si se busca el valor máximo; o que $f(x_0, y_0) \le f(x, y)$ si se busca el mínimo.
Observación: En los problemas "reales" tanto la función objetivo como las restricciones pueden depender de muchas variables. Su formulación estándar sería de la forma:
Maximizar (minimizar) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + ... + a_nx_n$.
Restringida por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}.$$

Las letras x_i representan las variables consideradas; a_{ij} y b_i son números.
Nota: Para resolver estos problemas son imprescindibles los ordenadores. Para dos variables el programa GeoGebra es muy eficaz. Aquí se utilizará al dar la solución de algunos problemas. En el apéndice sobre Recursos informáticos se dan algunas pautas de uso.

Ejemplos:
Dos de estos problemas dados en su forma estándar pueden ser los siguientes:
a) Maximizar la función $f(x,y)=x+y$,
restringida por:
$3x+2y\le 30$; $3x+4y\le 48$, $3x+y\le 24$; $x\ge 0$; $y\ge 0$.

b) Minimizar: $f(x,y)=2x+3y$,
restringida por:
$3x+6y\ge 420$; $4x+2y\ge 290$; $x\ge 0$; $y\ge 0$.

El ejemplo a) se deduce del problema de los centros médicos propuesto al principio del tema.
Recuerda esquemática el enunciado:
El objetivo es: *poner en funcionamiento el máximo número de centros asistenciales.*
Las restricciones son de tres tipos:
1) De médicos: se necesitan 3 en cada centro de El Valle y 2 en La Montaña. Hay 30 médicos.
2) De ATS: se necesitan 3 y 4 por centro y zona; se dispone de un máximo de 48 ATS.
3) De dinero: se tienen 24 millones de euros; cada centro requiere 3 millones y 1 millón de euros.
Por tanto:
→ Si se ponen x en El Valle e y en La Montaña, el objetivo es maximizar $f(x,y)=x+y$
Las restricciones vienen dadas por
(1) Médicos necesarios: 3 por cada x; 2 por cada y. Médicos disponibles: 30 ⇒ $3x+2y\le 30$.
(2) ATS necesarios: 3 por cada x; 4 por cada y. ATS disponibles: 48 ⇒ $3x+4y\le 48$.
(3) Millones necesarios: 3 por cada x; 1 por cada y. Disponibles: 24 ⇒ $3x+y\le 24$.
Es evidente que el número de centros en cada zona no puede ser negativo: $x\ge 0$; $y\ge 0$.
Observación: Puedes comprobar que las soluciones $x = 5$ e $y = 6$ o $x = 4$ e $y = 8$ son válidas, pues sus valores cumplen las restricciones dadas. La segunda, (4, 8), es mejor que la primera, (5, 6); en el primer caso, $f(x,y)=x+y=5+6=11$; en el segundo, $f(x,y)=x+y=4+8=12$.
En cambio, los valores $x = 5$ e $y = 8$ no pueden ser solución, pues no cumplen la restricción (1); aunque sí las otras dos. (Compruébalo).

El ejemplo b) se deduce del problema de la mezcla de abonos propuesto al principio del tema.
Recuerda que se desea conseguir una mezcla de las marcas $M1$ y $M2$, que contenga al menos 42 kg de nitratos y 29 de fosfatos, con un coste mínimo, a partir de los datos:

Marca	Nitratos	Fosfatos	Precio (kg)
$M1$	300 g	400 g	2 €
$M2$	600 g	200 g	3 €

Por tanto:
→ Si se compran x paquetes de la marca $M1$ es e y de la $M2$, el objetivo es minimizar su coste:
$f(x,y)=2x+3y$
Las restricciones son de dos tipos:
(1) Nitratos aportados: 0,3 kg por cada x; 0,6 kg por cada y. Necesarios: 42 kg ⇒
$0,3x+0,6y\ge 42 \Leftrightarrow 3x+6y\ge 420$.
(2) Fosfatos aportados: 0,4 kg por cada x; 0,2 kg por cada y. Necesarios: 29 kg ⇒
$0,4x+0,2y\ge 29 \Leftrightarrow 4x+2y\ge 290$.
Como en el ejemplo anterior, son evidentes las restricciones $x\ge 0$; $y\ge 0$.

1.2. Naturaleza de las restricciones

Las restricciones son desigualdades lineales de la forma $ax + by \le c$ o $ax + by \ge c$.

Estas expresiones son inecuaciones cuyas soluciones son pares de puntos pertenecientes a uno de los semiplanos que determina la recta $ax + by = c$.

Ejemplos:

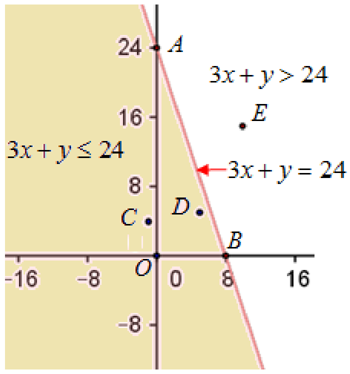
a) La restricción $3x + y \le 24$ (3), genera el semiplano coloreado en la figura de la derecha.

La recta $3x + y = 24$ se representa dando dos de sus puntos. Por ejemplo, los de corte con los ejes de coordenadas: *A*(0, 24) y *B*(8, 0).

Estos puntos se obtienen de manera sencilla, haciendo una de las variables 0 y despejando:

$x = 0$: $0 \cdot x + y = 24 \Rightarrow y = 24 \to A(0, 24)$.

$y = 0$: $3x + 1 \cdot 0 = 24 \Rightarrow x = 8 \to B(8, 0)$.



Para determinar cuál es el semiplano solución (el de la izquierda o el de la derecha) basta con sustituir, en la inecuación $3x + y \le 24$, las coordenadas de cualquier punto que no sea de la recta. Si ese punto verifica la inecuación, es del semiplano solución; en caso contrario, el semiplano solución es el otro.

Así, para el punto *D*(5, 5) se tiene: 3 · 5 + 5 = 20 ≤ 24: cumple la inecuación. Como ese punto está a la izquierda de la recta, el semiplano solución es el de la izquierda, el sombreado en la figura.

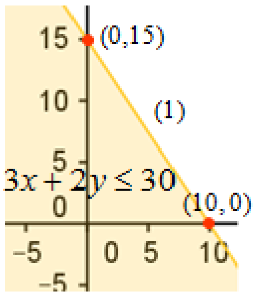
Para el punto *E*(10, 15) se tiene: 3 · 10 + 15 = 45 > 24: no cumple la inecuación. Luego no es del semiplano solución. Como ese punto está a la derecha de la recta, el semiplano solución es el de la izquierda.

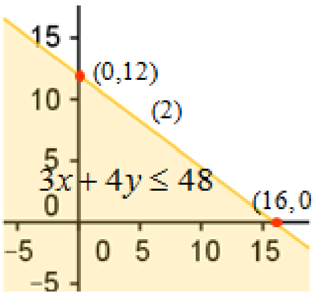
El punto *C*(–1, 4) también está en el semiplano solución: 3 · (–1) + 4 = 1 < 24.

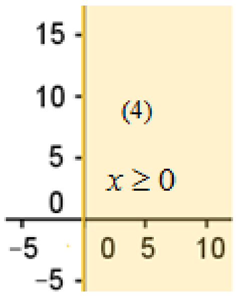
<u>Observación</u>. El punto *O*(0, 0) es el más cómodo de probar. Si ese punto cumple la inecuación, entonces está en el semiplano solución; si no la cumple, la solución es el otro semiplano.

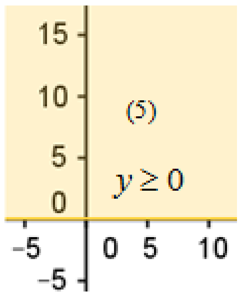
b) Los semiplanos solución de las demás restricciones de este problema son los que se indican

$3x + 2y \le 30$ (1); $3x + 4y \le 48$ (2); $x \ge 0$ (4); $y \ge 0$ (5)









Inecuación (1): $3x + 2y \le 30$.

La recta $3x + 2y = 30$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 15) y (10, 0).

Como el punto (0, 0) cumple la inecuación, el semiplano solución es el de la izquierda.

Inecuación (2): $3x + 4y \le 48$.

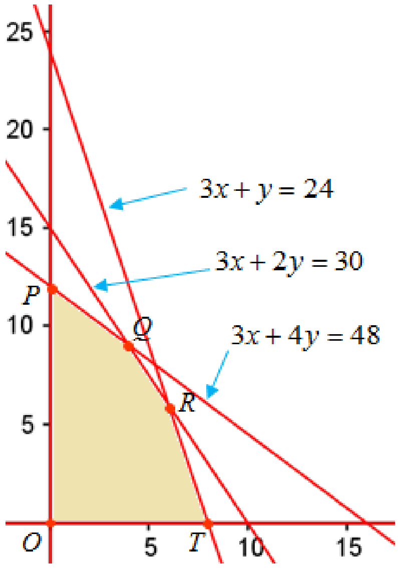
La recta $3x + 4y = 48$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 12) y (16, 0).

Como el punto (0, 0) cumple la inecuación, el semiplano solución es el de la izquierda.

Inecuación (4): $x \ge 0$. Puntos de la forma (3, 0) o (4, –2); no vale el punto (–1,3), por ejemplo. Determina el semiplano situado a la derecha del eje *OY*.

Inecuación (5): $y \ge 0$. Determina el semiplano situado por encima del eje *OX*.

2. Conjunto de soluciones. Región factible

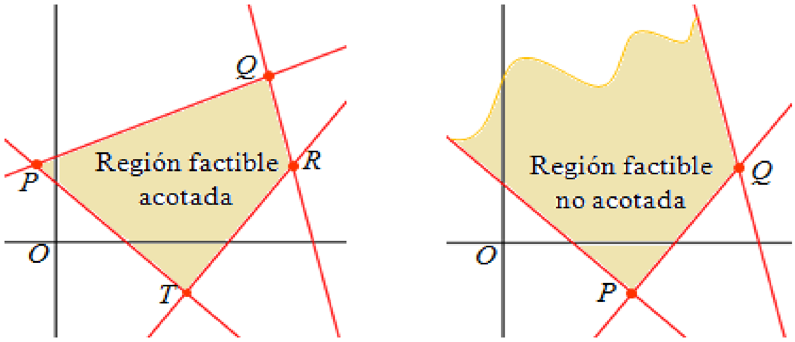


Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se le llama conjunto de soluciones o región factible. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; cualquier punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución.

En el ejemplo anterior, la región factible es la determinada por la intersección de los cinco semiplanos. Es la representada en la figura adjunta. Son los puntos del pentágono de vértices: *O*, *P*, *Q*, *R* y *T*.
Si un punto no está dentro de ese pentágono no cumple alguna de las restricciones del problema, luego no puede ser la solución buscada.
Por tanto, la solución óptima será alguno de los puntos de esa región; en consecuencia, ya sabemos dónde buscar la solución. (Si las restricciones fuesen del tipo $ax + by < c$, sin el signo =, habría que excluir los lados del polígono).

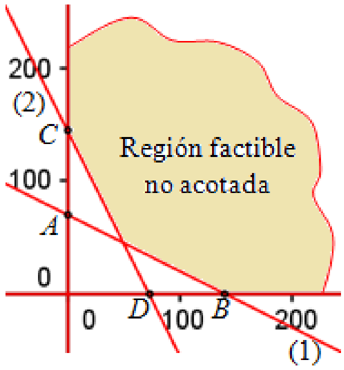
El resultado anterior es general, pues las restricciones son lineales en todos los casos.
En consecuencia:
"El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal de dos variables es una región de plano limitada por las rectas asociadas a las restricciones".

Esas regiones, que son siempre convexas (sin entrantes), pueden ser acotadas o no. Las regiones acotadas son polígonos; las no acotadas quedan abiertas por algún lado. Una u otra posibilidad depende de las restricciones.



Tanto si la región es acotada como si no, la solución es alguno de los puntos coloreados, incluidos lados y vértices cuando las restricciones son del tipo ≤ o ≥.

Ejemplo b):
Las restricciones (1) $3x + 6y \geq 420$, (2) $4x + 2y \geq 290$, (3) $x \geq 0$ y (4) $y \geq 0$ del ejemplo b) generan la región del plano sombreada en la figura adjunta.
La restricción (1) es el semiplano situado por encima de la recta $3x + 6y = 420$, que pasa por los puntos *A*(0, 70) y *B*(140, 0).
La restricción (2) es el semiplano situado a la derecha de la recta $4x + 2y = 290$, que pasa por los puntos *C*(0, 145) y *D*(72,5, 0).
Las restricciones (3) $x \geq 0$ y (4) $y \geq 0$ determinan los puntos del primer cuadrante.

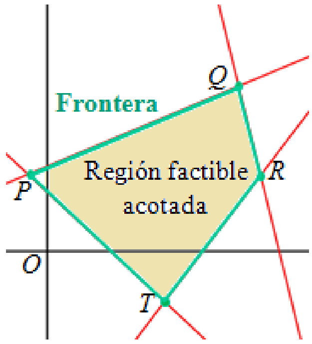


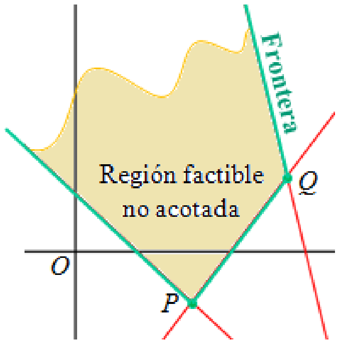
La intersección de todas ellas es la región factible no acotada representada en esta figura.

2.1. Cómo se encuentra la solución óptima

Saber que la solución de un problema de programación lineal está en una región concreta es importante; pero en esa región sigue habiendo una infinidad de puntos. Como probar todas esas posibilidades es tarea prácticamente imposible, se necesita algún resultado más contundente. Afortunadamente lo hay, pues:
"La solución óptima de un problema de programación lineal se encuentra siempre en la frontera de la región factible. En particular, una solución óptima se halla en alguno de los vértices de esa región".

→ La frontera de la región factible viene determinada por las rectas asociadas a las restricciones.
→ Los vértices o puntos extremos son las intersecciones de esas rectas y se calculan resolviendo cada uno de los posibles sistemas de dos ecuaciones que se obtienen tomando dos a dos las rectas que limitan las restricciones.

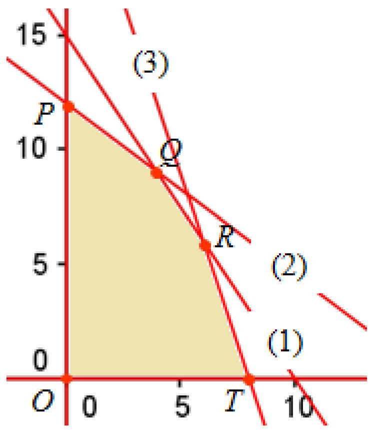




Así pues, la solución óptima no es nunca un punto interior de la región factible; se encuentra siempre en un vértice. Como el número de vértices es finito, puede evaluarse la función objetivo $f(x, y)$ en cada uno ellos; aquel que dé el valor máximo o mínimo es la solución buscada.
• En el caso de que $f(x, y)$ tome el mismo valor (máximo o mínimo) en dos vértices, la solución óptima se da en cualquiera de los puntos del segmento que los une.

• Para regiones abiertas, este criterio no es concluyente, ya que puede suceder que $f(x, y)$ no tenga solución, tenga solo mínimo o que tenga solo máximo. Más adelante precisaremos estas posibilidades. (No obstante, si existe solución, esta sigue dándose en un vértice).

Ejemplo a):
En el problema de los centros de salud se trataba de:
Maximizar la función $f(x, y) = x + y$
Restringida por:
$3x + 2y \le 30$ (1); $3x + 4y \le 48$ (2);
$3x + y \le 24$ (3); $x \ge 0$ (4); $y \ge 0$ (5).



Los vértices de la región factible se obtienen resolviendo los sistemas:

Restricciones (1) y (2): $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + 4y = 48 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 9).$

Restricciones (1) y (3): $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 24 \end{cases} \Rightarrow R(6, 6).$

(2) y (4): $\begin{cases} 3x + 4y = 48 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0, 12)$; (3) y (5): $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow T(8, 0)$; (4) y (5) $\Rightarrow O(0, 0)$.

El punto de corte de las restricciones (2) y (3) no es necesario hallarlo, pues cae fuera de la región factible.
En definitiva, tenemos los vértices: $O(0, 0)$, $P(0, 12)$, $Q(4, 9)$, $R(6, 6)$ y $T(8, 0)$.

El valor de $f(x, y) = x + y$ en cada uno de esos puntos es:

• En O: $f(0,0) = 0$. • En P: $f(0,12) = 12$.

• En Q: $f(4,9) = 4 + 9 = 13$. • En R: $f(6,6) = 6 + 6 = 12$. • En T: $f(8,0) = 8$.

La función toma el valor máximo en el punto $Q(4, 9)$ y vale 13. Esta es la solución buscada: el máximo número de centros, con los requerimientos indicados es 13. Hay que construir 4 centros de atención médica en El Valle y 9 en La Montaña. (Lee, si lo necesitas, el Ejemplo a) para recordar el enunciado del problema).

Observación:
Si obviando que se trata de centros de salud (lo que posibilita soluciones no enteras) y la función objetivo fuese otra, la solución máxima puede alcanzarse en otro punto de esa región.
Veamos dos casos más para este mismo ejemplo.

→ **Ejemplo a1)**: Si para las mismas restricciones de este ejemplo, la función objetivo fuese $g(x, y) = 2x + y$, sus valores en los vértices serían:

• En O: $g(0,0) = 0$. • En P: $g(0,12) = 12$.

• En Q: $g(4,9) = 8 + 9 = 17$. • En R: $g(6,6) = 12 + 6 = 18$. • En T: $g(8,0) = 16$.

El máximo se traslada a R y toma el valor 18.

→ **Ejemplo a2)**: Si la función objetivo volviese a cambiar y tuviese la expresión $h(x, y) = 3x + 2y$, sus valores en esos vértices serían:

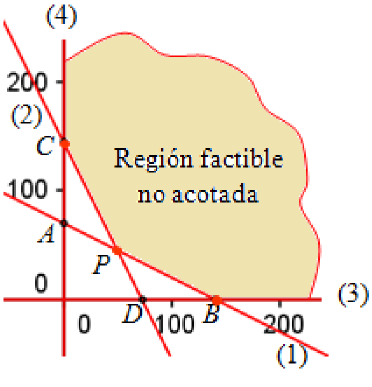
• En O: $h(0,0) = 0$. • En P: $h(0,12) = 24$.

• En Q: $h(4,9) = 12 + 18 = 30$. • En R: $h(6,6) = 18 + 12 = 30$. • En T: $h(8,0) = 24$.

El máximo de $h(x, y) = 3x + 2y$ toma el valor 30 en dos de los vértices: en Q y en R. Entonces, la solución puede ser cualquiera de esos dos puntos o cualquier punto del segmento QR. Por ejemplo, los puntos (5, 7,5) o (5,5, 6,75).

Ejemplo b):
En el problema de los abonos se trataba de:
Minimizar: $f(x, y) = 2x + 3y$,
restringida por:
(1) $3x + 6y \geq 420$; (2) $4x + 2y \geq 290$; (3) $x \geq 0$; (4) $y \geq 0$.
Al dibujar el conjunto de soluciones se han obtenido los vértices $C(0, 145)$ y $B(140, 0)$.
El vértice P es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 420 \\ 4x + 2y = 290 \end{cases} \Rightarrow P(50, 45).$$



Los vértices de la región factible son los puntos $C(0, 145)$, $P(50, 45)$ y $B(140, 0)$.
La frontera está formada por los ejes de coordenadas (a partir de los puntos B y C, y hacía +∞ en ambos casos), y por los segmentos CP y PB.
El valor de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en los vértices es:

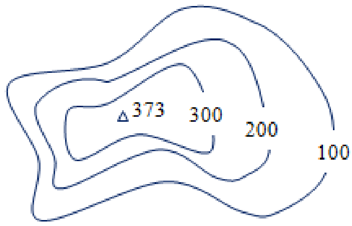
• En C: $f(0,145) = 3 \cdot 145 = 435$ €. • En P: $f(50,45) = 2 \cdot 50 + 3 \cdot 45 = 235$ €.

• En B: $f(140,0) = 2 \cdot 140 = 280$ €.

El mínimo es 235 €, y se da cuando se compran 50 kilos de la marca $M1$ y 45 de la marca $M2$. (Más adelante se confirmará que este es realmente el mínimo, pues como ya se ha advertido, para regiones abiertas este método no es concluyente).

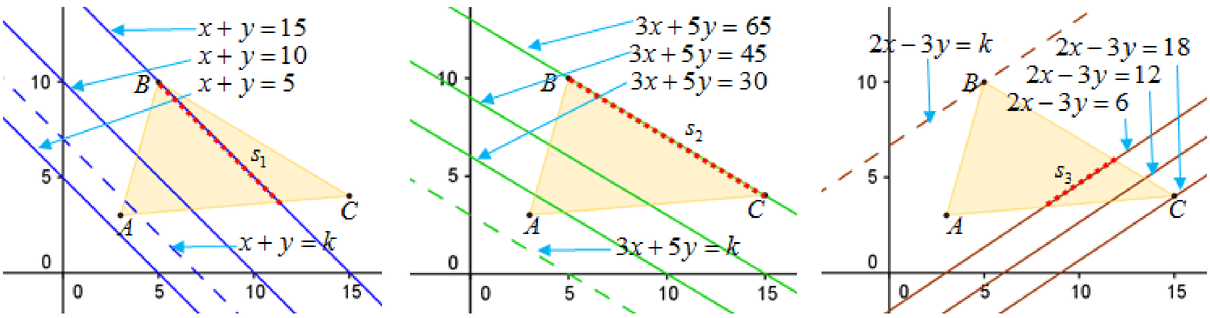
3. Resolución gráfica mediante las rectas de nivel

La idea de rectas de nivel es análoga a la de curvas de nivel en un mapa topográfico, que están generadas por puntos que tienen la misma altitud.



Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.
Si la función objetivo es $f(x, y) = ax + by + c$, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma $ax + by + c = n \Leftrightarrow ax + by = k$.
Variando k (o n) se obtienen distintos niveles para esas rectas y, en consecuencia, distintos valores para $f(x, y)$.

Ejemplo:
Las rectas de nivel asociadas a la función $f(x, y) = x + y$ tienen la ecuación $x + y = k$. Algunas de ellas son: $x + y = 5$; $x + y = 10$; $x + y = 15$…
Las rectas de nivel asociadas a $g(x, y) = 3x + 5y$ son de la forma $3x + 5y = k$. Algunas de ellas son: $3x + 5y = 30$; $3x + 5y = 45$; $3x + 5y = 65$…
Las rectas de nivel asociadas a $h(x, y) = 2x - 3y$ son de la forma $2x - 3y = k$. Algunas de ellas son: $2x - 3y = 6$; $2x - 3y = 12$; $2x - 3y = 18$…
Sus gráficas son las que se muestran a continuación.



Observa:
1) Todas las rectas de nivel correspondientes a una función determinada son paralelas.
2) Al desplazarlas paralelamente aumenta o disminuye el nivel, el valor de k.
$\to$ Las rectas de la forma $ax + by = k$ $(a > 0)$ aumentan su nivel al trasladarlas hacia a la derecha; las de la forma $-ax + by = k$ $(a > 0)$ disminuyen su nivel al trasladarlas a la derecha.
3) En todos los puntos de intersección de una recta con la región factible el valor de la función objetivo es el mismo.
$\to$ Si la región factible es el triángulo de vértices A, B, C:
en todos los puntos del segmento s_1, la función $f(x, y) = x + y$ toma el valor 15;
en todos los puntos del segmento s_2, la función $g(x, y) = 3x + 5y$ toma el valor 65;
en todos los puntos del segmento s_3, la función $h(x, y) = 2x - 3y$ toma el valor 6.
4) El máximo (o el mínimo) de $f(x, y) = ax + by + c$ se alcanzará en el último (o en el primer) punto de contacto de esas rectas, $ax + by = k$, con la región factible.
En los ejemplos de arriba, el mínimo de $f(x, y) = x + y$ se da en A; el máximo en C. Para la función $g(x, y) = 3x + 5y$, el mínimo se da en A, el máximo en cualquier punto del segmento BC. Y para la función $h(x, y) = 2x - 3y$, el mínimo se da en B y el máximo en C.

3.1. La solución óptima en regiones acotadas

En regiones acotadas, un problema de optimización de una función lineal con restricciones lineales siempre tiene solución.

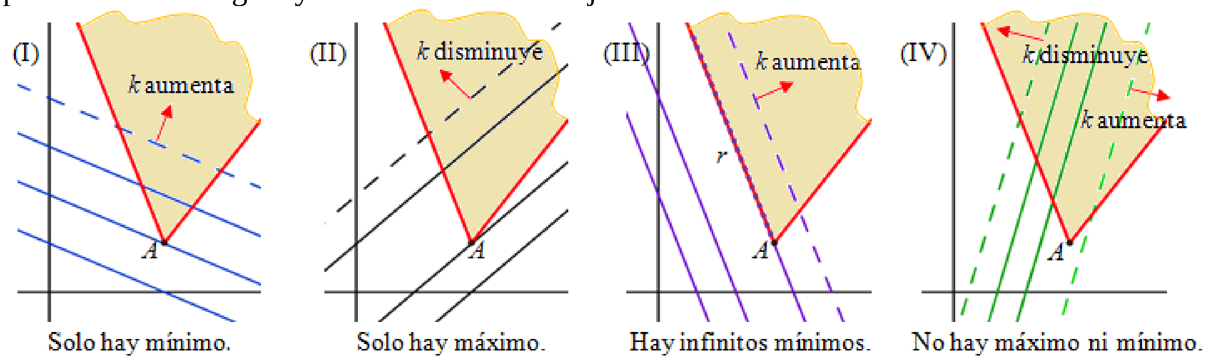
En el ejemplo anterior la región factible es el triángulo de vértices $A(3, 3)$, $B(5, 10)$ y $C(15, 4)$.
→ El mínimo de $f(x, y) = x + y$ se da en A, y vale 6; el máximo vale 19 y se da en C.
→ El mínimo de $g(x, y) = 3x + 5y$ se da en A, y vale 24; el máximo vale 65 y se da en los vértices B y C y, por tanto, en cualquier punto del segmento BC.
→ El mínimo de $h(x, y) = 2x - 3y$ se da en B, y vale –20; el máximo vale 18 y se da en C.

- Estos resultados coinciden con las soluciones obtenidas mediante las rectas de nivel.

La obtención del valor óptimo (máximo o mínimo) de una función $f(x, y) = ax + by + c$ con restricciones lineales se da siempre en un vértice (o en un lado) de la región factible. Su cálculo puede hacerse algebraicamente (evaluando la función en cada vértice) o geométricamente mediante las rectas de nivel.

3.2. La solución óptima en regiones no acotadas

Si la región de soluciones no está acotada el problema de optimización de una función lineal con restricciones lineales no siempre tiene solución, aunque si tiene solución se da en un vértice (o en un lado) de la región factible.
→ Dependiendo del tipo de región factible y de la función objetivo, es posible que exista solo mínimo, solo máximo o ninguno de los dos. En las siguientes figuras mostramos esas situaciones para una misma región y distintas funciones objetivo.



→ En el caso (I) las rectas aumentan su nivel a medida que se trasladan hacia arriba. Como la región factible es ilimitada no hay máximo. Por tanto, solo hay mínimo: se da en el punto A.
→ En el caso (II) las rectas disminuyen de nivel a medida que se trasladan hacia arriba. Por tanto, solo hay máximo: se da en el punto A.
→ En el caso (III) al coincidir una recta de nivel con un lado de la región factible, hay infinitas soluciones: todos los puntos de la semirrecta r. En este caso todos son mínimos.
Observa que, en cualquier caso, si hay solución óptima se da en un vértice: en el punto A.
→ En el caso (IV) las rectas de nivel pueden trasladarse indefinidamente, hacia izquierda o derecha, permaneciendo siempre en contacto con la región factible. Luego el valor de $f(x, y)$ siempre puede aumentarse o disminuirse.

- Por tanto, en regiones no acotadas conviene representar siempre las rectas de nivel.

Observación: El trazado de las rectas de nivel puede hacerse utilizando **GeoGebra**. Así se hace en las soluciones dadas para algunos de los problemas propuestos. Por ej. números 7, 9 y 24.

3.3. Aplicación de las rectas de nivel para la determinación de la solución óptima

Se concluye este apartado haciendo tres ejercicios de programación lineal usando las rectas de nivel para determinar la solución óptima.

Ejercicio 1

Determina, aplicando las rectas de nivel, el valor máximo y mínimo de $f(x, y) = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones:

$2x + y \le 300$; $2x + 3y \le 600$; $x + y \ge 100$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Solución:

Determinación de la región factible.

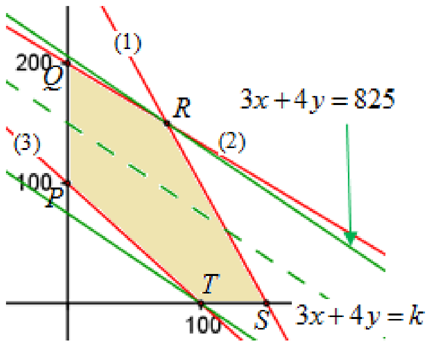
La recta (1) $2x + y = 300$, pasa por (0, 300) y (150, 0). Los puntos de su izquierda son las soluciones de $2x + y \le 300$.

La recta (2) $2x + 3y = 600$, pasa por (0, 200) y (300, 0); los puntos de su izquierda son los que cumplen la restricción $2x + 3y \le 600$.

La recta (3) $x + y = 100$, pasa por (0, 100) y (100, 0); los puntos de su derecha son los que cumplen $x + y \ge 100$.

Las restricciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ indican que las soluciones deben ser del primer cuadrante.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.



Las rectas de nivel son de la forma $3x + 4y = k$. Inicialmente puede trazarse la de ecuación $3x + 4y = 600$: es la de trazo discontinuo de la figura. Trasladándola hacia la derecha aumenta el nivel; hacia la izquierda disminuye. Por tanto, el máximo se da en el punto *R*; y el mínimo en *T*.
El punto *T* tiene coordenadas (100, 0). El mínimo de la función objetivo es $f(100, 0) = 300$.

El punto *R* es la solución de $\begin{cases} 2x + y = 300 \\ 2x + 3y = 600 \end{cases} \to$ *R*(75, 150). El máximo es $f(75,150) = 825$.

Nota: Este ejercicio se resuelve (de nuevo) aplicando Recursos informáticos. Ver Apéndice.

Ejercicio 2

Determina, aplicando las rectas de nivel, el valor máximo y mínimo de $f(x, y) = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones:

$2x + y \ge 300$; $2x + 3y \ge 600$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Solución:

La región factible es la sombreada en la figura.

Las rectas (1) $2x + y = 300$ y (2) $2x + 3y = 600$ son las mismas del ejercicio anterior.

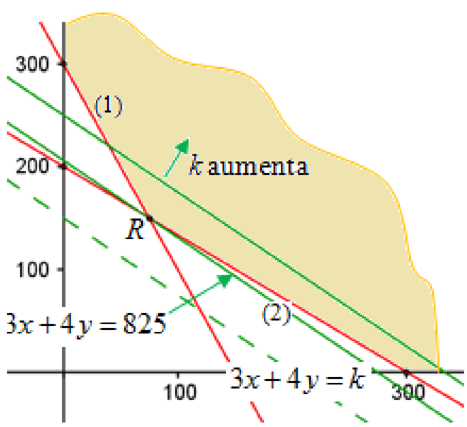
También las rectas de nivel son las mismas: $3x + 4y = k$.

Su nivel puede aumentar hasta el infinito, pues siempre tienen puntos de contacto con la región factible. Por tanto, no hay máximo.

Solo hay mínimo; se da en el punto *R*, por ser el punto de contacto de la región de soluciones con la recta de nivel más a la izquierda que puede trazarse.

Esa recta de nivel es $3x + 4y = 825$.

Como *R*(75, 150), $f(75,150) = 3 \cdot 75 + 4 \cdot 150 = 825$.



Ejercicio 3

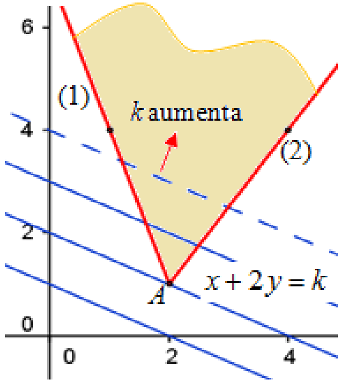
Considera la región del plano limitada por las inecuaciones $3x+y\geq 7$ y $3x-2y\leq 4$.

Determina el valor máximo y mínimo, si existe, de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=x+2y+8$; b) $g(x,y)=x-y-5$; c) $h(x,y)=3x+y$, d) $j(x,y)=4x-y$

Solución:

La región factible es la sombreada en la figura.



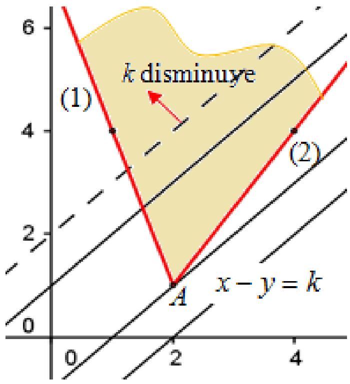
La recta (1) $3x+y=7$ pasa por los puntos (1, 4) y (2, 1). La inecuación $3x+y\geq 7$ determina el semiplano situado a su derecha.

La recta (2) $3x-2y=4$ pasa por los puntos (4, 4) y (2, 1). La inecuación $3x-2y\leq 4$ determina el semiplano situado a su izquierda.

Ambas rectas se cortan en el punto $A(2, 1)$.

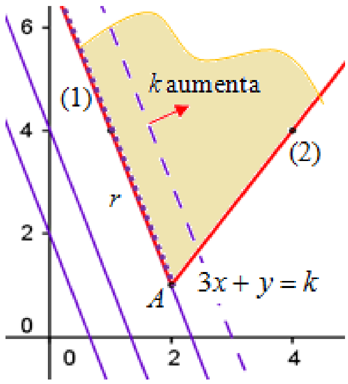
a) Las rectas de nivel correspondientes a la función $f(x,y)=x+2y+8$ son $x+2y=k$. Como su nivel puede aumentar indefinidamente hacia la arriba en contacto con la región factible, la función no tiene máximo. Solo tiene mínimo, que se da en el punto $A(2, 1)$.

El valor del mínimo es $f(2,1)=2+2+8=12$.



b) Las rectas de nivel correspondientes a la función $g(x,y)=x-y-5$ son $x-y=k$. Como su nivel puede disminuir indefinidamente hacia la izquierda, la función no tiene mínimo. Solo tiene máximo, que se da en el punto $A(2, 1)$.

El valor del máximo es $g(2,1)=2-1-5=-4$.

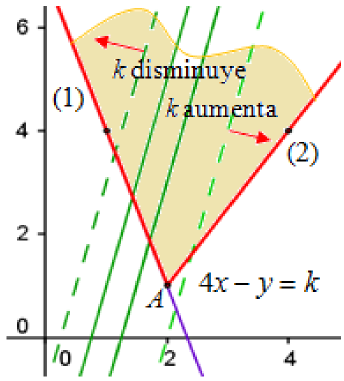


c) Las rectas de nivel correspondientes a la función $h(x,y)=3x+y$ son $3x+y=k$. Puede observarse que estas rectas son paralelas a una de las semirrectas de determina la región factible.

Como su nivel puede aumentar indefinidamente hacia la derecha, la función no tiene máximo.

El valor de k disminuye hacia la izquierda, siendo el valor mínimo el correspondiente a la recta que coincide con (1). Por tanto, hay infinitos mínimos: todos los puntos de r; en particular $A(2, 1)$.

El valor de esos mínimos es $h(2,1)=3\cdot 2+2=8$.



d) Las rectas de nivel correspondientes a la función $j(x,y)=4x-y$ son $4x-y=k$. Cualquiera de ellas tiene puntos que caen dentro de la región de soluciones.

Su nivel disminuye si se trasladan hacia la izquierda, tomando valores tan negativos como se quiera. Hacia la derecha puede aumentar también indefinidamente.

Por tanto, la función $j(x,y)=4x-y$ no tiene ni máximo ni mínimo en la región considerada.

Observación: Los datos de este problema coinciden con lo expuesto en el punto 3.2 de este tema.

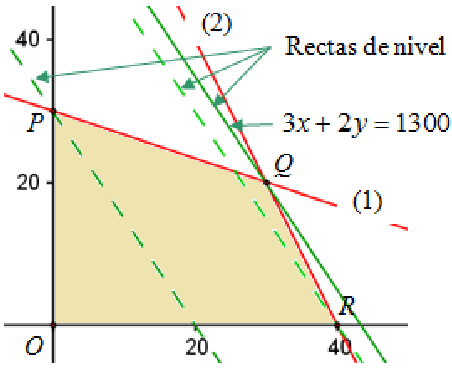
4. Problemas con enunciado: esquema práctico a seguir

Los problemas de programación lineal pueden presentarse en la forma estándar, dando la función objetivo y las restricciones, o bien plantearlos mediante un enunciado, como se hizo en los Ejemplos a) y b). Si es este el caso, puede seguirse el proceso que se indica a continuación, ejemplificado con el siguiente problema:

Problema 1
Una fábrica de muebles produce dos tipos de sillones S1 y S2. La fábrica cuenta con dos secciones: carpintería y tapicería. Hacer un sillón del tipo S1 requiere 1 hora de trabajo en la sección de carpintería y 2 en la de tapicería. Un sillón del tipo S2 necesita 3 horas de carpintería y 1 de tapicería. El personal de carpintería suministra un máximo de 90 horas de trabajo; en tapicería se disponen de 80 horas. Si las ganancias por la venta de S1 y S2 son de 30 y 20 euros, respectivamente, halla cuántos sillones de cada tipo hay que hacer para maximizar las ganancias.
Solución:
Reordenando los datos del problema en la tabla que sigue, a partir de las cantidades decididas, *x* para S1 e *y* para S2, se obtienen las restricciones y la función objetivo:

Tiempos (h)	Cantidad	Carpintería (h)	Tapicería (h)	Ganancia (€)
S1	x	$1 \cdot x$	$2 \cdot x$	$30 \cdot x$
S2	y	$3 \cdot y$	$1 \cdot y$	$20 \cdot y$
Total		$x+3y$	$2x+y$	$30x+20y$
Disponible		90	80	

El problema en su forma estándar es:
Maximizar $G(x, y) = 30x + 20y$
restringida por: $x + 3y \le 90$ (1)
$2x + y \le 80$ (2)
$x \ge 0$; $y \ge 0$



Para las restricciones anteriores se obtiene la región (cerrada) coloreada en la figura adjunta.
Las coordenadas de los vértices del polígono obtenido son:

$O(0, 0)$; $P(0, 30)$; Q: $\begin{cases} x+3y=90 \\ 2x+y=80 \end{cases} \Rightarrow Q(30, 20)$; $R(40, 0)$.

Sustituyendo en $G(x, y) = 30x + 20y$, se tiene:

$G(0,0) = 0$; $G(0,30) = 600$; $G(30,20) = 1300$; $G(40,0) = 1200$

El valor máximo se obtiene en el punto $Q(30, 20)$, fabricando y vendiendo 30 sillones del tipo S1 y 20 del tipo S2. Ese valor máximo, la ganancia máxima, es de 1300 €.

Aunque al tratarse de una región cerrada este método es suficiente, conveniente representar las rectas de nivel, que son de la forma $30x + 20y = k$. En este caso se han trazado las de ecuación $30x + 20y = 600$, $30x + 20y = 1200$ (ambas en trazo discontinuo) y $30x + 20y = 1300$.
Cuando el valor de k aumenta las rectas se desplazan hacia la derecha. Si $k > 1300$ la recta de nivel no tendría ningún punto de contacto con la región factible; por tanto, la máxima ganancia se da en el punto Q.

Problema 2
Una nadadora de élite solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 400 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 300 Kcal. La nadadora debe tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas; además le deben aportar un mínimo de 2200 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro.
Plantea y resuelve el problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar la nadadora para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.
¿Cambiaría la solución si las barritas costasen 1,20 € cada una?
Solución:
Si la nadadora toma *x* barritas de chocolate e *y* barritas de cereales, con los datos del, problema puede formarse la siguiente tabla:

Barritas	Cantidad	H. Carbono	Proteínas	Kcal	Coste
Chocolate	x	$40\cdot x$	$30\cdot x$	$400\cdot x$	$2\cdot x$
Cereales	y	$80\cdot y$	$10\cdot y$	$300\cdot y$	$1\cdot y$
Necesidad		320 g	90 g	2200 Kcal	

La función objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 2x + y$.
Restringida por:

$40x + 80y \geq 320$ $\to$ necesita al menos 320 g de hidratos de carbono (1)

$30x + 10y \geq 90$ $\to$ necesita al menos 90 g de proteínas (2)

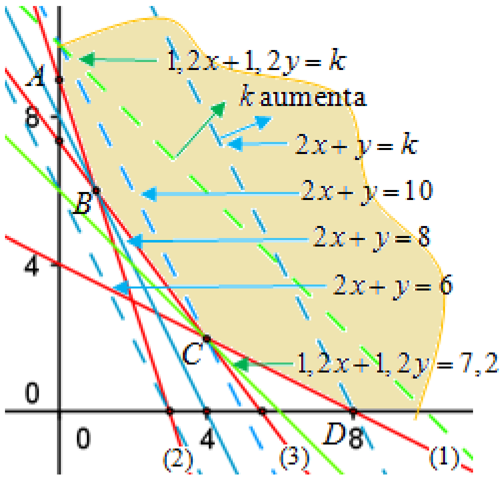
$400x + 300y \geq 2200$ $\to$ necesita al menos 2200 Kcal (3)

$x \geq 0; \quad y \geq 0$ $\to$ Las cantidades no pueden ser negativas

Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura adjunta.
Como se trata de una región abierta conviene trazar las rectas de nivel asociadas a la función objetivo, cuya ecuación es $2x + y = k$. Estas rectas se desplazan hacia la derecha a medida que *k* aumenta; por tanto, el mínimo valor se da en el punto *B*. (Es el primer punto de contacto de las rectas con la región factible).
Este punto es el corte de las rectas (2) y (3):

$$\begin{cases} 30x + 10y = 90 \\ 400x + 300y = 2200 \end{cases} \Rightarrow B(1,\ 6)$$

El coste mínimo será de $C(1,6) = 8$ €.



$\to$ Si las barritas costasen a 1,20 € cada una la función objetivo sería $C(x, y) = 1,20x + 1,20y$. Las rectas de nivel correspondientes son $1,20x + 1,20y = k$. La de nivel más pequeño toca en el punto *C*(4, 2). El coste mínimo será $C(4,2) = 7,20$ €.
Observación: En este caso, para ambas funciones, se llega a la misma conclusión si se evalúa cada función en los vértices de la región factible. Los vértices son: *A*(9, 1); *B*(1, 6); *C*(4, 2) y *D*(8,1).

Problemas propuestos

Regiones factibles

1. a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:
$$\begin{cases} x+2y\le 20 \\ 3x-y\ge 6 \end{cases}.$$
Halla el vértice de la región de soluciones.
b) De los puntos *P*(1, 2), *Q*(4, 1), *R*(10, 6) y *S*(5, 12) indica los que no pertenezcan al conjunto de soluciones, explicando el porqué.

2. a) Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{cases}$. Halla el vértice de la región de soluciones.
b) De los puntos *P*(1, 2), *Q*(4, 1), *R*(6, 2) y *S*(2, –4) indica los que no pertenezcan al conjunto de soluciones.

3. Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:
$$\begin{cases} 2x+5y\ge 20 \\ 4x-10y\ge 0 \end{cases}.$$
Indica el vértice de la región de soluciones.

4. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:
$4x+2y\le 100$; $x\ge 4$; $y\ge 18$; $y\ge 3x$.
Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $3x-2y$ es máxima.

5. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:
$0\le x-y+2$; $2+y\ge 2x$; $x+2y+1\ge 0$; $2\ge x$.
Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $2x+4y$ es mínima.

6. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:
$x+y\ge 14$ (1); $2x+3y\ge 36$ (2); $4x+y\ge 16$ (3); $x-3y\le 0$ (4)
b) Da un punto que no cumpla solo la inecuación (2); otro que cumpla solo las restricciones (3) y (4); y otro que no cumpla ninguna de las cuatro restricciones.

Rectas de nivel

7. Para la región representada en el problema anterior, determina sus vértices y halla el valor que toman en cada uno de ellos las siguientes funciones:
a) $f(x,y)=3x+4y$ b) $g(x,y)=10x-30y+300$ c) $h(x,y)=12x-3y$
Con ayuda de las rectas de nivel asociadas a esas funciones, determina sus valores máximos o mínimos en la región indicada.

8. Representa gráficamente la región del plano determinada por las restricciones.
$3x+2y\le 48$; $2x+y\le 30$; $x+2y\le 36$; $x\ge 0$; $y\ge 0$.
a) ¿En qué punto de esa región alcanza la función $f(x,y)=6x+5y$ su valor máximo?

b) Traza las rectas de nivel asociadas a *f* y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.

9. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:
$x \geq 2$, $x + y \geq 6$, $x + y \leq 12$, $x - 5y \leq 0$.
b) Halla los valores máximos y mínimos de las funciones $f(x, y) = 2x + 3y$, $g(x, y) = x + y$ y $h(x, y) = x + 3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.
c) Traza las rectas de nivel asociadas a *h* y comprueba que la solución algébrica coincide con la gráfica.

10. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:
$2x + 5y \geq 100$; $4x + y \geq 60$; $3x + 4y \geq 120$.
a) ¿Puede determinarse algebraicamente el mínimo de $f(x, y) = 5x + y$ en esa región? ¿Y su máximo? Justifica la respuesta.
b) ¿Tiene la función $g(x, y) = 5x + 4y$ algún óptimo en esa región?

Optimización

11. Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:
$x - y \leq 1$; $x + y \leq 2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

12. Halla los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 5x + 2y + 30$, sujeta a las siguientes restricciones:
$6x + 5y \leq 700$; $2x + 3y \leq 300$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

13. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:
$x + 2y \leq 12$; $2x + y \geq 4$; $x - 2y \leq 6$; $x - y \geq 0$; $x \leq 8$.
b) Indica la posición de los puntos $P(1, 2)$ y $Q(5, 1)$ en relación con la región hallada. En el caso de que el punto sea exterior, di qué desigualdades no cumple.

14. Para la región representada en el problema anterior, halla en qué puntos toman valores máximos y mínimos las funciones:
a) $f(x, y) = 3x + 2y$ b) $g(x, y) = 2x - 3y$ c) $h(x, y) = x + 2y + 20$

15. Halla el máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ restringida por las inecuaciones:
$x + y \leq 60$; $x \geq 10$; $x - 2y \leq 0$;, $y \leq 2x$.

16. Minimiza la función $f(x, y) = 45x + 50y$ sujeta a las siguientes restricciones:
$x + y \leq 40$; $3x + 4y \geq 60$; $y \geq x + 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

17. Representa gráficamente los puntos del recinto determinado por las siguientes desigualdades:
$3x + 2y \leq 18$; $x + y \geq 5$; $0 \leq y \leq 10$.
¿Qué puntos de ese recinto hacen mínima o máxima la función $f(x, y) = 3x + 2y$?

Problemas con enunciado

18. Un tendero dispone de una furgoneta en la que puede cargar hasta 800 kg y de 500 € para gastar. Va al mercado central a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,70 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg.
a) Venderá las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,60 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?
b) ¿Cambiaría la solución si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg?

19. Una empresa textil tiene en su almacén 4000 toallas de baño (grandes) y 3000 toallas de mano (pequeñas). Para favorecer su venta las distribuye en lotes de dos tipos, *A* y *B*. Cada lote del tipo *A* contiene 1 toalla de baño y 1 de manos. Cada lote del tipo *B* contiene 2 toallas de baño y 1 de manos. La empresa obtiene un beneficio de 2 euros por cada lote del tipo *A* y 3 euros por cada lote del tipo *B*.
Halla el número de lotes de cada tipo para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

20. Una empresa constructora dispone de 93000 m² de terreno urbanizable. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: una en parcelas de 400 m², que albergarán a familias de una media de cinco miembros, y cuyo precio de venta será de 200000 euros; otra, en parcelas de 300 m², en donde vivirán familias de una media de cuatro miembros, y costarán 160000 euros. Las autoridades del municipio le imponen dos condiciones:
1.ª El número de casas no puede superar las 275;
2.ª El número de habitantes esperado no puede ser superior a 1200 personas.
¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos por venta?

21. Una empresa conservera puede enlatar diariamente un máximo de 1000 kg de atún. Tiene dos tipos de envases (latas pequeñas y grandes), cuyo contenido neto es de 90 g y 400 g, respectivamente. Por razones de producción, el número de latas pequeñas no puede superar el doble de las grandes. Si la ganancia empresarial es de 0,30 € por lata pequeña y de 0,80 € por grande, ¿cómo debe planificarse la producción para que esa ganancia sea máxima?

22. Una fábrica de caramelos los produce de dos tipos, masticable y normal. La empresa debe fabricar, para cada tipo de caramelo, entre 300 kg y 3000 kg a la semana. El caramelo masticable se vende a 3 €/kg; el normal 2,5 €/kg. Sabiendo que la producción total no puede ser superior a 5100 kilos de caramelo a la semana, ¿cuántos debe producir de cada tipo para maximizar los ingresos?

23. Para abonar una finca se necesitan 400 kg de nitrógeno y 600 kg de fósforo. En el mercado hay dos marcas de abonos, *P* y *Q*. Cada paquete de abono *P* contiene 2 kg de nitrógeno y 6 de fósforo, mientras que cada paquete de *Q* contiene 4 kg de nitrógeno y otros 4 de fósforo. Si el abono *Q* es un 25 % más caro que el *P*, ¿cuántos paquetes hay que comprar de cada marca para abonar la finca con el menor coste posible?

24. Para estar convenientemente alimentado, un caballo necesita 12 unidades de un alimento *A*1, otras 12 de *A*2 y 10 de *A*3. En el mercado hay dos tipos de piensos, *P*1 y *P*2, cuyos precios respectivos son 3 y 2 €/kg. El pienso *P*1 proporciona 1, 2 y 5 unidades de *A*1, *A*2 y *A*3; mientras que *P*2 suministra 4, 2 y 1 unidad de *A*1, *A*2 y *A*3, respectivamente en ambos casos.
¿Cuántos kg de cada pienso hay que comprar para alimentar a un caballo a un coste mínimo?

25. Una empresa tiene dos centros de producción (*C*1 y *C*2) en los que fabrica tres tipos de artículos *A*1, *A*2 y *A*3. Dicha empresa debe fabricar diariamente un mínimo de 360 unidades del artículo *A*1, 320 del *A*2 y 180 del *A*3. La producción por hora en cada centro viene dada en la siguiente tabla:

Producción	*A*1	*A*2	*A*3
En *C*1	25	30	10
En *C*2	30	20	18

Si cada hora de funcionamiento cuesta 800 euros en *C*1 y 1000 en *C*2, ¿cuántas horas debe funcionar cada centro para que, produciendo, al menos, lo necesario, se reduzcan al mínimo los costes de producción?

26. (Propuesto en Selectividad). Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante.
El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

27. (Propuesto en Selectividad). Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

28. Una empresa tiene dos plantas de producción (*P*1 y *P*2) de cierto artículo que vende en tres ciudades (*C*1, *C*2 y *C*3). En *P*1 produce 5000 unidades y en *P*2, 7000 unidades; estas 12000 unidades las vende así: 3500 en *C*1, 4000 en *C*2 y 4500 en *C*3. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a *C*1	a *C*2	a *C*3
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina qué número de artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.

Soluciones

1. a) $V\left(\frac{32}{7},\frac{54}{7}\right)$. b) *P*; *R*; *S*.

2. a) $\left(\frac{16}{5},-\frac{12}{5}\right)$. b) *P* y *S*.

3. *V*(5, 2).

4. *P* (4, 18); *Q*(4, 42); *R*(10, 30); *S*(6, 18). En *S*, –18.

5. $A\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$; *B*(2, 4); *C*(2, 2); $D\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$. En cualquier punto del segmento *AD*, –2.

6. b) *P*(10, 5); *Q*(4, 4); *R*(2, 0).

7. $A\left(\frac{2}{3},\frac{40}{3}\right)$; *B*(6, 8); *C*(12, 4). a) Mínimo: 50. No tiene máximo. (Sugiero solución con GeoGebra). b) Máximo: 300. No tiene mínimo. c) No tiene sol.

8. Vértices: *O*(0, 0); *P*(0, 18); *Q*(6, 15); *R*: *R*(12, 6); *S*(15, 0). a) En *Q*: 111.

9. a) Vértices: *A*(2, 4); *B*(2, 10); *C*(10, 2); *D*(5, 1). b) 34, en *A*; 13, en *D*. 12, en *BC*; 6, en *AD*. 32, en *B*; 8, en *D*. c) Solución con GeoGebra,

10. a) No; hay que trazar las rectas de nivel. b) 138,46. (Se sugiere solución con GeoGebra).

11. Vértices: *O*(0, 0); *P*(0, 2); *Q*(3/2, 1/2); *R*(1, 0). 7/2, en *Q*; 0, en *O*.

12. 613,3; 0.

13. b) *P*es exterior.

14. Vértices: *A*(4, 4); *B*(8, 2); *C*(8, 1); $D\left(\frac{14}{5},-\frac{8}{5}\right)$; $E\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$. a) Máximo *B*, 28; mínimo en *D*, 20/3. b) Máximo en *C*, 13; mínimo en *A*, –4. c) Máximo en *AB*, 32; mínimo en *D*, 98/5.

15. 160.

16. 750.

17. Mínimo en *A*(–5, 10), 5; el máximo en cualquier punto del segmento *BC*: *B*(–2/3, 10); *C*(6, 0).

18. a) 714,3 kg de manzanas; 142,86 euros. b) 500 kg de manzanas y 300 de naranjas; 145 €.

19. 2000 lotes del tipo *A* y 1000 del tipo *B*. 7000 euros.

20. Varias soluciones: 100 grandes y 175 pequeñas…; 4800000 euros.

21. (3448, 1724); 2413,60 €.

22. 3000 kg de masticable y 2100 kg de normal. 14250 €.

23. 50 de *P* y 75 de *Q*.

24. 1 kg *P*1 y 5 kg *P*2. 13 €. (Sugiero solución con GeoGebra).

25. 7,2 y 6.

26. El máximo es de 3200 €, y se da cuando se fabrican 300 kg de pintura mate y 400 kg de pintura brillante.

27. El máximo es de 680 €, y se da cuando se fabrican 20 tartas de chocolate y 20 de chocolate y nata.

28.

Envíos	a *C*1 (3500)	a *C*2 (4000)	a *C*3 (4500)
Desde *P*1 (5000)	0	4000	1000
Desde P2 (7000)	3500	0	3500