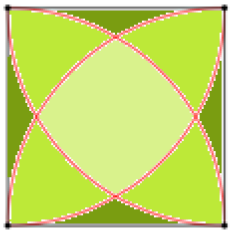
Áreas

El problema que sigue no es difícil, aunque puede resultar engorroso en los cálculos. Puede proponerse a los alumnos de 14 o 15 años en adelante.

Problema

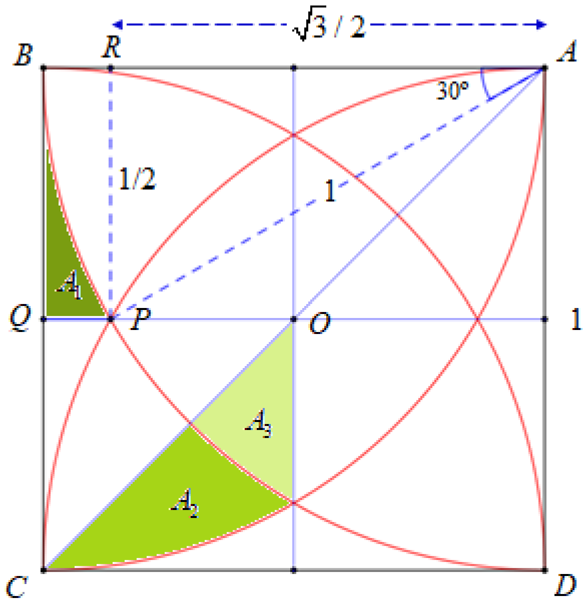
En un cuadrado de lado 1 se han trazado arcos de circunferencia con centro en los vértices, tal como se indica en la figura. Calcula el área de cada una de las regiones sombreadas con diversos colores.



<u>Solución</u>:

El cuadrado completo está formado por 8 porciones de los tipos A_1, A_2 y A_3, tal como se indica en la figura; luego, su área 1, será: $1 = 8A_1 + 8A_2 + 8A_3$.

Sea P el punto donde se cortan dos de esos arcos y R la proyección de P sobre el lado AB del cuadrado. Como AP = 1 y RP = 1/2, se deduce que el ángulo PAR = 30º. (Recuerda que en un triángulo equilátero, la altura cae en la mitad del lado opuesto; y que esa altura coincide con la bisectriz del ángulo en cuestión. En este caso, el triángulo ARP es medio triángulo equilátero). Esto implica que $RA = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $QP = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Por tanto, el área de la porción A_1 es igual a la del trapecio $ABQP$ menos la del sector circular ABP.

El área del trapecio es:

$$A_{ABQP} = \frac{\left(1+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4}.$$

El área del sector ABP es $A_{ABP} = \frac{\pi}{12}$.

Luego, el área de la región A_1 es: $A_1 = A_{ABQP} - A_{ABP} = \frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{24-3\sqrt{3}-4\pi}{48}$.

→ La parte del cuadrado exterior al cuarto de círculo ABD, está formada por cuatro porciones de área A_1 más dos porciones de área A_2. Por tanto: $4A_1 + 2A_2 = 1-\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$4\cdot\frac{24-3\sqrt{3}-4\pi}{48} + 2A_2 = 1-\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2A_2 = 1-\frac{\pi}{4}-\frac{24-3\sqrt{3}-4\pi}{12} \Rightarrow 2A_2 = \frac{-12+3\sqrt{3}+\pi}{12}.$$

$\rightarrow$ El cuadrado completo está formado por 8 porciones de cada tipo; su área 1, será:

$$1 = 8A_1 + 8A_2 + 8A_3 \Rightarrow 8A_3 = 1 - 8A_1 - 8A_2 \Rightarrow 8A_3 = 1 - 8 \cdot \frac{24 - 3\sqrt{3} - 4\pi}{48} - 4 \cdot \frac{-12 + 3\sqrt{3} + \pi}{12} \Rightarrow$$

$$8A_3 = 1 - \frac{24 - 3\sqrt{3} - 4\pi}{6} - 2 \cdot \frac{-12 + 3\sqrt{3} + \pi}{6} = 1 - \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} = \frac{6 - 3\sqrt{3} + 2\pi}{6}.$$

En definitiva, el área de cada una de las regiones sombreadas (el lector sabrá ponerles color), es:

$$8A_1 = \frac{24 - 3\sqrt{3} - 4\pi}{6};\ 8A_2 = \frac{-24 + 6\sqrt{3} + 2\pi}{6};\ 8A_3 = \frac{6 - 3\sqrt{3} + 2\pi}{6}.$$