PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EvAU–EBAU–PEBAU… DE 2023

En las páginas que siguen están resueltos todos los problemas propuestos en los exámenes de Acceso a la Universidad, (antigua *Selectividad*), en la convocatoria de junio (ordinaria).
En tres distritos universitarios (Andalucía, Cataluña y Navarra) no se propusieron problemas de este bloque.
En total se resuelven 27 ejercicios.

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean están relacionados con las siguientes cuestiones:
1) Probabilidad elemental: unión e intersección de sucesos; contrarios; sucesos dependientes e independientes. Uso de diagramas de Venn.
2) Probabilidad total; Bayes… Elaboración de diagramas de árbol o de tablas de contingencia.
3) Distribución binomial. Cálculo de probabilidades asociadas. Ajuste de una binomial mediante una normal; corrección de continuidad.
4) Distribución normal. Cálculo de probabilidades asociadas; uso de la tabla normal estándar. Valor de Z correspondiente a una probabilidad dada.

1. Aragón, junio 2023

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

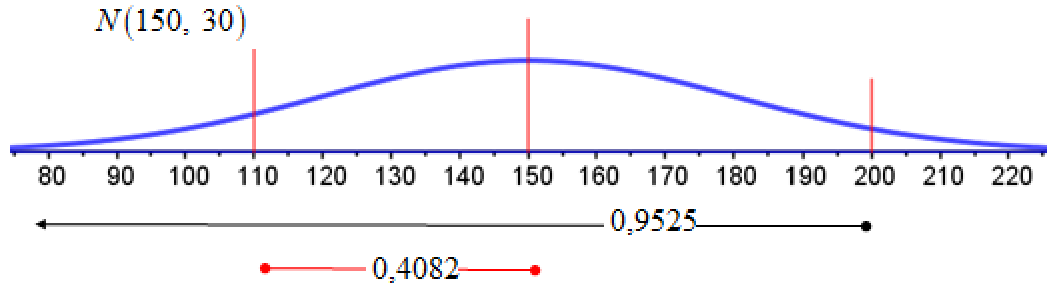
a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

Solución:
El contenido total de sulfitos (medido en mg/l) se distribuye como una $N(150, 30)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-150}{30}$.

Con esto:
a)

$$P(X\geq 200)=1-P(X<200)=1-P\left(Z<\frac{200-150}{30}\right)\approx 1-P(Z<1,67)=1-0,9525=0,0475$$



b) $P(110<X<150)=P\left(\dfrac{110-150}{30}<Z<\dfrac{150-150}{30}\right)=P(-1,33<Z<0)=$

$=P(Z<0)-P(Z<-1,33)=0,5-(1-P(Z<1,33))=0,5-(1-0,9082)=0,4082$.

2. Asturias, junio 2023

Problema 7. Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) **(1.25 puntos)** Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Solución:
Sean E, F y P los sucesos "el producto se fabrica en España, Francia o Portugal", respectivamente.
Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(\text{E}) = 0{,}60$; $P(\text{F}) = 0{,}25$; $P(\text{P}) = 0{,}15$.

Las probabilidades condicionadas a tener algún defecto son:

$P(\text{D/E}) = 0{,}01$; $P(\text{D/F}) = 0{,}0{,}05$; $P(\text{D/P}) = 0{,}02$.

(Puede hacerse un diagrama de árbol con estos valores).

a) Por la probabilidad total, la probabilidad de una unidad de producto tenga algún defecto es:

$$P(\text{D}) = P(\text{E}) \cdot P(\text{D/E}) + P(\text{F}) \cdot P(\text{D/F}) + P(\text{P}) \cdot P(\text{D/P}) =$$
$$= 0{,}60 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}005 + 0{,}15 \cdot 0{,}02 = 0{,}01025.$$

b) Por la fórmula de la probabilidad condicionada (Bayes):

$$P(\text{P/D}) = \frac{P(\text{P} \cap \text{D})}{P(\text{D})} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}02}{0{,}01025} = \frac{300}{1025} \approx 0{,}2927\,.$$

3. Asturias, junio 2023

Problema 8. En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) **(1.25 puntos)** La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].

(b) **(1.25 puntos)** Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$.

Solución:

La variable aleatoria $N(70, 10)$ se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 70}{10}$.

Con esto:

a) $P(75 < X < 85) = P(X < 85) - P(X < 75) = P\left(Z < \dfrac{85-70}{10}\right) - P\left(Z < \dfrac{75-70}{10}\right) =$

$P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$.

b) Para el nuevo valor de μ se sabe que,

$P(X > 90) = P\left(Z > \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{90-\mu}{10}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \dfrac{90-\mu}{10} = 1{,}645 \Rightarrow$

$\mu = 90 - 16{,}45 = 73{,}55$.

La media ha aumentado, pasa de 70 a 73,55 puntos.

4. Baleares, junio 2023

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solución:

a) Si $P\left(A^C\right) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 1 - P\left(A^C\right) = 0,6$.

Por la probabilidad condicionada,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

b) Como, en este caso, $P(B/A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Rightarrow$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0,5} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

c) Por la propiedad (leyes de De Morgan),

$$P\left(A^C \cap B^C\right) = P\left((A \cup B)^C\right) = 1 - P(A \cup B)^C$$

Por otra parte, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,6 - 0,3 = 0,9 \Rightarrow P(A \cup B)^C = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

b) Los sucesos A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como $P(A \cap B) = 0,3$ y $P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$, tales sucesos no son independientes.

5. Baleares, junio 2023

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [**4 punts**] Quina és la desviació típica?

(b) [**3 punts**] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) [**3 punts**] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solución:

(a) La distribución es $N(3{,}1,\ \sigma)$, en kg. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 3{,}1}{\sigma}$.

Como $P(X > 3{,}8) = P\left(Z > \dfrac{3{,}8 - 3{,}1}{\sigma}\right) = P\left(Z > \dfrac{0{,}7}{\sigma}\right) = 0{,}305 \Rightarrow$

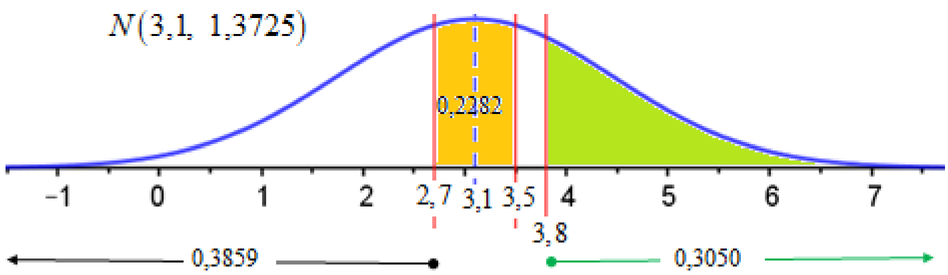
$$P\left(Z < \frac{0{,}7}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}305 = 0{,}695 \Rightarrow \text{Tabla } N(0,\ 1) \to \frac{0{,}7}{\sigma} = 0{,}51 \Rightarrow \sigma \approx 1{,}3725.$$

(b) $P(X < 2{,}7) = P\left(Z < \dfrac{2{,}7 - 3{,}1}{1{,}3725}\right) \approx P(Z < -0{,}29) = 1 - P(Z < 0{,}29) = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$.

(c) $P(2{,}7 < X < 3{,}5) = P(X < 3{,}5) - P(X < 2{,}7) =$

$$= P\left(Z < \frac{3{,}5 - 3{,}1}{1{,}3725}\right) - P\left(Z < \frac{2{,}7 - 3{,}1}{1{,}3725}\right) \approx P(Z < 0{,}29) - \left(1 - P(Z < 0{,}29)\right) =$$

$$= 0{,}6141 - 0{,}3859 = 0{,}2282.$$



6. Islas Canarias, junio 2023

4A. Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años? 1 ptos

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años? 1 ptos

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años? 0.5 ptos

Solución:

La distribución de docentes menores de 30 años puede estudiarse como una binomial con probabilidad p = 0,11: $B(n, 0{,}11)$.

La probabilidad de r éxitos es $P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$, siendo $q = 1 - p$.

a) Si $n = 15 \to B(15, 0{,}11)$.

Con esto:

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=$$

$$=\binom{15}{0}\cdot 0{,}11^0\cdot 0{,}89^{15}+\binom{15}{1}\cdot 0{,}11^1\cdot 0{,}89^{14}\approx 0{,}1741+0{,}3228=0{,}4969\,.$$

b) Para n grande, la binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso puede hacerse, pues 200 ·0,11 = 22, y 200 · 0,89 = 178.

En consecuencia, la binomial $B(200, 0{,}11)$ puede estudiarse mediante la distribución normal $N\left(200\cdot 0{,}11,\ \sqrt{200\cdot 0{,}11\cdot 0{,}89}\right)\to N\left(22,\ 4{,}42\right)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-22}{4{,}42}$.

Con esto:

$$P(20\leq X\leq 30)=P(X\leq 30)-P(X\leq 20) = \text{(haciendo la corrección de continuidad)}$$

$$= P\left(Z<\frac{30{,}5-22}{4{,}42}\right)-P\left(Z<\frac{19{,}5-22}{4{,}42}\right)\approx P(Z<1{,}92)-P(Z<-0{,}57) =$$

$$= 0{,}9726 - (1 - 0{,}7157) = 0{,}6883.$$

c) La probabilidad de que un docente sea mayor de 30 años es q = 0,89; por tanto, entre 500 docentes cabe esperar que 500 · 0,89 = 445 sean mayores de 30 años.

7. Islas Canarias, junio 2023

4B. Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm. 1 ptos

b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación. 0.75 ptos

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm? 0.75 ptos

Solución:

a) La variable X que mide la estatura de las personas objeto de estudio se distribuye como una normal $N(168,\ 8)$, que se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-168}{8}$.

Con esto:

$$P(X>156,5)=1-P(X<156,5)=1-P\left(Z<\frac{156,5-168}{8}\right)=1-P(Z<-1,44) =$$

$$= 1-(1-P(Z<1,44)) = 1 - (1 - 0,9251) = 0,9251.$$

Notas:

1) Habitualmente se considera que una persona mide 156 cm cuando su estatura está en el intervalo (155,5, 156,5). Por tanto, mide más de 156 cm cuando su estatura supera los 156,5 cm. Por idéntico motivo, medir más de 182 significa que $X > 182,5$. Y lo mismo cabe decir de la estatura entre 166 y 172, que significa que $165,5 < X < 172,5$.

2) No habría inconveniente en ignorar la nota 1) y considerar directamente los valores del enunciado: a) $X > 156$; b) $X > 182$; c) $166 < X < 172$. Así se hace al final del ejercicio.

b) $P(X>182,5)=P\left(Z>\dfrac{182,5-168}{8}\right)=P(Z>1,81)=1-P(Z<1,81) =$

$= 1 - 0,9649 = 0,0351.$

Esto significa que solo el 3,51 % mide más de 182 cm, valor que queda muy lejos del 15 % afirmado. Por tanto, debe concluirse que tal afirmación es falsa.

c) $P(165,5<X<172,5)=\left(Z<\dfrac{172,5-168}{8}\right)-P\left(Z<\dfrac{165,5-168}{8}\right) =$

$= P(Z<0,56)-P(Z<-0,31) = 0,7123 - (1 - 0,6217) = 0,3340.$

Observación: Ignorando la nota 1) y considerando: a) $X > 156$; b) $X > 182$; c) $166 < X < 172$, se tendrá:

a) $P(X>156)=1-P\left(Z<\dfrac{156-168}{8}\right)=1-P(Z<-1,50) = 0,9332.$

b) $P(X>182)=P\left(Z>\dfrac{182-168}{8}\right)=P(Z>1,75)=1-P(Z<1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401.$

c) $P(166<X<172)=\left(Z<\dfrac{172-168}{8}\right)-P\left(Z<\dfrac{166-168}{8}\right) =$

$= P(Z<0,50)-P(Z<-0,25) = 0,6915 - (1 - 0,5987) = 0,2902.$

8. Cantabria, junio 2023

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

En cierta región, el 72% de las mujeres vive al menos 71 años y el 52% vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Solución:

Se supone que la esperanza de vida, X, se distribuye normalmente: $N(\mu, \sigma)$.

Se sabe que:

$$P(X \geq 71) = 0,72;\quad P(X \geq 80) = 0,52 \Rightarrow P\left[(X > 71) \cap (X > 80)\right] = P(X > 80) = 0,52.$$

Por tanto, por la probabilidad condicionada:

$$P(X > 80 / X > 71) = \frac{P\left[(X > 71) \cap (X > 80)\right]}{P(X > 71)} = \frac{0,52}{0,72} = 0,7222.$$

9. Cantabria, junio 2023

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.

3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Solución:

Si los sucesos A y B son independientes, entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125.$$

1) Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625.$$

2) $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$; $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0,25 = 0,75$.

3) Por las leyes de De Morgan, $P(A^C \cap B^C) = P\left((A \cup B)^C\right) = 1 - 0,625 = 0,375$.

Por otra parte, $P(A^C) \cdot P(B^C) = 0,5 \cdot 0,75 = 0,375$.

Al ser $P(A^C \cap B^C) = P(A^C) \cdot P(B^C) = 0,375$, los sucesos A^C y B^C también son independientes.

4) Por otra ley de De Morgan, $P(A^C \cup B^C) = P\left((A \cap B)^C\right) = 1 - 0,125 = 0,875$.

10. Castilla y León, junio 2023

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Un 50% de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30% son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

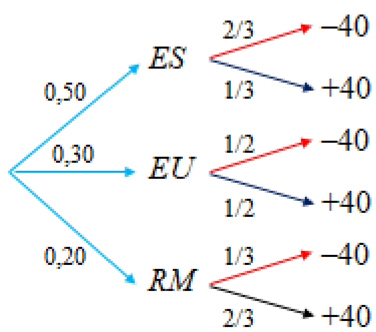
a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? **(0,7 puntos)**

c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? **(0,7 puntos)**

Solución:

Para las distintas nacionalidades se definen los sucesos: *ES*, "españoles"; *EU*, "europeos no españoles"; *RM*, "resto del mundo"; –40/*ES*, –40/*EU* y –40/*RM* designan los sucesos tener menos de 40 años siendo *ES*, *EU* y *RM*, respectivamente.



a) Se conocen los siguientes valores de probabilidad:

$$P(ES)=0,50;\ \ P(EU)=0,30;\ P(RM)=0,20;$$

$$P(-40/ES)=\frac{2}{3};\ P(-40/EU)=\frac{1}{2};\ P(-40/RM)=\frac{1}{3}.$$

En el diagrama de árbol adjunto se indican los distintos sucesos y sus probabilidades.

b) La probabilidad de que una herramienta sea defectuosa será:

$$P(-40)=P(ES)\cdot P(-40/ES)+P(EU)\cdot P(-40/EU)+P(RM)\cdot P(-40/RM)=$$

$$=0,50\cdot\frac{2}{3}+0,30\cdot\frac{1}{2}+0,20\cdot\frac{1}{3}=0,55.$$

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(ES/-40)=\frac{P(ES)\cdot P(-40/ES)}{P(-40)}=\frac{0,50\cdot\frac{2}{3}}{0,55}=\frac{20}{33}\approx 0,606.$$

11. Castilla y León, junio 2023

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? **(2 puntos)**

Solución:

El resultado de la suma de dos dados es el que se indica en la siguiente tabla.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La suma más frecuente es 7, con probabilidad $P(7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

12. Castilla–La Mancha, junio 2023

4. a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

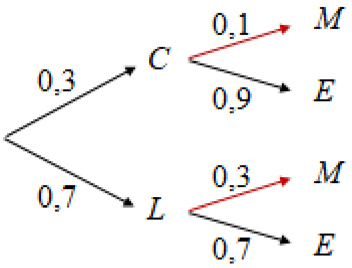
   b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Solución:

a) La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto.
Las letras C, L, M y E indican los sucesos “Polígono Campo”, “polígono Llano”, “reparación de tipo mecánico” y “reparación de tipo eléctrico”, respectivamente.



Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(C)=0,3;\ P(M/C)=0,1;\ P(E/C)=0,9$$

$$P(L)=0,7;\ P(M/L)=0,3 \to P(E/L)=0,7.$$

a.1) La probabilidad de que la reparación sea de tipo mecánico será:

$$P(M)=P(C)\cdot P(M/C)+P(L)\cdot P(M/L) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,24.$$

Por tanto, $P(E)=1-P(M)=0,76$.

a.1) Por Bayes,

$$P(L/E)=\frac{P(L)\cdot P(E/L)}{P(E)}=\frac{0,7\cdot 0,7}{0,76}=\frac{49}{76}\approx 0,64.$$

b) La distribución es $N(1,5,\ \ 0,15)$, en min. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-1,5}{0,15}$.

b1) $P(X<1,35)=P\left(Z<\dfrac{1,35-1,5}{0,15}\right)\approx P(Z<-1)=1-P(Z<1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$

b2) Si $P(X<t)=0,8508 \Rightarrow P\left(Z<\dfrac{t-1,5}{0,15}\right)=0,8508 \Rightarrow \dfrac{t-1,5}{0,15}=1,04 \Rightarrow t=1,656$.

13. Castilla–La Mancha, junio 2023

7. *b)* Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Solución:

El número total de extracciones de 2 bolas elegidas entre las 4 dadas es $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.

(Evidentemente se trata de un problema de combinaciones, pues, por la propiedad conmutativa de la suma, no importa el orden de extracción de las bolas: su suma será la misma).

La suma de los valores de las bolas puede ser:

1 + 2 = **3**; 1 + 3 = **4**; 1 + 4 = **5**; 2 + 3 = **5**; 2 + 4 = **6**; 3 + 4 = **7**.

b1) La suma es 3 en un solo caso: obteniendo las bolas 1 y 2.

Por tanto, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.

b2) La puntuación es mayor que 3 en los demás casos: $P(X > 3) = \frac{5}{6}$.

14. Comunidad Valenciana, junio 2023

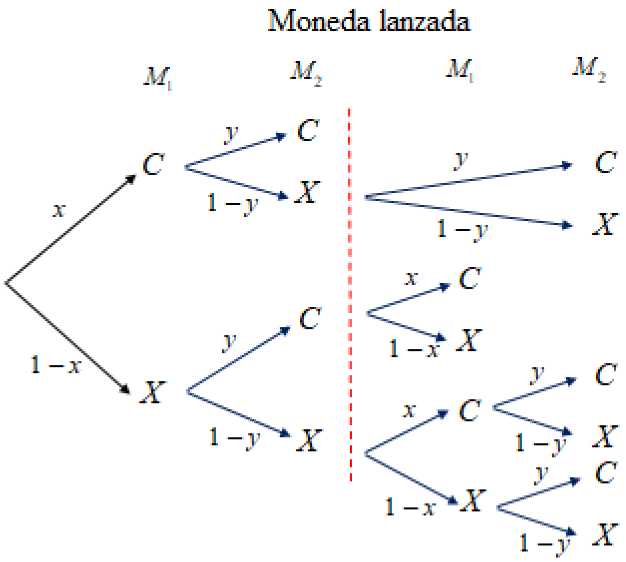
Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Solución:

La secuencia del lanzamiento de monedas es la que se indica en el diagrama de árbol siguiente. La línea roja indica el segundo lanzamiento, caso b).



a) Lanzamiento de las dos monedas a la vez:

– Ninguna cara:

$$P(0C)=P(X/M_1)\cdot P(X/M_2)=(1-x)\cdot(1-y).$$

– Una cara:

$$P(1C)=P(C/M_1)\cdot P(X/M_2)+P(X/M_1)\cdot P(C/M_2)=x(1-y)+(1-x)\cdot y.$$

– Dos caras: $P(2C)=P(C/M_1)\cdot P(C/M_2)=x\cdot y$.

b) A continuación, si no ha salido cara, se vuelve a lanzar moneda:

–No sale ninguna cara, ni en los dos primeros lanzamientos ni el dos segundos (4 cruces):

$$P(0C)=P(4X)=P(X/M_1)\cdot P(X/M_2)\cdot P(X/M_1)\cdot P(X/M_2)=(1-x)(1-y)\cdot(1-x)\cdot(1-y)$$

–Obtener solo una cara. No sale cara en alguno de los dos primeros lanzamientos y no sale cara en un tercero (lanzando la moneda que ha salido cruz).

$$P(1C)=P(1C,2X)=P(C/M_1)\cdot P(X/M_2)\cdot P(X/M_1)+P(X/M_1)\cdot P(C/M_2)\cdot P(X/M_1)$$
$$+\ P(X/M_1)\cdot P(X/M_2)\cdot\left(P(C/M_1)\cdot P(X/M_2)+P(X/M_1)\cdot P(C/M_2)\right)=$$
$$=\ x\cdot(1-y)\cdot(1-y)+(1-x)\cdot y\cdot(1-x)+(1-x)\cdot(1-y)\cdot\left(x(1-y)+(1-x)y\right).$$

–Obtener dos caras.

$$P(2C)=P(C/M_1)\cdot P(C/M_2)+P(C/M_1)\cdot P(X/M_1)\cdot P(C/M_1)+$$
$$+\ P(X/M_1)\cdot P(C/M_2)\cdot P(C/M_1)+P(X/M_1)\cdot P(X/M_2)\cdot P(C/M_1)\cdot P(C/M_2)\ =$$
$$=\ x\cdot y+x\cdot(1-y)\cdot x+(1-x)\cdot y\cdot x+(1-x)\cdot y\cdot x+(1-x)\cdot(1-y)\cdot x\cdot y\ .$$

15. Comunidad Valenciana, junio 2023

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

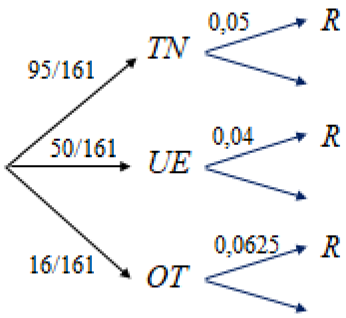
a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Para las distintas procedencias de los vuelos se definen los sucesos:
TN, "territorio nacional"; *UE*, "Unión Europea"; *OT*, "otros países"; *R* indica retraso.

En el diagrama adjunto se indican las probabilidades de cada suceso.



a) La probabilidad de que un vuelo se retrase será:

$$P(R)=P(TN)\cdot P(R/TN)+P(UE)\cdot P(R/UE)+P(OT)\cdot P(R/OT) =$$
$$=\frac{95}{161}\cdot 0,05+\frac{50}{161}\cdot 0,04+\frac{16}{161}\cdot 0,0625=\frac{775}{16100}\approx 0,0481.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(UE/R)=\frac{P(UE)\cdot P(R/UR)}{P(R)}=\frac{\frac{50}{161}\cdot 0,04}{\frac{775}{16100}}=\frac{200}{775}\approx 0,2581.$$

16. Extremadura, junio 2023

9. Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano? (0.75 puntos)

Solución:
Sean los sucesos: F = le gusta el fútbol; B = le gusta el balonmano.

Se conocen las probabilidades siguientes:

$$P(F)=0{,}80;\ P(B)=0{,}40;\ P(F\cap B)=0{,}30.$$

a) Luego, la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes es,

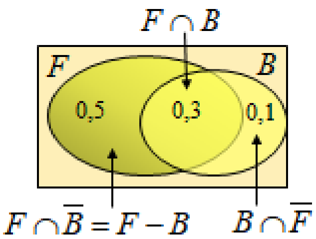
$$P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B) \Rightarrow P(F\cup B)=0{,}80+0{,}40-0{,}30=0{,}90.$$

b) La probabilidad de que le guste solo el futbol será:

$$P(F-B)=P(F)-P(F\cap B)=0{,}80-0{,}30=0{,}50.$$

c) Por la probabilidad condicionada se tendrá:

$$P\left(B/\overline{F}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=\frac{0{,}10}{0{,}20}=0{,}50.$$



El diagrama de Venn adjunto puede aclarar las soluciones dadas.

17. Extremadura, junio 2023

10. Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

Solución:

La variable X que mide el número de errores ortográficos puede estudiarse como una distribución binomial $B(10,\ 0{,}3)$, donde la probabilidad de errar es $p = 0{,}3$; y la de escribir sin faltas ortográficas será $q = 0{,}7$.

Con esto:

a) La probabilidad de escribir exactamente 5 mensajes con errores será:

$$P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10} = \frac{15!}{5!\cdot 10!}\cdot 0{,}00243\cdot 0{,}028247524 = 3003\cdot 0{,}00006864... \approx 0{,}2061.$$

b) La probabilidad de que escriba 4 o más mensajes con errores será:

$$P(X\geq 4)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3) =$$

$$= 1-\binom{15}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{15}-\binom{15}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^{14}-\binom{15}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^{13}-\binom{15}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^{12} =$$

$$= 1 - 0{,}004748 - 0{,}030520 - 0{,}091560 - 0{,}170040 = 0{,}698452.$$

c) La media de la distribución binomial, $B(n,\ p)$, es $\mu = np$; su desviación típica, $\sigma = \sqrt{npq}$.

En este caso: $\mu = np = 15 \cdot 0{,}3 = 4{,}5$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7} = 1{,}7748$.

18. Galicia, junio 2023

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A\cap\bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A\cup B) = 0.8$, $P(A\cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

Solución:

a) En general se cumple que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Si $P(A\cup B)=0,8$, $P(A\cap B)=0,2$ y $P(A)=2P(B)$ $\Rightarrow$

$$0,8=2P(B)+P(B)-0,2 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{3} \to P(A)=\frac{2}{3}.$$

- $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}-0,2=\dfrac{7}{15}\approx 0,47$.
- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{1/3}=0,6$.
- $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,2}{2/3}=0,3$.

b) Sean los sucesos:

ON = "online"; *PR* = "presencial"; *EU* = "europeo";

EU/*ON* = "europeos que asisten online"; *EU*/*PR* = "europeos que asisten presencialmente".

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(EU)=0,65;\ P(ON)=0,60;\ P(PR)=0,40;\ P(EU/PR)=0,80;\ P(EU/ON)=x$$

Por la probabilidad total,

$$P(EU)=P(ON)\cdot P(EU/ON)+P(PR)\cdot P(EU/PR) \Rightarrow$$

$$0,65=0,60\cdot x+0,40\cdot 0,80 \Rightarrow x = 0,55.$$

Con esto:

- La probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online será:
  $P(EU\cap ON)=P(ON)\cdot P(EU/ON)=0,60\cdot 0,55=0,33$.
- La probabilidad de que participe online si se sabe que es europeo es:
  $P(ON/EU)=\dfrac{P(EU\cap ON)}{P(EU)}=\dfrac{0,33}{0,65}=0,5077$.

19. Galicia, junio 2023

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

Solución:

a) La distribución que mide el número de renacuajos que llegarán a la edad adulta es una binomial *B*(2500, 0,02).

La distribución binomial *B*(*n*, *p*) se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso, como $np = 2500 \cdot 0{,}02 = 50$ y $nq = 2500 \cdot 0{,}98 = 2000$, pues: $n = 250$, es el número de renacuajos; $p = 0{,}02$ la probabilidad de llegar a la edad adulta, y $q = 0{,}75$, la de no llegar.

Por tanto, la binomial *B*(2500, 0,02) puede estudiarse mediante la distribución normal

$$N\left(2500\cdot 0{,}02,\ \sqrt{2500\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}\right) \to N(50,\ 7).$$

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-50}{6{,}325}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X \geq 55) = P(X' > 54{,}5) = P\left(Z > \frac{54{,}5-50}{7}\right) = P(Z > 0{,}64) = 1 - P(Z < 0{,}64) =$$

$= 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$.

b) La puntuación de los candidatos a beca, *X*, se distribuye como una normal *N*(100, 20); se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-100}{20}$.

Sea *c* la nota de corte para obtener beca.

Si $P(X > c) = 0{,}05 \Rightarrow P(X < c) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{c-100}{20}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$

$\dfrac{c-100}{20} = 1{,}645 \Rightarrow c = 132{,}9$ puntos.

20. La Rioja, junio 2023

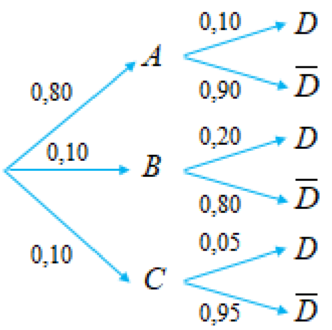
9.– (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosos en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:

La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto.
Con A, B y C se indican los sucesos "tipos de coches".
Con D y $\overline{D}$, se indica que la pieza es defectuosa o no.



Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A)=0{,}80 \to P(D/A)=0{,}10$;

$P(B)=0{,}10 \to P(D/B)=0{,}20$.

$P(C)=0{,}10 \to P(D/C)=0{,}05$.

(i) La probabilidad de coger una pieza defectuosa será:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C) =$$

$$= 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 + 0{,}10 \cdot 0{,}05 = 0{,}105 \to 10{,}5\ \%$$

(ii)) Por Bayes,

$$P(A/D)=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0{,}80\cdot 0{,}10}{0{,}105}=\frac{80}{105}\approx 0{,}7619 \to 76{,}19\ \%$$

21. La Rioja, junio 2023

10.– (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años;

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

Solución:

La variable normal $X \sim N(26, 5)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-26}{5}$.

Con esto:

(i) $P(X\geq 31)=P\left(Z\geq\frac{31-26}{5}\right)=P(Z\geq 1)=1-P(Z<1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

(ii) $P(21<X<31)=P\left(\frac{21-26}{5}<Z<\frac{31-26}{5}\right)=P(-1<Z<1) =$

$= P(Z<1)-P(Z<-1)=P(Z<1)-(1-P(Z<1)) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$.

22. Madrid, junio 2023

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C \mid A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} \mid D) = 0.2$ y $P(D \mid A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

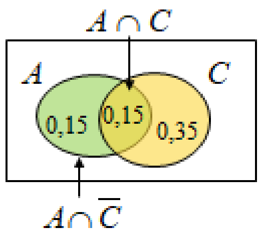
Solución:

Si los sucesos A y B son independientes, entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,3\cdot 0,5=0,15$.

Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=0,3+0,5-0,15=0,65$.

b) Como $P(C/A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)} \Rightarrow$

$$0,5=\frac{P(A\cap C)}{0,3} \Rightarrow P(A\cap C)=0,15.$$

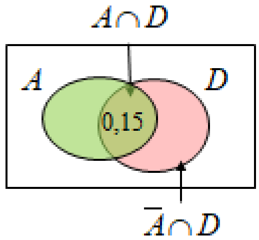


Luego, $P(A\cap \overline{C})=P(A)-P(A\cap C)=0,3-0,15=0,15$.

c) Considerando otro diagrama de Venn, se tiene que:

$$P(D)=P(A\cap D)+P(\overline{A}\cap D) \Rightarrow$$

$$P(\overline{A}\cap D)=P(D)-P(A\cap D).$$



Por $P(A\cap D)=P(A)\cdot P(D/A) \Rightarrow P(A\cap D)=0,3\cdot 0,5=0,15$.

Por $P(\overline{A}/D)=\dfrac{P(\overline{A}\cap D)}{P(D)} \Rightarrow 0,2=\dfrac{P(D)-0,15}{P(D)} \Rightarrow$

$$0,2P(D)=P(D)-0,15 \Rightarrow P(D)=\frac{15}{80}=0,1875.$$

23. Madrid, junio 2023

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

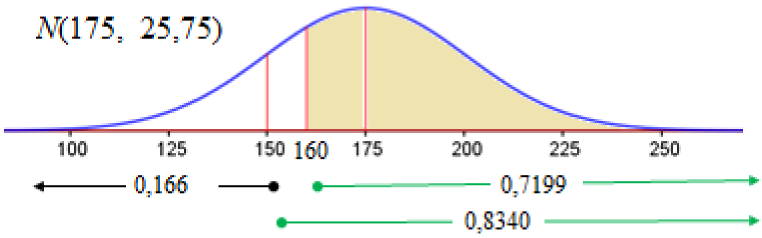
Solución:

La variable X que mide la longitud de esas sardinas se ajusta a la distribución normal $N(175,\ 25{,}75)$, en mm. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-175}{25,75}$.

Con esto:

a) $P(X>160) = P\left(Z > \dfrac{160-175}{25,75}\right) = P(Z > -0{,}5825) = P(Z < 0{,}5825) = 0{,}7199$.

(Se ha interpolado, teniendo en cuenta que $P(Z<0{,}58)=0{,}7190$ $P(Z<0{,}59)=0{,}7224$).



b) $P(t<X<175) = P\left(\dfrac{t-175}{25,75} < Z < 0\right) = 0{,}18 \Rightarrow P(X<0) - P\left(\dfrac{t-175}{25,75} < Z\right) = 0{,}18 \Rightarrow$

$0{,}5 - P\left(\dfrac{t-175}{25,75} < Z\right) = 0{,}18 \Rightarrow P\left(\dfrac{t-175}{25,75} < Z\right) = 0{,}32 \Rightarrow \dfrac{t-175}{25,75} \approx -0{,}47 \Rightarrow t \approx 162{,}90$.

c) La probabilidad de que una sardina supere los 150 mm es:

$P(X>150) = P\left(Z > \dfrac{150-175}{25,75}\right) \approx P(Z > -0{,}97) = P(Z < 0{,}97) = 0{,}8340$.

El suceso "al menos una sardina no supere los 150 mm entre 10" es el contrario del suceso "las 10 sardinas superan los 150 mm".

Por tanto:

P(al menos una de las 10 no supere los 150 mm) = 1 – P(las 10 superan los 150 mm) =
= 1 – $(0{,}8340)^{10}$ = 0,8372.

24. Murcia, junio 2023

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

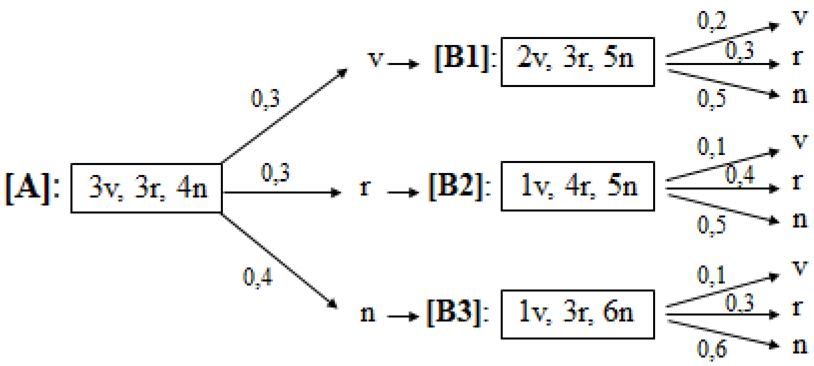
b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Solución:
Sean los sucesos:
v = bola verde; n = bola negra; r = bola negra.
[A] : [3v, 3r, 4n] = urna A; [B] : [1v, 3r, 5n] = urna B.

Si en la extracción de A la bola es verde, la urna B tendrá la composición [B1]: [2v, 3r, 5n].
Si en la extracción de A la bola es roja, la urna B tendrá la composición [B2]: [1v, 4r, 5n]
Si en la extracción de A la bola es negra, la urna B tendrá la composición [B3]: [1v, 3r, 6n]

En el diagrama de árbol que sigue se indica el experimento y las probabilidades de las sucesivas extracciones de bola.



a) Si la bola que se saca de A es verde, entonces se forma la urna B1.
En este caso, $P(n) = 0,5 \to P(\text{n en B/v en A}) = 0,5$

b) Por la probabilidad total,
$$P(n) = P(\text{v en A}) \cdot P(\text{n en B/v en A}) + P(\text{r en A}) \cdot P(\text{n en B/r en A}) + P(\text{n en A}) \cdot P(\text{n en B/n en A})$$
$= 0,3 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,54.$

c) Por la probabilidad condicionada,
$$P(\text{v en A/n en B}) = \frac{P(\text{v en A}) \cdot P(\text{n en B/v en A})}{P(n)} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,54} = \frac{15}{54} \approx 0,28.$$

25. Murcia, junio 2023

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial, con n = 100 y p = 0,5. Esto es, $X \sim B(100,\ 0{,}5)$.

b) La distribución binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siendo $q = 1 - p$.

c) Mediante la binomial:

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0{,}5^{60} \cdot 0{,}5^{40} = 0{,}010844.$$

También se puede calcular aproximando el resultado mediante la normal

$$N\left(100 \cdot 0{,}5,\ \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}\right) \to N(50,\ 5) \to \text{Se tipifica haciendo el cambio } Z = \frac{X - 50}{5}.$$

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X = 60) = P(59{,}5 < X' < 60{,}5) = P\left(\frac{59{,}5 - 50}{5} < Z < \frac{60{,}5 - 50}{5}\right) =$$

$$= P(1{,}9 < Z < 2{,}1) = P(Z < 2{,}1) - P(Z < 1{,}9) = 0{,}9821 - 0{,}9713 = 0{,}0108.$$

(Puede observarse que la aproximación es muy buena).

d) $$P(X \geq 55) = P(X' > 54{,}5) = P\left(Z > \frac{54{,}5 - 50}{5}\right) = P(Z > 0{,}9) = 1 - P(Z < 0{,}9) =$$

$$= 1 - 0{,}8159 = 0{,}1841.$$

26. País Vasco, junio 2023

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

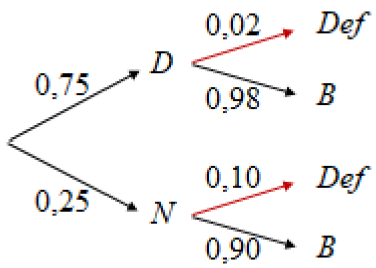
a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Solución:

Se designa por *D* el turno de día; por *N*, el de noche; por *Def* el suceso la pieza es defectuosa; por *B* su contrario, la pieza es buena.

Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto.



a) La probabilidad de que una pieza, elegida al azar, sea defectuosa, es:

$$P(Def) = P(D) \cdot P(Def / D) + P(N) \cdot P(Def / N) =$$

$$= 0,75 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,10 = 0,04.$$

b) Por Bayes,

$$P(D / Def) = \frac{P(D \cap Def)}{P(Def)} = \frac{0,75 \cdot 0,02}{0,04} = \frac{15}{40} = 0,375.$$

27. País Vasco, junio 2023

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

Solución:

Se trata de una distribución normal $X \sim N(65, 18)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-65}{18}$.

Si a = puntuación mínima del nivel avanzado; m = puntuación mínima del nivel medio; i = puntuación máxima del nivel inicial, se sabe:

$$P(X > a) = 0{,}15;\ P(X < i) = 0{,}20;\ P(i < X < a) = 0{,}65.$$

Por tanto:

$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-65}{18}\right) = 0{,}15 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-65}{18}\right) = 0{,}85 \Rightarrow$ Tabla normal $\rightarrow \dfrac{a-65}{18} = 1{,}04 \Rightarrow a = 83{,}72$.

$P(X < i) = P\left(Z < \dfrac{i-65}{18}\right) = 0{,}20 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{65-i}{18}\right) = 0{,}80 \Rightarrow$ Tabla normal $\rightarrow$
$\dfrac{65-i}{18} = 0{,}84 \Rightarrow i = 49{,}88$.

El nivel medio se consigue con una puntuación perteneciente al intervalo (49,88, 83,72).

a) Una puntuación de 85,5 puntos está en el nivel avanzado.

b) Una puntuación de 48 puntos está en el nivel inicial.

En la gráfica se precisan estos resultados.