PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EvAU–EBAU–PEBAU… DE 2022

En las páginas que siguen están resueltos todos los problemas propuestos en los exámenes de Acceso a la Universidad, (antigua *Selectividad*), del curso 2021/2022 en las convocatorias de junio (ordinaria) o julio y septiembre (extraordinaria). En total son 51 problemas.
En cuatro distritos universitarios (Andalucía, Cataluña, Comunidad Valenciana y Navarra) no se propusieron problemas de este bloque.

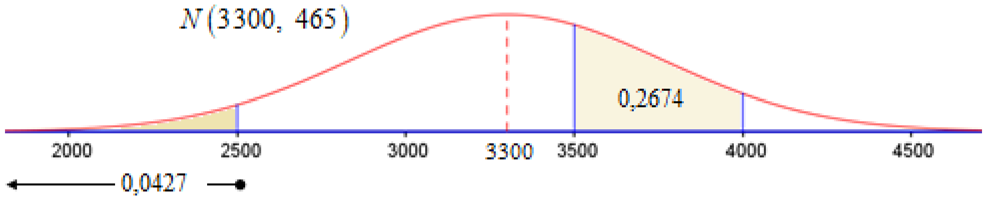
Los problemas que con mayor frecuencia se plantean están relacionados con las siguientes cuestiones:
1) Probabilidad elemental: unión e intersección de sucesos; contrarios; sucesos dependientes e independientes. Uso de diagramas de Venn.
2) Probabilidad total; Bayes… Elaboración de diagramas de árbol o de tablas de contingencia.
3) Distribución binomial. Cálculo de probabilidades asociadas. Ajuste de una binomial mediante una normal; corrección de continuidad.
4) Distribución normal. Cálculo de probabilidades asociadas; uso de la tabla normal estándar. Valor de Z correspondiente a una probabilidad dada.

1. Aragón, junio 2022

10) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

Solución:
El peso de los recién nacidos se distribuye como una $N(3300, 465)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X - 3300}{465}$.
Con esto:

a) $P(X < 2500) = P\left(Z < \frac{2500-3300}{465}\right) = P(Z < -1,72) = 1 - P(Z < 1,72)$ = 1 – 0,9573 = 0,0427.



b) $P(3500 < X < 4000) = P\left(\frac{3500-3300}{465} < Z < \frac{4000-3300}{465}\right) = P(0,430 < Z < 1,505)$ =
= $P(Z < 1,505) - P(Z < 0,430)$ = 0,9338 – 0,6664 = 0,2674.

2. Aragón, extraordinaria 2022

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

Solución:
Se definen los sucesos: DC = "danza clásica"; CB = "cabaret"; T = "teatro".
Se conocen las probabilidades:

$$P(DC)=0{,}17;\ P(CB)=0{,}45;\ P(DC\cap CB)=0{,}05.$$

a) La probabilidad de que practique algún tipo de danza es:

$$P(DC\cup CB)=P(DC)+P(CB)-P(DC\cap CB) = 0{,}17 + 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}57.$$

b) Practicar solo teatro es el suceso contrario de practicar algún tipo de danza. Luego,

$$P(T)=1-P(DC\cup CB) = 1 - 0{,}57 = 0{,}43.$$

3. Aragón, extraordinaria 2022

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).
b) (1 punto)
  1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.
  2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

Solución:
La variable aleatoria X que mide el número de huevos no aptos entre 5 seleccionados al azar, se comporta como una binomial $B(5, 0{,}2)$: $n = 5$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Con esto:

a) La probabilidad de desechar "al menos 1" es la contraría de "ningún huevo es apto". Vale:

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232.$$

b1) $P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3 = 10\cdot 0{,}04\cdot 0{,}512=0{,}2084.$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2 = 10\cdot 0{,}008\cdot 0{,}64=0{,}0512.$$

Es más probable que haya 2 huevos no aptos que 3 no aptos.

b2) Si en 5 huevos hay 2 no aptos $\Rightarrow$ hay 3 que son aptos $\rightarrow$ suceso *MMAAA*.
Si en 5 huevos hay 3 no aptos $\Rightarrow$ hay 2 que son aptos $\rightarrow$ suceso *MMMAA*.
Como es más probable que un huevo sea apto ($P(A) = 0{,}8$) que no apto ($P(M) = 0{,}2$), es más probable el suceso *AAAMM* que el suceso *AAMMM*.

4. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Solución:

Las cartas de copas se denotan por *c*; las de bastos, por *b*.

Se definen los sucesos:

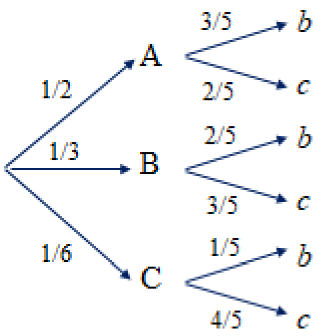
A = "sobre A" = [2c, 3b]; B = "sobre B" = [3c, 2b]; C = "sobre C" = [4c, 1b];

Las probabilidades de estos sucesos son:

$$P(A) = P(\text{par al lanzar un dado}) = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = P(4 \text{ o } 6 \text{ al lanzar un dado}) = \frac{1}{3};$$

$$P(C) = P(2 \text{ al lanzar un dado}) = \frac{1}{6}.$$



En el diagrama de árbol adjunto se indican todas las probabilidades asociadas al experimento.

a) Por la probabilidad total, la probabilidad de obtener una carta de bastos será:

$$P(b) = P(A) \cdot P(b/A) + P(B) \cdot P(b/B) + P(C) \cdot P(b/C) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Por tanto, la probabilidad de que la carta sea de copas es:

$$P(c) = 1 - P(b) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

b) Por la fórmula de la probabilidad condicionada (Bayes):

$$P(B/c) = \frac{P(B \cap c)}{P(c)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.$$

5. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

Solución:

La variable aleatoria $N(70, 10)$ se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-70}{10}$.

Con esto:

a) $$P(65 < X < 75) = P(X < 75) - P(X < 65) = P\left(Z < \frac{75-70}{10}\right) - P\left(Z < \frac{65-70}{10}\right) =$$
$$P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}5) = P(Z < 0{,}5) - (1 - P(Z < 0{,}5)) = 0{,}6915 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}3830$$

b) Para el nuevo valor de μ se sabe que,
$$P(X < 75) = P\left(Z < \frac{75-\mu}{10}\right) = 0{,}60 \Rightarrow \frac{75-\mu}{10} = 0{,}25 \Rightarrow \mu = 75 - 2{,}5 = 72{,}5.$$

Nota: El plan de comida sana debe estar mal diseñado (o la pregunta mal hecha). Además, hay un error en el enunciado, pues F(0,15) debería ser 0,5596.

6. Asturias, extraordinaria 2022

BLOQUE 4.A En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

(b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

(c) **(1.25 puntos)** Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

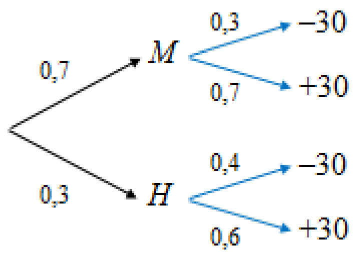
Solución:
Con los datos del problema se puede construir el diagrama de árbol adjunto.
Se designa por: *M*, ser mujer; *H*, ser hombre; –30, tener menos de 30 años.

Las probabilidades de cada suceso son las que se indican:

$P(M)=0,7 \Rightarrow P(H)=1-0,7=0,3;$

$P(-30/M)=0,3 \Rightarrow P(+30/M)=0,7;$

$P(-30/H)=0,4 \Rightarrow P(+30/H)=0,6;$



Con esto:

a) Por la probabilidad total:

$P(-30)=P(M)\cdot P(-30/M)+P(H)\cdot P(-30/H)=0,7\cdot 0,3+0,3\cdot 04=0,33.$

Por tanto, $P(+30)=1-0,33=0,67$.

b) La probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años es:

$P(H\cap(+30))=P(H)\cdot P(+30/H)=0,3\cdot 0,6=0,18.$

c) Aplicando Bayes,

$$P(H/+30)=\frac{P(H)\cdot P(+30/H)}{P(+30)}=\frac{0,3\cdot 0,6}{0,67}=\frac{18}{67}.$$

Nota: Si a cada persona que entra en la oficina del ayuntamiento se le asigna un número, ¿podría contestarse en todos los casos que la probabilidad pedida es 1?

7. Asturias, extraordinaria 2022

BLOQUE 4.B Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1.85m?

(c) **(1 punto)** Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

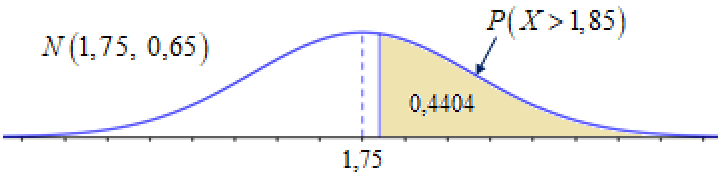
(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.1538) = 0.5596$, $F(0.65) = 0.7422$, $F(0.385) = 0.65$.)

Solución:

La normal es $N(1{,}75,\ 0{,}65)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 1{,}75}{0{,}65}$.

a) $P(X > 1{,}85) = P\left(Z > \dfrac{1{,}85 - 1{,}75}{0{,}65}\right) = P(Z > 0{,}15) = 1 - P(Z < 0{,}1538) =$

$= 1 - 0{,}5596 = 0{,}4404$.



b) Entre 10000 personas se espera que $0{,}4404 \cdot 10000 = 4404$ midan más de 1,85 metros.

c) Para el nuevo valor de σ se sabe que,

$$P(X > 1{,}90) = 0{,}65 \Rightarrow P\left(\dfrac{1{,}90 - 1{,}75}{\sigma}\right) = 0{,}65 \Rightarrow \dfrac{1{,}90 - 1{,}75}{\sigma} = 0{,}385 \Rightarrow \sigma \approx 0{,}39 \text{ m.}$$

8. Baleares, ordinaria 2022

7. Donats dos esdeveniments A i B, es coneixen les probabilitats següents: $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.4$ i $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58$, on $\bar{A}$ i $\bar{B}$ indiquen els esdeveniments contraris (o complementaris) de A i B, respectivament. Calculau les probabilitats següents:

(a) $P(\bar{A})$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$. Són A i B esdeveniments independents? (4 punts)

(b) $P(A \cup B)$. (1 punt)

(c) $P(B \cap \bar{A})$. (3 punts)

(d) $P(A/B)$ i $P(\bar{A}/B)$. (2 punts)

Solución:

a) Si $P(A)=0,7 \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=0,3$;

$$P(\overline{B})=1-P(B) \Rightarrow 0,4=1-P(B) \Rightarrow P(B)=0,6.$$

Como

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,58 \Rightarrow P(A \cap B) = 1-P(\overline{A \cap B}) = 1-0,58 = 0,42.$$

Como $P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 = P(A \cap B)$, los sucesos A y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,7 + 0,6 - 0,42 = 0,88$.

c) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,42 = 0,18$.

d) Por la probabilidad condicionada,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,42}{0,60} = 0,70:$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,60} = 0,30.$$

9. Baleares, ordinaria 2022

8. El temps de durada de les actualitzacions d'un cert programa antivirus segueix una distribució estadística normal de mitjana 8.8 mesos amb una desviació típica de 3 mesos.

   (a) Quin percentatge de les actualitzacions supera els 10 mesos? (3 punts)

   (b) Quin percentatge de les actualitzacions s'ha mantingut entre 7 i 10 mesos? (3 punts)

   (c) Per a quin valor del paràmetre c es té que l'interval $(8.8 - c, 8.8 + c)$ és l'interval de temps de durada del 98% de les actualitzacions? (4 punts)

Solución:

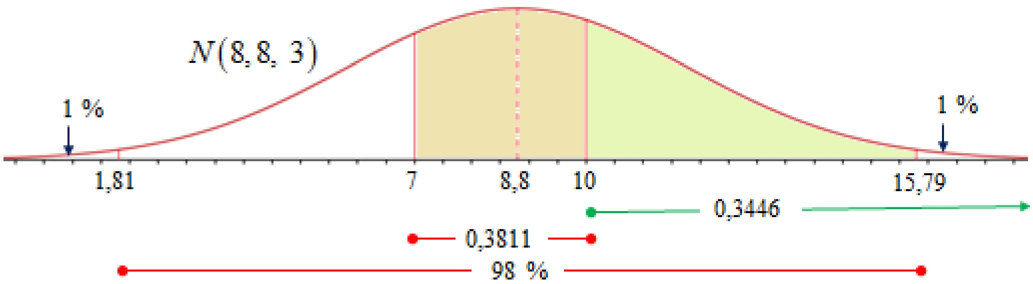
La distribución es $N(8{,}8,\ 3)$, en kg. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 8{,}8}{3}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

(a) $P(X > 10) = P\left(Z > \dfrac{10 - 8{,}8}{3}\right) = P(Z > 0{,}4) = 1 - P(Z < 0{,}4)$ = 1 – 0,6554 = 0,3446

(b) $P(7 < X < 10) = P\left(Z < \dfrac{10 - 8{,}8}{3}\right) - P\left(Z < \dfrac{7 - 8{,}8}{3}\right) = P(Z < 0{,}4) - P(Z < -0{,}6) =$

$= 0{,}6554 - (1 - P(Z < 0{,}6)) = 0{,}6554 - (1 - 0{,}7257) = 0{,}3811.$



(c) Si $P(8{,}8 - c < X < 8{,}8 + c) = 0{,}98 \Rightarrow P(X < 8{,}8 + c) = 0{,}99 \Rightarrow$

$P\left(Z < \dfrac{8{,}8 + c - 8{,}8}{3}\right) = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{c}{3}\right) = 0{,}99 \Rightarrow \dfrac{c}{3} = 2{,}33 \Rightarrow c = 6{,}99$.

El intervalo pedido es (8,8 – 6,99, 8,8 + 6,99) = (1,81, 15,79).

10. Baleares, extraordinaria 2022

7. Una prova diagnòstica d'una malaltia dona resultat negatiu el 5% de les vegades que s'aplica a un individu que la pateix i dona positiu el 10% de les vegades que s'aplica a un individu que no la pateix. Les estadístiques mostren que la dita malaltia afecta 50 de cada 10000 persones. Si una persona escollida a l'atzar se sotmet a la prova diagnòstica, calculau les probabilitats següents:

(a) Que un individu no pateixi la malaltia. (1 punt)

(b) Que la prova doni resultat positiu. (3 punts)

(c) Que la persona no pateixi la malaltia, si el resultat de la prova és negatiu. (3 punts)

(d) Que el resultat de la prova sigui erroni. (3 punts)

Solución:

Si se designa por:

[–] = resultado de la prueba es negativa; [+] = resultado positivo;

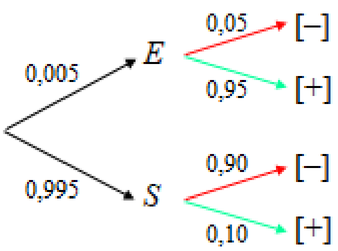
E = persona enferma; *S* = persona sana.

Se tienen (o deducen) las siguientes probabilidades:

$P(-/E)=0,05 \Rightarrow P(+/E)=0,95;$

$P(+/S)=0,10 \Rightarrow P(-/S)=0,90;$

$P(E)=\frac{50}{10000}=0,005 \Rightarrow P(S)=0,995.$



Esto permite confeccionar el diagrama de árbol adjunto.

a) La probabilidad de que un individuo no padezca la enfermedad es $P(S)=0,995$.

b) $P(+)=P(E)\cdot P(+/E)+P(S)\cdot P(+/S)$ = 0,005 · 0,95 + 0,995 · 0,10 = 0,10425.

Por tanto, $P(-)=1-P(+)=0,89575$.

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(S/-)=\frac{P(S)\cdot P(-/S)}{P(-)}=\frac{0,995\cdot 0,90}{0,89575}=0,9997.$$

d) $P(Error)=P(E)\cdot P(-/E)+P(S)\cdot P(+/S)$ = 0,005 · 0,05 + 0,995 · 0,10 = 0,09975.

11. Baleares, extraordinaria 2022

8. Es tenen tres urnes A, B i C. L'urna A conté 4 bolles vermelles i 2 bolles negres. L'urna B conté 3 bolles vermelles i 3 bolles negres. L'urna C conté 6 bolles negres. S'escull una urna a l'atzar i s'extreuen dues bolles de manera consecutiva i sense reemplaçament.

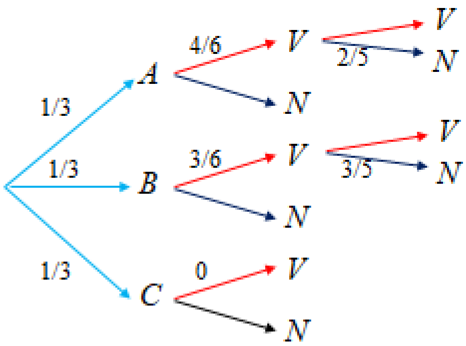
   (a) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella. (3 punts)

   (b) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella i la segona sigui negra. (3 punts)

   (c) Sabent que la primera bolla extreta és vermella, calculau la probabilitat que la segona sigui negra. (4 punts)

Solución:

Las probabilidades de cada urna y las del color de la 1ª y 2ª bola se muestran en el diagrama siguiente.



Con esto:

a) $P(1^aV)=P(A)\cdot P(V/A)+P(B)\cdot P(V/B)+P(C)\cdot P(V/C)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{7}{18}.$$

b) $P(1^aV,2^aV)=P(A)\cdot P(V/A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot P(V/B)\cdot P(N/B)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{90}.$$

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(2^aN/1^aV)=\frac{P(1^aV,2^aN)}{P(1^aV)}=\frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}}=\frac{17}{35}.$$

12. Islas Canarias, ordinaria 2022

4A. Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:

- El 38% son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera
- El 29% son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33% son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

a) Construye el árbol de probabilidades — 0.5 ptos

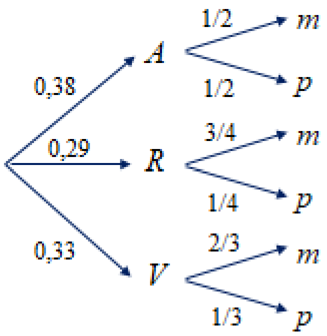
b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera — 1 pto

c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo? — 1 pto

Solución:

a) Los sucesos A, R y V, designan bola azul, roja y verde, respectivamente.
Con m y p se designa que la bola es de madera o de plástico, también respectivamente.

Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol de la derecha.



b) La probabilidad de que la bola sea de madera es;

$$P(m) = P(A)\cdot P(m/A) + P(R)\cdot P(m/R) + P(V)\cdot P(m/V) =$$
$$= 0,38 \cdot 0,50 + 0,29 \cdot 0,75 + 0,33 \cdot 2/3 = 0,6275.$$

En consecuencia, la probabilidad de que la bola sea de plástico será:

$$P(p) = 1 - P(m) = 1 - 0,6275 = 0,3725.$$

c) Por la probabilidad condicionada (Bayes), la probabilidad de que la bola extraída sea roja si se sabe que es de plástico, es

$$P(R/p) = \frac{P(R)\cdot P(p/R)}{P(p)} = \frac{0,29\cdot 0,25}{0,3725} = 0,1946.$$

13. Islas Canarias, ordinaria 2022

4B. El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos 1 pto

b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1 0.75 ptos

c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80% de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo 0.75 ptos

Solución:

a) La variable X que mide el número de periódicos vendidos se distribuye como una normal $N\left(30,\ \sqrt{2}\right)$, que se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-30}{\sqrt{2}}$.

Con esto:

$$P(28 < X < 31) = P\left(\frac{28-30}{\sqrt{2}} < Z < \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) = P(-1,41 < Z < 0,71) =$$

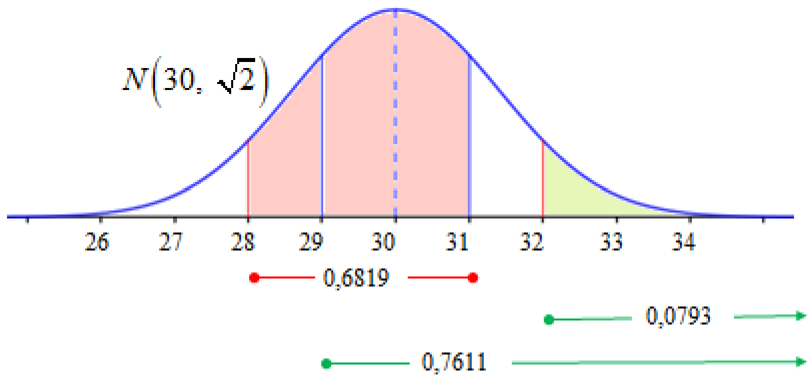
$$= P(Z < 0,71) - P(Z < -1,41) = 0,7611 - (1 - 0,9207) = 0,6819.$$

b) $P(X > 32) = P\left(Z > \dfrac{32-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 1,41) = 1 - P(Z < 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793.$

Sí, la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1.

c) $P(X > 29) = P\left(Z > \dfrac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > -0,71) = P(Z < 0,71) = 0,7611.$

Como una probabilidad de 0,7611 se corresponde con un 76,11 % el quiosquero no está en lo cierto.



14. Islas Canarias, extraordinaria 2022

4A. El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto

c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo? 0.5 ptos

Solución:

La probabilidad de que una persona tenga alergia a la flor del olivo es p = 0,1; la de no ser alérgica será, q = 0,90.

a) Si se seleccionan 100 individuos, el número de ellos, X, que son alérgicos puede medirse como una binomial $B(100, 0{,}1)$: n = 100; p = 0,1; q = 0,9.

Como la binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, puede aproximarse mediante la normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right)$. Esta aproximación puede realizarse cuando n es grande y tanto np como nq son mayores que 5.

En este caso, como $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$, la $B(100, 0{,}1)$ se aproxima por la $N(10, 3)$ que, a su vez, se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-10}{3}$.

Con esto:

$$P(X>12) = P(X'>12{,}5) = P\left(Z > \frac{12{,}5-10}{3}\right) = P(Z>0{,}83) = 1 - P(Z<0{,}83) =$$

= 1 – 0,7967 = 0,2033.

Se ha realizado la corrección de continuidad.

b) Si n = 400:

$$B(400, 0{,}1) \to N\left(400 \cdot 0{,}1,\ \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}\right) \to N(40,\ 6) \to Z = \frac{X-40}{6}.$$

Luego:

$$P(X<32) = P(X'<31{,}5) = P\left(Z < \frac{31{,}5-40}{6}\right) = P(Z<-1{,}42) = 1 - P(Z<1{,}42) =$$

= 1 – 0,9222 = 0,0778.

c) Si n = 500, la media de alérgicos será 500 · 0,1 = 50. Por tanto, hay que esperar que 450 no tengan alergia.

15. Islas Canarias, extraordinaria 2022

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos? 1 pto

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: “En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos” 1 pto

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos? 0.5 ptos

Solución:

La variable X que estudia el número de análisis que resultan erróneos puede estudiarse como una binomial $B(10, 0{,}08)$: $n = 10$; $p = 0{,}08$; $q = 0{,}92$ (La probabilidad de que un análisis sea correcto es $1 - 0{,}08 = 0{,}92$).

Con esto:

a) $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}08^3\cdot 0{,}92^7=120\cdot 0{,}000512\cdot 0{,}557846601\approx 0{,}03427$.

b) $P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$

$= 1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}08^0\cdot 0{,}92^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0{,}08^1\cdot 0{,}92^9-\binom{10}{2}\cdot 0{,}08^2\cdot 0{,}92^8=$

$= 1 - 0{,}434388 - 0{,}377729 - 0{,}147807 = 0{,}040076 \to 4{,}0076$ %.

Efectivamente, hay menos del 5 % de encontrar más de dos análisis erróneos.

c) Si se realizan 10 análisis de esta prueba, cabe esperar que $100 \cdot 0{,}92 = 92$ de ellos sean correctos.

16. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma.
Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Solución:

Se trata de una normal $N(100,\ 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-100}{10}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

A. $P(X>120)=P\left(Z>\dfrac{120-100}{10}\right) = P(Z>2)=1-P(Z<2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$.

B. Un 1 % se corresponde con una probabilidad de 0,01.
Hay que encontrar el valor t, tal que $P(X\leq t)=0{,}99$.

Luego:

$$P\left(Z<\frac{t-100}{10}\right)=0{,}99 \Rightarrow \frac{t-100}{10}=2{,}33 \Rightarrow t=2{,}33\cdot 10+100=123{,}3 \text{ kg.}$$

17. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

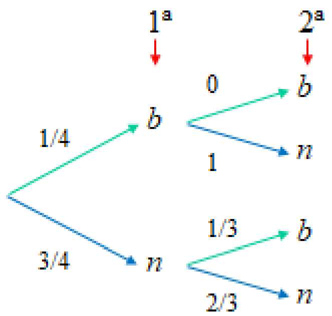
A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

B. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Solución:

Si se designan por b y n los sucesos bola blanca y negra, respectivamente, las probabilidades de extracción de bola (b o n), de una urna con 1 bola blanca y 3 negras, en dos experimentos sucesivos sin devolución, se dan en el diagrama adjunto.



A. Por la probabilidad total, la probabilidad de que las bolas sean de distinto color, suceso bn o nb, será:

$$P(bn, nb)=P(1^a b)\cdot P(2^o n/1^a b)+P(1^a n)\cdot P(2^a b/1^a n) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

B. Las dos bolas deben ser negras, suceso nn:

$$P(nn)=P(1^a n)\cdot P(2^a n/1^a n) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

C. Por la probabilidad condicionada:

$$P\left(2^{\text{a}}n/1^{\text{a}}n\right)=\frac{P(nn)}{P\left(1^{\text{a}}n\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

<u>**18**. Cantabria, extraordinaria 2022</u>

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de T = 70 minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

<u>Solución</u>:

Se trata de una normal $N(60,\ 5)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-60}{5}$.

A. El avión se pierde si $T > 70$.

$$P(T>70)=P\left(Z>\frac{70-60}{5}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)=1-0{,}9772=0{,}0228.$$

B. Un 0,1 % se corresponde con una probabilidad de 0,001.
Hay que encontrar el valor *t*, tal que $P(T\le t)=0{,}999$.
Luego:

$$P\left(Z<\frac{t-60}{5}\right)=0{,}999\ \Rightarrow\ \frac{t-60}{5}=3{,}08\ \Rightarrow\ t=3{,}08\cdot 5+60=75{,}4\ \text{kg}.$$

19. Cantabria, extraordinaria 2021

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad *E*. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad *E*, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.

Se selecciona una persona al azar de dicha población:

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma.

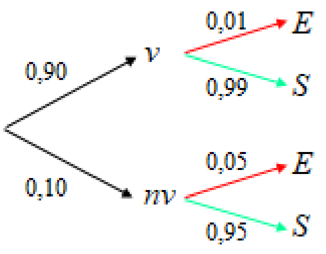
B. [1,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Solución:

Si se designa por:

E = persona enferma; *S* = persona sana.

v = estar vacunada; *nv* = no estar vacunado.



Se tienen (o deducen) las siguientes probabilidades:

$P(v)=0,90 \Rightarrow P(nv)=0,10;$

$P(E/nv)=0,05 \rightarrow P(S/nv)=0,95;$

$P(E/v)=0,01 \rightarrow P(S/v)=0,99;$

Esto permite confeccionar el diagrama de árbol adjunto.

A. La probabilidad de que una persona esté enferma es:

$P(E)=P(v)\cdot P(E/v)+P(nv)\cdot P(E/nv)$ = 0,90 · 0,01 + 0,10 · 0,05 = 0,014.

B. Por la probabilidad condicionada:

$$P(v/E)=\frac{P(v)\cdot P(E/v)}{P(E)}=\frac{0,90\cdot 0,01}{0,014}=0,64.$$

20. Castilla y León, ordinaria 2022

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Una corporación fabrica herramientas de 3 tipos de calidades. Un 10% de calidad Alta; un 70% de calidad Estándar y un 20% de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1%; el 10% y el 30% del total de las herramientas respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa. **(1 punto)**

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar. **(1 punto)**

Solución:

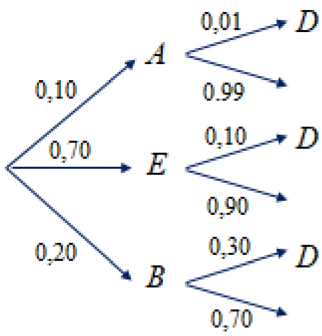
Para los distintos tipos de herramientas se definen los sucesos:
A, "calidad alta"; *E*, "calidad estándar"; *B*, "calidad baja";
D/*A*, *D*/*E* y *D*/*B* designan los sucesos ser defectuosa la herramienta de calidad *A*, *E* y *B*, respectivamente.

Se conocen los siguientes valores de probabilidad:

$$P(A)=0,10;\quad P(E)=0,70;\; P(B)=0,20;$$

$$P(D/A)=0,01;\; P(D/E)=0,10;\; P(D/B)=0,30.$$

En el diagrama de árbol adjunto se indican los distintos sucesos y sus probabilidades.



a) La probabilidad de que una herramienta sea defectuosa será:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(E)\cdot P(D/E)+P(B)\cdot P(D/B)=$$

$$= 0,10 \cdot 0,01 + 0,70 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,30 = 0,131.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(E/D)=\frac{P(E)\cdot P(D/E)}{P(D)}=\frac{0,70\cdot 0,10}{0,131}=\frac{70}{131}\approx 0,534.$$

21. Castilla y León, ordinaria 2022

E10. (Probabilidad y Estadística)

El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? **(1 punto)**

b) Si compramos 500 impresoras ¿Cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? **(1 punto)**

Solución:

Se trata de una distribución normal *N*(1500, 200).
Se tipifica haciendo el cambio

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-1500}{200}.$$

a) $P(X<1000)=P\left(Z<\frac{1000-1500}{200}\right)=P(Z<-2,5)=$

$= 1-P(Z<2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062 \to 0,62\ \%$

b) La probabilidad de que una impresora funcione bien entre 1000 y 2000 horas es:

$$P(1000 < X < 2000) = P\left(\frac{1000-1500}{200} < Z < \frac{2000-1500}{200}\right) = P(-2{,}5 < Z < 2{,}5) =$$

$$= P(Z < 2{,}5) - P(Z < -2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - \left(1 - P(Z < 2{,}5)\right) =$$

$$= -1 - 2 \cdot 0{,}9938 = 0{,}9876.$$

Por tanto, si se compran 500 impresoras, cabe esperar que $500 \cdot 0{,}9876 = 493{,}8$ tendrán la primera avería en ese intervalo de tiempo.

22. Castilla y León, extraordinaria 2022

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

- El 28% de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.
- El 24% son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.
- El 48% son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R= "ser ruso", E= "ser estadounidense", M= "no ser ruso ni estadounidense" y GM = "ser gran maestro"

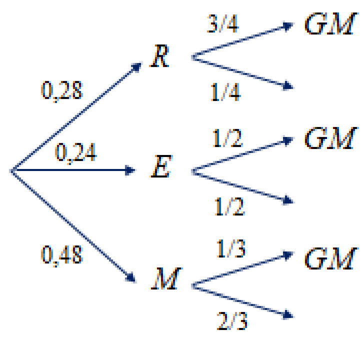
a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R)$, $P(GM/E)$ y $P(GM/M)$. **(0,3 puntos)**

b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro. **(0,7 puntos)**

c) Si se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso? **(1 punto)**

Solución:

a) En el diagrama de árbol adjunto se indican los diferentes sucesos y sus respectivas probabilidades.



Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(GM/R) = \frac{3}{4};\ P(GM/E) = \frac{1}{2};\ P(GM/M) = \frac{1}{3}.$$

b) Por tanto, por la expresión de la probabilidad total, la probabilidad de que un participante elegido al azar sea un gran maestro, será:

$$P(GM) = P(R)\cdot P(GM/R) + P(E)\cdot P(GM/E) + P(M)\cdot P(GM/M) =$$

$$= 0{,}28\cdot\frac{3}{4} + 0{,}24\cdot\frac{1}{2} + 0{,}48\cdot\frac{1}{3} = 0{,}49.$$

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(R/GM) = \frac{P(R)\cdot P(GM/R)}{P(GM)} = \frac{0{,}21}{0{,}49} \approx 0{,}429.$$

<u>**23**. Castilla y León, extraordinaria 2022</u>

E10.- (Probabilidad y Estadística)

La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1.1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"? **(1 punto)**

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2.9 cpg? **(1 punto)**

<u>Solución</u>:

Se trata de una distribución normal $N(2, 1)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{1}$.

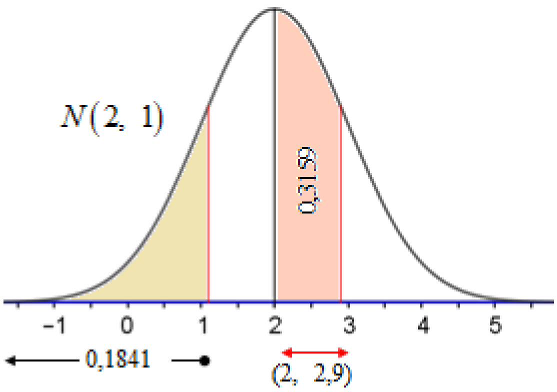
a) $P(X < 1{,}1) = P\left(Z < \frac{1{,}1-2}{1}\right) = P(Z < -0{,}9) = 1 - P(Z < 0{,}9)$ = 1 – 0,8159 = 0,1841.

El 18,41 % de esa población tiene problemas visuales graves.

b) $P(2 < X < 2{,}9) = P\left(\frac{2-2}{1} < Z < \frac{2{,}9-2}{1}\right) = P(0 < Z < 0{,}9) =$

$= P(Z < 0{,}9) - P(Z < 0) = 08159 - 0{,}5 = 0{,}3159$.

El 31,59 % de esa población tendrá una agudeza visual entre 2 y 2,9 cpg.



24. Castilla–La Mancha, ordinaria 2022

7. *b*) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

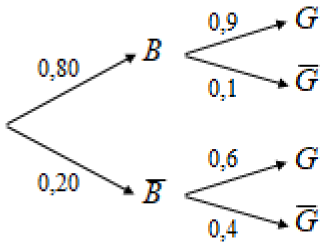
b.1) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:

La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto.
Las letras *B* y *G* indican los sucesos "juega Benceno" y "ganar".
Sus contrarios son $\overline{B}$ y $\overline{G}$.
Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(B)=0,8 \to P(G/B)=0,9;$$

$$P(\overline{B})=0,8 \to P(G/\overline{B})=0,6.$$



a.1) La probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido será:

$$P(G)=P(B)\cdot P(G/B)+P(\overline{B})\cdot P(G/\overline{B}) = 0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,84.$$

b.1) Por Bayes,

$$P(B/G)=\frac{P(B)\cdot P(G/B)}{P(G)}=\frac{0,8\cdot 0,9}{0,84}=\frac{72}{84}\approx 0,857.$$

25. Castilla–La Mancha, ordinaria 2022

8. *a*) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

Solución:

a) La variable *X* que mide el número de niños con intolerancia alimentaria se comporta como una binomial *B*(4, 0,2).
Mesas de 4 comensales, *p* = 1/5 = 0,20; *q* = 1 – 0,20 = 0,80.
Con esto:

a.1) La probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria es:

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904.$$

a.2) La probabilidad de que en una mesa haya que servir pan sin gluten será 0,5904, la que hay de que en esa mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria; por tanto, la distribución que mide el número de mesas, *M*, a las que hay que servir plan sin gluten puede estudiarse como una binomial *B*(8, 0,5904), pues se consideran 8 mesas.

Por tanto,

$$P(M \geq 1) = 1 - P(M = 0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0,5906^0 \cdot 0,4096^8 = 1 - 0,00079 = 0,99921.$$

b.1) El peso de los paquetes de arroz sigue una normal $N(985, 25)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 985}{25}$.

b.1) $P(X > 1000) = P\left(Z > \dfrac{1000 - 985}{25}\right) = P(Z > 0,6) = 1 - P(Z < 0,6) =$

$= 1 - 0,7257 = 0,2743.$

b.2) Hay que encontrar el valor *p*, tal que $P(X \geq p) = 0,70$.

Luego:

$$P\left(Z < \frac{p - 985}{25}\right) = 0,30 \Rightarrow \frac{p - 985}{25} = -0,525 \Rightarrow p = -0,525 \cdot 25 + 985 = 971,875 \text{ g.}$$

El valor 0,525 es la media de 0,52 y 0,53, valores de *Z* a los que corresponden probabilidades de 0,6985 y 0,7019, respectivamente.

<u>**26.** Castilla–La Mancha, extraordinaria 2022</u>

7. *b)* **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

<u>Solución</u>:

b) La variable *X* que mide el número de carreras ganadas puede estudiarse como una distribución una binomial $B(4, 0,6)$.

Se consideran 4 carreras, con probabilidad de ganar $p = 0,60$; $q = 1 - 0,60 = 0,40$.

Con esto:

La probabilidad de que gane al menos 2 carreras será:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 - \binom{4}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 =$$

$= 1 - 0,0256 - 0,1536 = 0,8208.$

27. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2022

8. *a)* En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

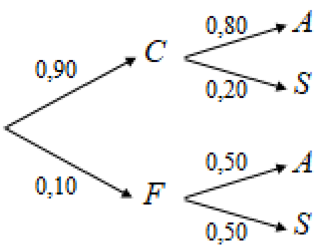
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Solución:

a) La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto. Las letras *C* y *A* indican los sucesos "ir a clase" y "aprobar". Sus contrarios son *F* y *S*, faltar a clase y suspender, respectivamente.



Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(C)=0,90 \to P(A/C)=0,80;$

$P(F)=0,10 \to P(A/F)=0,50.$

a.1) La probabilidad de que un alumno apruebe es:

$P(A)=P(C)\cdot P(A/C)+P(F)\cdot P(A/F)$ = 0,9 · 0,8 + 0,1 · 0,5 = 0,77.

Por tanto, la probabilidad de suspender será:

$P(S)=1-P(A)=0,23$.

a.2) Por Bayes,

$$P(F/S)=\frac{P(F)\cdot P(S/F)}{P(S)}=\frac{0,1\cdot 0,5}{0,23}=\frac{5}{23}\approx 0,217.$$

b) El al agua embotellada sigue una distribución normal *N*(150, 5).

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-150}{5}$.

b.1) $P(X>152)=P\left(Z>\frac{152-150}{5}\right)=P(Z>0,4)=1-P(Z<0,4)$ = 1 – 0,6554 = 0,3446.

b.2) $P(149<X<152)=P\left(\frac{149-150}{5}<Z<\frac{152-150}{5}\right)=P(-0,2<Z<0,4)$ =

= $P(Z<0,4)-(1-P(Z<0,2))$ = 0,6554 – (1 – 0,5793) = 0,2347.

28. Extremadura, ordinaria 2022

9. En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celiaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

a) tenga solo una de las dos alergias, (1 punto)

b) sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa. (1 punto)

Solución:
Sean los sucesos: C = ser celiaco; L = ser alérgico a la lactosa.

Se conoce la probabilidad de los siguientes sucesos:

$$P(C)=0{,}10;\ P(L)=0{,}15;\ P(C\cup L)=0{,}20.$$

Como

$$P(C\cup L)=P(C)+P(L)-P(C\cap L)\Rightarrow P(C\cap L)=0{,}10+0{,}15-0{,}20=0{,}05.$$

Esto es, la probabilidad de tener las dos alergias es 0,05.

a) Ser solo celiaco es el suceso $P(C-L)=P(C)-P(C\cap L)=0{,}10-0{,}05=0{,}05$.

Ser alérgico solo a la lactosa es el suceso $P(L-C)=P(L)-P(C\cap L)=0{,}15-0{,}05=0{,}10$.

b) Por la probabilidad condicionada se tendrá:

$$P(C/\overline{L})=\frac{P(C\cap L)}{P(\overline{L})}=\frac{0{,}05}{0{,}85}=\frac{5}{85}\approx 0{,}0588.$$

29. Extremadura, ordinaria 2022

10. Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien

a) cinco preguntas, (0,75 puntos)

b) alguna pregunta. (0,75 puntos)

c) Calcular la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

Solución:
La variable X que mide el número de aciertos puede estudiarse como una distribución binomial $B(10,\ 0{,}25)$, donde la probabilidad de acertar es p = 0,25; y la de fallar, q = 0,75.
Con esto:
a) La probabilidad de contestar bien cinco preguntas será:

$$P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75^5 = 252\cdot 0{,}0002317\ldots = 0{,}0584.$$

b) La probabilidad de acertar alguna pregunta es la contraria de no acertar ninguna, que vale:

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^{10} = 1-0{,}0563 = 0{,}9437.$$

c) La media de la distribución binomial, $B(n,\ p)$, es $\mu=np$; su desviación típica, $\sigma=\sqrt{npq}$.
En este caso: $\mu=np=10\cdot 0{,}25=2{,}5$; $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}=1{,}3693$.

30. Extremadura, extraordinaria 2022

9. El 50 % de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes. (0,75 puntos)

b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running? (0,75 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"? (0,5 puntos)

Solución:

Sean los sucesos:

R = practicar "running"; B = montar en bicicleta;

$R \cup B$ = practicar alguno de los dos deportes.

Se sabe que:

$P(R) = 0,50$; $P(B) = 0,30$; $P(R \cup B) = 0,70$

a) La probabilidad de que un alumno no practique ninguno de los dos deportes es:

$1 - P(R \cup B) = 1 - 0,70 = 0,30$.

b) Por la probabilidad condicionada,

$$P(R/B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)}.$$

Como $P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) \Rightarrow P(R \cap B) = 0,50 + 0,30 - 0,70 = 0,10$,

luego: $P(R/B) = \dfrac{0,10}{0,30} = \dfrac{1}{3}$.

c) Serán independientes si cumplen que $P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$.

Como $P(R) \cdot P(B) = 0,50 \cdot 0,30 = 0,15 \neq P(R \cap B)$, los sucesos no son independientes.

31. Extremadura, extraordinaria 2022

10. El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media $2,5$ cm y desviación típica $0,2$ cm.

a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas? (1 punto)

b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre $2,2$ cm y $2,8$ cm? (1 punto)

Solución:

La variable X, que mide el diámetro de las cerezas se distribuye según la N(3,5, 0,2), en cm.

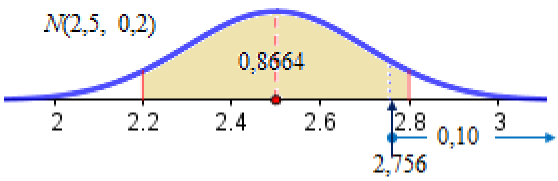
Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-2,5}{0,2}$.

Con esto:

a) Se desea encontrar el diámetro t tal que $P(X<t)=0,90$.

Como $P(X<t)=P\left(Z<\dfrac{t-2,5}{0,2}\right)=0,90 \Rightarrow \dfrac{t-2,5}{0,2}\approx 1,28 \Rightarrow t\approx 2,756$.

El 10 % de las cerezas más grandes debe tener un diámetro superior a 2,756 cm.



b) $P(2,2<X<2,8)=P\left(\dfrac{2,2-2,5}{0,2}<Z<\dfrac{2,8-2,5}{0,2}\right)=P(Z<1,5)-P(Z<-1,5)$ =

= $P(Z<1,5)-(1-P(Z<1,5))=2P(Z<1,5)-1$ = 2 · 0,9332 – 1 = 0,8664.

32. Galicia, ordinaria 2022

7. Estadística y Probabilidad

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

Solución:

a) En general se cumple que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Si los sucesos A y B son incompatibles, entonces $P(A\cap B)=0$, luego:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \Rightarrow \frac{1}{3}=P(A)+\frac{1}{4}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{12}.$$

Si los sucesos A y B son independientes, entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, luego:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}=P(A)+\frac{1}{4}-P(A)\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}P(A)=\frac{1}{12}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{9}.$$

b) Sea CF es el suceso leer ciencia ficción; y NN el suceso leer novela negra.
Se sabe que:

$$P(CF)=0,21,\ P(NN)=0,63,\ P(CF\cap NN)=0,17.$$

- Por la probabilidad condicionada:

$$P(NN/CF)=\frac{P(CF\cap NN)}{P(CF)}=\frac{0,17}{0,21}=\frac{17}{21}.$$

- La probabilidad de que lea ciencia ficción o novela negra es:

$$P(CF\cup NN)=0,21+0,63-0,17=0,67,$$

La probabilidad de no leer ninguno de los dos géneros será:

$$P\left(\overline{CF\cup NN}\right)=1-0,67=0,33.$$

33. Galicia, ordinaria 2022

8. Estadística y Probabilidad

a) Calcule el valor de $P(-2 \le X \le 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \le X \le \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

Solución:

a) La variable X, $N(1, 3)$, se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-1}{3}$.

Con esto:

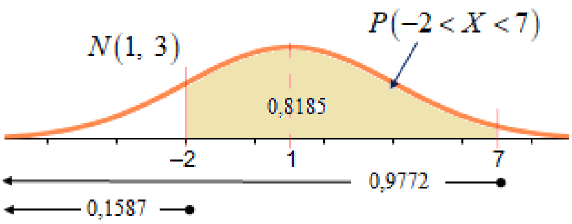
$$P(-2<X<7)=P\left(\frac{-2-1}{3}<Z<\frac{7-1}{3}\right)=$$

$$= P(-1<Z<2)=P(Z<2)-P(Z<-1)=$$

$$= P(Z<2)-(1-P(Z<1)) =$$

= 0,9772 – (1 – 0,8413) =

= 0,9772 – 0,1587 = 0,8185.



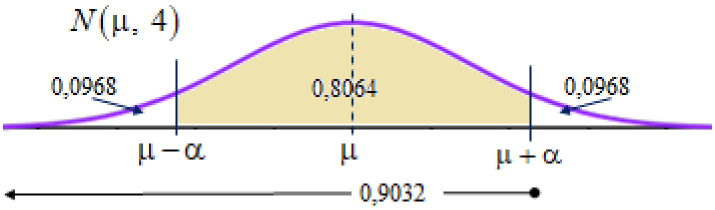
b) La variable X, $N(\mu, 4)$, se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{4}$.

Con esto:

$$P(\mu-\alpha < X < \mu+\alpha) = 0{,}8064 \Rightarrow P(X < \mu+\alpha) - P(X < \mu-\alpha) = 0{,}8064 \Rightarrow$$

$$P\left(Z < \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{4}\right) = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0{,}8064 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}9032 \Rightarrow$$

$\dfrac{\alpha}{4} = 1{,}3 \Rightarrow \alpha = 5{,}2$.



<u>34. Galicia, extraordinaria 2022</u>

7. Estadística y Probabilidad

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

<u>Solución</u>:

a) Para los libros de la biblioteca sean N y C los sucesos "ser una novela" y "ser un clásico", respectivamente.

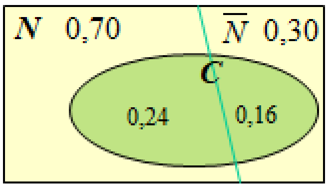
Se sabe que:

$$P(N) = 0{,}70;\ P(C) = 0{,}40;\ P(N/C) = 0{,}60.$$

- Por la probabilidad condicionada, la probabilidad de ser una novela si es un clásico es:

$$P(N/C) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(N \cap C) = P(C) \cdot P(N/C) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24.$$

Luego, la probabilidad de NO ser una novela si es un clásico será:



$$P(\overline{N}/C) = P(C) - P(N \cap C) = 0{,}40 - 0{,}24 = 0{,}16.$$

- La probabilidad de que sea un clásico si es una novela será:

$$P(C/N) = \frac{P(N \cap C)}{P(N)} = \frac{0{,}24}{0{,}70} = \frac{12}{35} \approx 0{,}34.$$

b) La variable X que mide el número de delitos resueltos es una binomial $B(3, 0{,}2)$. (Si la probabilidad de que un delito quede sin resolver es $q = 0{,}8$, la de que sea resuelto será $p = 0{,}8$).

Si se cometieron 3 delitos, la probabilidad de que al menos se resuelva 1 es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}20^0 \cdot 0{,}80^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488.$$

35. Galicia, extraordinaria 2022

8. Estadística y Probabilidad

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

Solución:

a) La distribución binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso, para la binomial $B(60, 0,25)$, se cumple que $np = 60 \cdot 0,25 = 15$ y $nq = 60 \cdot 0,75 = 45$, pues: $n = 60$, es el número de preguntas; $p = 0,25$ la probabilidad de acierto y $q = 0,75$, la de fallar.

Por tanto, la binomial $B(60, 0,25)$ puede estudiarse mediante la distribución normal

$$N\left(60 \cdot 0,25,\ \sqrt{60 \cdot 0,25 \cdot 0,75}\right) \to N(15,\ 3,354).$$

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 15}{3,354}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X \geq 16) = P(X' > 15,5) = P\left(Z > \frac{15,5 - 15}{3,354}\right) = P(Z > 0,149) = 1 - P(Z < 0,149) =$$

$= 1 - 0,5596 = 0,4404$.

(Para obtener 0,5596 se ha elegido $Z = 0,15$).

b) La variable X, $N(25, 2)$, se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 25}{2}$.

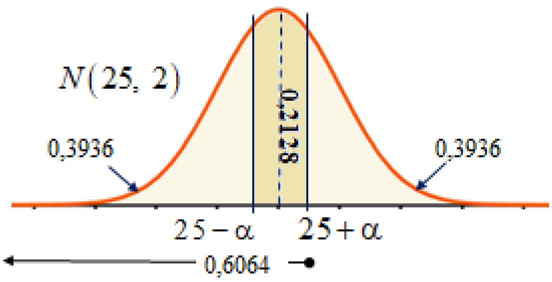
Con esto:

- $P(X < 24) = P\left(Z < \dfrac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$.
- $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P\left(\dfrac{25 - \alpha - 25}{2} < Z < \dfrac{25 + \alpha - 25}{2}\right) = P\left(\dfrac{-\alpha}{2} < Z < \dfrac{\alpha}{2}\right) =$

$$P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{2}\right) = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - 1.$$

Si $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0,2128 \Rightarrow 2P\left(Z < \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0,2128 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0,6064 \Rightarrow$

$\dfrac{\alpha}{2} = 0,27 \Rightarrow \alpha = 0,54$.



36. La Rioja, ordinaria 2022

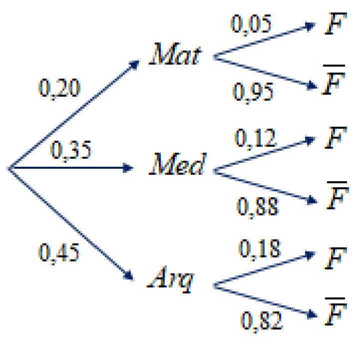
9.– (2 puntos) En un distrito universitario, los estudiantes se distribuyen entre las tres carreras que pueden cursarse del siguiente modo: el 20 % estudian Matemáticas, el 35 % Medicina y el 45 % Arquitectura. El porcentaje de alumnos que finalizan sus estudios en cada caso es del 5 %, 12 % y del 18 %. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:

(i) finalice sus estudios;

(ii) estudie Medicina si no finaliza sus estudios.

Solución:

La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto.
Con *Mat*, *Med* y *Arq* se indican los sucesos estudiar Matemáticas, Medicina y Arquitectura, respectivamente.
Con *F* y $\overline{F}$, que el estudiante finaliza o no sus estudios.



Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(Mat) = 0,20 \to P(F/Mat) = 0,05;$

$P(Med) = 0,35 \to P(F/Med) = 0,12.$

$P(Arq) = 0,45 \to P(F/Arq) = 0,18.$

(i) La probabilidad de que un estudiante finalice sus estudios será:

$$P(F) = P(Mat)\cdot P(F/Mat) + P(Med)\cdot P(F/Med) + P(Arq)\cdot P(F/Arq) =$$

$$= 0,20 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 + 0,45 \cdot 0,18 = 0,133 \to 13,3\ \%$$

Por tanto, la probabilidad de que nos termine será:

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 0,867.$$

(ii)) Por Bayes,

$$P(Med/\overline{F}) = \frac{P(Med)\cdot P(\overline{F}/Med)}{P(\overline{F})} = \frac{0,35\cdot 0,88}{0,867} = \frac{308}{867} \approx 0,355 \to 35,5\ \%$$

37. La Rioja, ordinaria 2022

10.– (2 puntos) Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de a para que:

$$P(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0{,}5934.$$

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

La variable normal $X \sim N(4, 2)$ se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-4}{2}$.

Con esto:

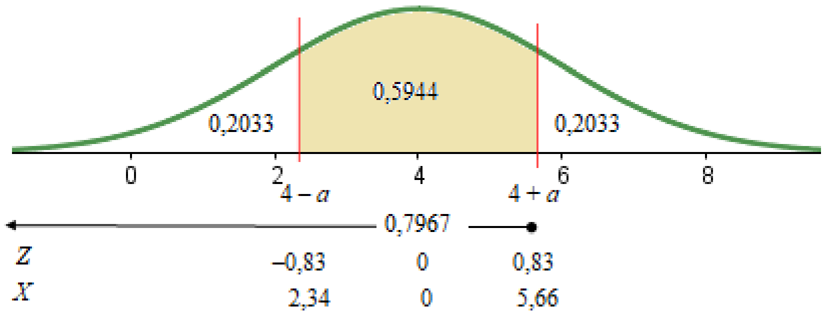
$$P(4-a \leq X \leq 4+a) = P\left(\frac{4-a-4}{2} \leq Z \leq \frac{4+a-4}{2}\right) = P\left(\frac{-a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) =$$

$$P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{2}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - 1.$$

Si $P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0{,}5934 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - 1 = 0{,}5934 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0{,}7967 \Rightarrow$

$$\frac{a}{2} = 0{,}83 \Rightarrow a = 1{,}66.$$

Por tanto, el intervalo $(4 - a, 4 + a) = (2{,}34,\ 5{,}66)$.



38. La Rioja, extraordinaria 2022

9.– (2 puntos) Estudia la posible dependencia de los sucesos A y B, en los siguientes casos:

(i) A y B son incompatibles y ámbos sucesos de probabilidad no nula.

(ii) B está incluido en A, y B es un suceso de probabilidad no nula.

Solución:

En general, dados dos sucesos *A* y *B*, se cumple que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Si los sucesos *A* y *B* son independientes, entonces $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

Si los sucesos *A* y *B* son incompatibles, entonces $P(A\cap B)=0$.

(i) Si los sucesos *A* y *B* son incompatibles, como $P(A\cap B)=0$, si además ambos sucesos tienen probabilidad no nula, se deduce que no es posible que $P(A)\cdot P(B)=0$.

Por tanto, en este caso, no son independientes, pues $P(A\cap B)=0\neq P(A)\cdot P(B)$.

(ii) Si *B* está incluido en *A*, entonces, como $A\cap B=B\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)$.

Por tanto, para que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ es necesario que $P(A)=1$; esto es, que *A* sea el suceso seguro.

Por tanto, en este caso, los sucesos *A* y *B* serán independientes solo si *A* sea el suceso seguro.

39. La Rioja, extraordinaria 2022

10.– (2 puntos) La presión arterial sistólica de una muestra de adolescentes sigue una distribución normal de media 120 años y desviación típica 12. Si se elige un adolescente al azar, halla:

(i) la probabilidad de que su presión arterial sea superior a 132;

(ii) la probabilidad de que su presión arterial esté entre 96 y 144.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

- La errata del enunciado no deja de tener gracia: "adolescentes de media 120 años"; es evidente que sobra la palabra años. Sigo.

La variable normal $X \sim N(120, 12)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-120}{12}$.

Con esto:

(i) $P(X>132)=P\left(Z>\dfrac{132-120}{12}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$.

(ii) $P(96<X<144)=P\left(\dfrac{96-120}{12}<Z<\dfrac{144-120}{12}\right)=P(-2<Z<2)=$

$=P(Z<2)-P(Z<-2)=P(Z<2)-\left(1-P(Z<2)\right)$ = 0,9772 – (1 – 0,9772) = 0,9544.

40. Madrid, ordinaria 2022

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Solución:

La variable X que mide el número de mujeres en Consejos de Administración es una binomial $B(10, 0{,}277)$: $n = 10$; $p = 0{,}277$ es la probabilidad de "éxito"; $q = 1 - p = 0{,}723$ su contraria.

Se sabe que $P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

Con esto:

a) Si la mitad son mujeres, $X = 5$:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}277^5 \cdot 0{,}723^5 = 252 \cdot 0{,}0016308 \cdot 0{,}1975566 \approx 0{,}081188.$$

b) Al menos 1 hombre es el suceso contrario de "las 10 son mujeres":

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}277^{10} \cdot 0{,}723^0 \approx 0{,}00000266.$$

La probabilidad de "al menos1 hombre" será: 1 – 0,00000266 = 0,999997.

→ Casi con toda seguridad habrá al menos 1 hombre.

c) La binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso puede hacerse, pues 200 · 0,277 = 55,4 y 200 · 0,723 = 144,6.

En consecuencia, la binomial $B(200, 0{,}277)$ puede aproximarse mediante la distribución normal $N\left(200 \cdot 0{,}277,\ \sqrt{200 \cdot 0{,}277 \cdot 0{,}723}\right) \to N(55{,}4,\ 6{,}33)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 55{,}4}{6{,}33}$.

El 35 % de 200 son 70.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X \geq 70) = P(X' > 69{,}5) = P\left(Z > \frac{69{,}5 - 55{,}4}{6{,}33}\right) = P(Z > 2{,}23) =$$

$$= 1 - P(Z < 2{,}33) = 1 - 0{,}9871 = 0{,}0129.$$

41. Madrid, ordinaria 2022

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

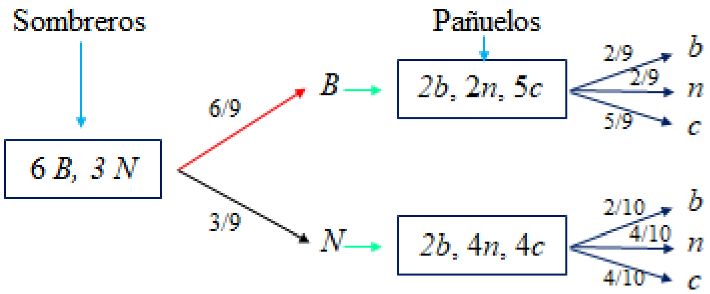
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución:

El experimento se resume en el siguiente diagrama de árbol, done:

B = sombrero blanco; *N* = sombrero negro;

b, *n* y *c* indican pañuelos de color blanco, negro y a cuadros, respectivamente.



a) La probabilidad de que el pañuelo no sea del color del sombrero es:

$$P(\text{distinto color}) = P(B)\cdot P(n,c/B) + P(N)\cdot P(b,c/N) =$$

$$= \frac{6}{9}\cdot\frac{7}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{6}{10} = \frac{97}{135} \approx 0,7185.$$

b) El suceso "al menos uno de los complementos sea de color negro" es el contrario del suceso "ambos complementos son blancos".

P(al menos uno de color negro) = 1 – *P*(sombrero y pañuelo blancos) =

$$= 1 - P(B)\cdot P(b/B) = 1 - \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} = 1 - \frac{12}{81} = \frac{23}{27} \approx 0,8519.$$

c) Por Bayes,

$$P(N/c) = \frac{P(N)\cdot P(c/N)}{P(c)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{68}{135}} = \frac{9}{34} \approx 0,2647.$$

La probabilidad de un pañuelo a cuadros es:

$$P(c) = P(B)\cdot P(c/B) + P(N)\cdot P(c/N) = \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{68}{135}.$$

42. Madrid, extraordinaria 2022

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

La variable X que mide el número de alumnos matriculados en Matemáticas II es una binomial $B(6, 0{,}6)$: $n = 6$; $p = 3/5 = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$.

Se sabe que $P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

Con esto:

a) Para $X = 4$:

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 = 15 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 = 0{,}31104.$$

b) Alguno de ellos es el contrario de ninguno, $X = 0$:

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^6 = 1 - 0{,}004096 = 0{,}995904.$$

c) La binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso puede hacerse, pues $120 \cdot 0{,}6 = 72$ y $120 \cdot 0{,}4 = 48$.

En consecuencia, la binomial $B(120, 0{,}6)$ puede aproximarse mediante la distribución normal $N\left(120 \cdot 0{,}6,\ \sqrt{120 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}\right) \to N(72,\ 5{,}37)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 72}{5{,}37}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X > 60) = P(X' > 60{,}5) = P\left(Z > \frac{60{,}5 - 72}{5{,}37}\right) = P(Z > -2{,}14) = P(Z < 2{,}14) = 0{,}9838.$$

43. Madrid, extraordinaria 2022

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Solución:
Sea E el suceso, el producto se destina a la exportación.
Se sabe que:

$$P(A)=\frac{4}{7} \to P(E/A)=0,4;\ P(B)=\frac{2}{7} \to P(E/B)=0,6;$$

$$P(C)=\frac{1}{7} \to P(E/C)=0,2;$$

a) Por la probabilidad total:

$$P(E)=P(A)\cdot P(E/A)+P(B)\cdot P(E/B)+P(C)\cdot P(E/C)=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot 0,4+\frac{2}{7}\cdot 0,6+\frac{1}{7}\cdot 0,2=\frac{3}{7}\approx 0,4286.$$

b) Por Bayes,

$$P(C/E)=\frac{P(C)\cdot P(E/C)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{15}\approx 0,0667.$$

44. Murcia, ordinaria 2022

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.

b) **[0,75 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución:

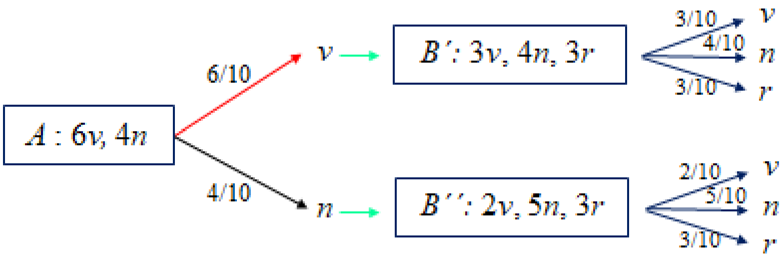
Sean los sucesos:

v = bola verde; n = bola negra; r = bola negra.

A : [6v, 4n] = urna A; B : [2v, 4n, 3r] = urna B.

Si en la extracción de A la bola es verde, la urna B tendrá la composición B' : [3v, 4n, 3r].
Si en la extracción de A la bola es negra, la urna B tendrá la composición B'' : [2v, 5n, 3r]

En el diagrama de árbol que sigue se indica el experimento y las probabilidades de las sucesivas extracciones de bola.



a) Con estos datos, por la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída de B sea roja, será:

$$P(r) = P(B')\cdot P(r/B') + P(B'')\cdot P(r/B'') = \frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{30}{100}.$$

b) Es la probabilidad del suceso: $P(v/B') = \dfrac{3}{10}$.

c) La probabilidad de que la bola extraída de B sea negra, será:

$$P(n) = P(B')\cdot P(n/B') + P(B'')\cdot P(n/B'') = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{44}{100}.$$

45. Murcia, ordinaria 2022

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32% de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) **[1 p.]** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución:

El CI se distribuye según la normal $X \sim N(\mu, \sigma) = N(10\sigma, \sigma)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-10\sigma}{\sigma}$.

Se sabe que $P(X < 115) = 0{,}9332$.

a) Como

$P(X < 115) = P\left(Z < \frac{115-10\sigma}{\sigma}\right) = 0{,}9332 \to$ (por la tabla normal $N(0, 1)$ $\to$

$\frac{115-10\sigma}{\sigma} = 1{,}5 \Rightarrow \sigma = 10 \Rightarrow \mu = 100$.

b) La probabilidad de que un estudiante tenga un CI menor de 115 es $P(X < 115) = 0{,}9332$ $\Rightarrow P(X > 115) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.

En este caso, el experimento puede estudiarse como una binomial $Y \sim B(5, 0{,}0668)$, siendo

$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}0668^3 \cdot 0{,}9332^2 = 0{,}0026$.

46. Murcia, extraordinaria 2022

7: Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **[0,5 p.]** Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **[1 p.]** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **[1 p.]** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Solución:
Sean los sucesos:
C–19 = "contraer COVID–19 en el interior de restaurantes";
H = "ser hombre"; M = "ser mujer".
Se conocen las probabilidades:

$$P(C-19)=0,45 \to P\left(\overline{C-19}\right)=0,55;\ P(H)=0,505;\ P(M)=0,495.$$

a) $P\left(M\cap(C-19)\right)=P(M)\cdot P\left((C-19)/M\right)$ = 0,495 · 0,45 = 0,22275.

b) $P\left(\overline{M}\cup\overline{(C-19)}\right)=P\left(\overline{M\cap(C-19)}\right)$ = 1 – 0,22275 = 0,77725.

c) En este caso, el experimento puede estudiarse como una binomial B(8, 0,45).
Con esto:

$$P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-P(X<4)=$$

$$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=$$

$$=1-\binom{8}{0}\cdot 0,45^0\cdot 0,55^8-\binom{8}{1}\cdot 0,45^1\cdot 0,55^7-\binom{8}{2}\cdot 0,45^2\cdot 0,55^6-\binom{8}{3}\cdot 0,45^3\cdot 0,55^5=$$

= 1 – 0,008373 – 0,054808 – 0,156949 – 0,256826 = 1 – 0,476956 = 0,523044.

47. Murcia, extraordinaria 2022

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) **[0,75 p.]** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) **[1 p.]** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución:

La altura de la población se distribuye según la normal $X \sim N(175, 4)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-175}{4}$.

a) $P(X > 170) = P\left(Z > \dfrac{170-175}{4}\right) = P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = 0,8944$.

b) $P(170 < X < 185) = P\left(\dfrac{170-175}{4} < Z < \dfrac{185-175}{4}\right) = P(-1,25 < Z < 2,5) =$

$= P(X < 2,5) - P(X < -1,25) = P(Z < 2,5) - (1 - P(X < 1,25))$ 0

= 0,9938 – (1 – 0,8944) = 0,8882.

El 88,82 % de la población tiene una altura comprendida entre 170 y 185 cm.

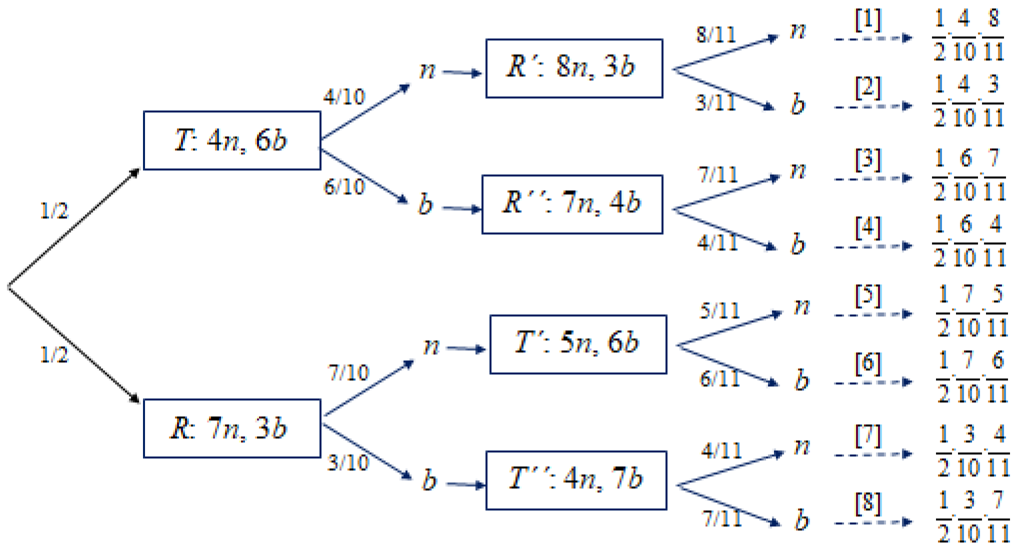
c) Sea a la altura buscada.

$P(X > a) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z > \dfrac{a-175}{4}\right) = 0,33 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-175}{4}\right) = 0,67 \Rightarrow$

$\dfrac{a-175}{4} = 0,44 \Rightarrow a = 176,76$ cm.

<u>**48**. País Vasco, ordinaria 2022</u>
Ejercicio A5
Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:
(a) sean negras,
(b) sean blancas,
(c) sean de distinto color.

<u>Solución</u>:
Se designa por *n* extraer bola negra de cualquier urna; por *b*, que sea blanca.
Las urnas iniciales son:
T: [4*n*, 6*b*]; *R*: [7*n*, 3*b*]
Con los datos del problema se puede confeccionar el siguiente diagrama de árbol.



a) La extracción de dos bolas negras se consigue siguiendo los caminos [1] y [5]. Por la probabilidad total, su valor es:

$$P(n,n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}=\frac{67}{220}.$$

b) La extracción de dos bolas blancas se consigue siguiendo los caminos [4] y [8]. Su valor es:

$$P(b,b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}=\frac{45}{220}.$$

c) La probabilidad extraer una bola de cada color se dan en los caminos [2], [3], [6] y [7], cuya suma es:

$$P(n,b;b,n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{11}=\frac{108}{220}.$$

→ También se puede obtener aplicando la propiedad de la probabilidad del suceso contrario.

49. País Vasco, ordinaria 2022

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendido entre 50 y 69 gramos.

(b) Si el 30 % e las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada. ¿cuánto pesa esta última?

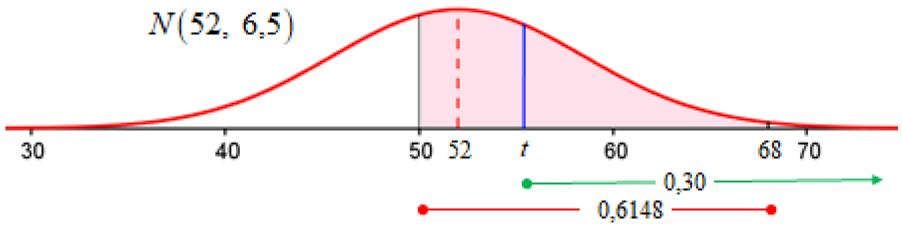
Solución:

La distribución normal $X \sim N(52, 6{,}5)$ se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-52}{6{,}5}$.

Con esto:

a) $P(50 < X < 68) = P\left(\dfrac{50-52}{6{,}5} < Z < \dfrac{68-52}{6{,}5}\right) = P(-0{,}31 < Z < 2{,}46) =$

$= P(Z < 2{,}46) - (1 - P(Z < 0{,}31))$ = 0,9931 – (1 – 0,6217) = 0,6148.



b) Hay que encontrar el valor de t tal que

$P(X > t) = 0{,}30 \Leftrightarrow P(X < t) = 0{,}70 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{t-52}{6{,}5}\right) = 0{,}70 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{t-52}{6{,}5} = 0{,}525 \Rightarrow t = 55{,}4125$.

50. País Vasco, extraordinaria 2022

Ejercicio A5

Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegios una urna al azar y extraemos dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

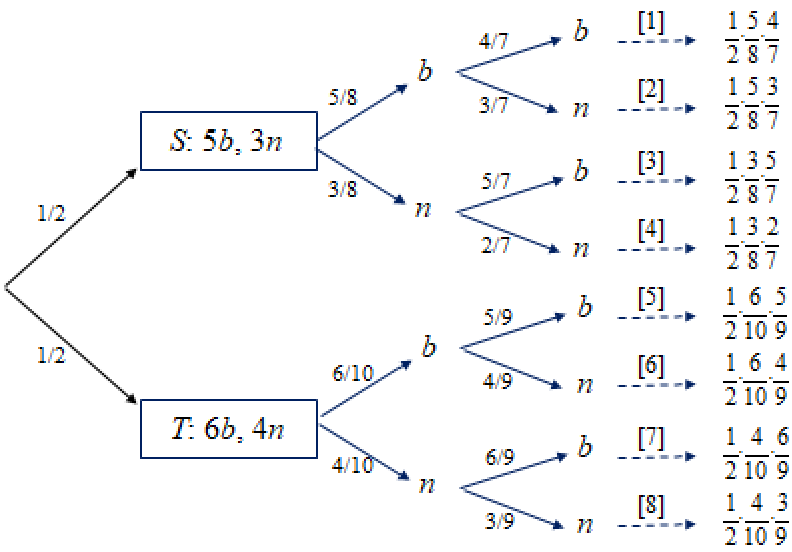
Solución:

Se designa por *n* extraer bola negra de cualquier urna; por *b*, que sea blanca.

Las urnas iniciales son:

S: [5*b*, 3*n*]; *T*: [6*b*, 4*n*]

Con los datos del problema se puede confeccionar el siguiente diagrama de árbol.



a) La extracción de dos bolas negras se consigue siguiendo los caminos [4] y [8]; por la probabilidad total, su valor es:

$$P(n,n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{101}{840}.$$

b) Por Bayes,

$$P(T/(n,n))=\frac{P(T)\cdot P((n,n)/T)}{P(n,n)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{101}{840}}=\frac{\frac{12}{180}}{\frac{101}{840}}=\frac{56}{101}.$$

<u>**51**. País Vasco, extraordinaria 2022</u>

Ejercicio B5

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de os hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio.

Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

<u>Solución</u>:

La variable *X* que mide el número de hogares con al menos dos coches es una binomial *B*(50, 0,6): $n = 50$; $p = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$.

La binomial *B*(*n*, *p*) se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso puede hacerse, pues $50 \cdot 0{,}6 = 30$ y $50 \cdot 0{,}4 = 20$.

En consecuencia, la binomial *B*(50, 0,6) puede aproximarse mediante la distribución normal $N\left(50 \cdot 0{,}6,\ \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}\right) \to N(30,\ 3{,}464)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-30}{3{,}464}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

(a) $P(X \geq 20) = P(X' > 19{,}5) = P\left(Z > \dfrac{19{,}5-30}{3{,}464}\right) = P(Z > -3{,}03) = P(Z < 3{,}03) = 0{,}9988$.

(b) $P(30 \leq X \leq 40) = P(29{,}5 < X' < 40{,}5) = P\left(\dfrac{29{,}5-30}{3{,}464} < Z < \dfrac{40{,}5-30}{3{,}464}\right) =$

$= P(-0{,}14 < Z < 3{,}03) = P(Z < 3{,}03) - P(Z < -0{,}14) = P(Z < 3{,}03) - (1 - P(Z < 0{,}14)) =$

$= 0{,}9988 - (1 - 0{,}5557) = 0{,}5545$.