ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2022

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ANÁLISIS (en todos los distritos universitarios) son:
1) Funciones: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; … Representación gráfica.
2) Estudio de la continuidad y derivabilidad de funciones definidas a trozos.
3) Aplicaciones de los teoremas de Bolzano, valores intermedios (Lagrange), Rolle y Cauchy.
4) Uso de derivadas para hallar la tangente a una curva y el cálculo de límites (L´Hôpital).
5) Problemas de optimización: planteamiento y resolución.
6) Integración indefinida: inmediatas; por partes y descomposición en fracciones simples.
7) Integrales definidas: cálculo de áreas de regiones planas. (Representación de esas regiones).

He seleccionado los ejercicios que, aparentemente, presentaban mayor dificultad o resultaban algo novedosos.

1. Andalucía, ordinaria 2022

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1,5 puntos)**

Solución:
a) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. Los únicos puntos conflictivos son $x = -1$ y $x = 1$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. La función será continua cuando el límite exista en esos puntos y coincida con su valor de definición.
En cada caso, el límite existe cuando existen los límites laterales y son iguales.

- En $x = -1$.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{(-1)} = -1$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (ax+b) = -a+b$.

Debe cumplirse que $-a+b=-1$.

- En $x = 1$.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

Debe cumplirse que $a+b=\dfrac{1}{2}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}; b=-\dfrac{1}{4}$.

b) Para $x<-1$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Esta función tiene una asíntota horizontal, cuando $x \to -\infty$, pues,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0.$$

La asíntota es la recta $y = 0$.

En el intervalo $[-1, 1]$, la función es $f(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$. Evidentemente no tiene asíntotas.

Para $x > 1$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Esta función tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Si la recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$, entonces:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right).$$

Por lo tanto,

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1;\ n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)=-1.$$

La asíntota es la recta $y=x-1$.

<u>**2**. Andalucía, extraordinaria 2022</u>

<u>EJERCICIO 1</u> (2,5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(\ln x)^3+2x}=1$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

<u>Solución</u>:

Este límite, que inicialmente es una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, puede hacerse por L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(\ln x)^3+2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}+2}=\frac{a}{2}.$$

Observa que el término $3(\ln x)^2\cdot\dfrac{1}{x}\to 0$, pues $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3(\ln x)^2}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}}{1}=0.$$

Como se sabe que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(\ln x)^3+2x}=1\Rightarrow\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$.

3. Andalucía, extraordinaria 2022

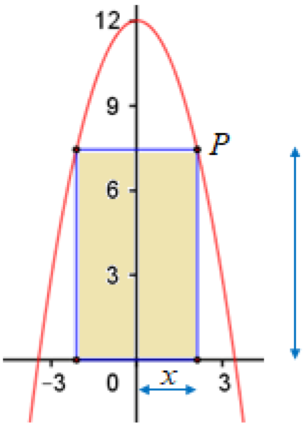
EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-x^2+12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Solución:

La situación gráfica es la adjunta.

Si $P(x, y)$ es uno de los vértices sobre la parábola, se tendrá:



El área del rectángulo viene dada por

$$S=2xy\,.$$

Como (x, y) cumple la relación $y=-x^2+12 \Rightarrow$

$$S=2x\left(-x^2+12\right) \Rightarrow S=-2x^3+24x\,.$$

El máximo de S se da en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.

Derivando:

$$S'=-6x^2+24 \Rightarrow S''=-12x\,.$$

$$S'=-6x^2+24=0 \Rightarrow x=2\text{; para ese valor } S'' < 0.$$

Sustituyendo en $f(x)=-x^2+12 \Rightarrow f(2)=-4+12=8$.

Por tanto, $P(x,\ y)=(2,\ 8)$.

Los otros vértices serán:

$$(-2,\ 8);\ (-2,\ 0);\ (2,\ 0).$$

El área del rectángulo será: $S=2\cdot 2\cdot 8=32\ \text{u}^2$.

4. Andalucía, extraordinaria 2022

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{1+x}-1$.)

Solución:

Si $t=\sqrt{1+x}-1 \to t+1=\sqrt{1+x} \Rightarrow dt=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \Rightarrow dx=\left(2\sqrt{1+x}\right)dt \Rightarrow dx=2(t+1)\,dt$.

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx=\int \frac{1}{t}\cdot 2(t+1)\,dt=\int\left(2+\frac{2}{t}\right)dt=2t+2\ln t+c\,.$$

Deshaciendo el cambio: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx=2\left(\sqrt{1+x}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)+c$.

La integral definida valdrá:

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx=\left[2\left(\sqrt{1+x}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)\right]_3^8=$$

$$=\left[2\left(\sqrt{9}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{9}-1\right)\right]-\left[2\left(\sqrt{4}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{4}-1\right)\right]=2+2\ln 2\,.$$

5. Aragón, ordinaria 2022

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3\,x^2-2}-(\sqrt{3}\,x+5)\right].$$

Solución:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]=[\infty-\infty]$ = (multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\sqrt{3x^2-2}-\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]\cdot\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}{\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-\left(\sqrt{3}x+5\right)^2}{\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2-\left(3x^2+10\sqrt{3}x+25\right)}{\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\sqrt{3}x-27}{\left[\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}$ = (dividiendo cada término por x) =

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-10\sqrt{3}x-27}{x}}{\left[\sqrt{\dfrac{3x^2-2}{x^2}}+\left(\dfrac{\sqrt{3}x+5}{x}\right)\right]}=\frac{-10\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=-5\,.$$

6. Aragón, ordinaria 2022

3) Calcula:

$$\int e^{-x}\,(x^2-1)dx.$$

Solución:

La integral $\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx=\int e^{-x}x^2dx-\int e^{-x}dx\;=\int e^{-x}x^2dx+e^{-x}+c$ (1)

$\int e^{-x}x^2dx$ debe hacerse mediante el método de integración por partes.

Tomando: $u=x^2\;\Rightarrow\;du=2xdx$; $dv=e^{-x}dx\;\Rightarrow\;v=-e^{-x}$.

Luego: $\int e^{-x}x^2dx=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx$.

La segunda integral se obtiene también por partes.

Tomando: $u'=2x\Rightarrow du'=2dx$; $dv'=e^{-x}dx\;\Rightarrow\;v'=-e^{-x}$.

Se tiene:

$$\int 2xe^{-x}dx=-2xe^{-x}+\int 2e^{-x}dx=-2xe^{-x}-2e^{-x}.$$

Luego,

$$\int e^{-x}x^2dx=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx=\;-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\qquad(2)$$

Por tanto, sustituyendo (2) en (1) queda:

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx=\int e^{-x}x^2dx+e^{-x}+c\;=$$

$$=\;-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+e^{-x}+c=\left(-x^2-2x-1\right)e^{-x}+c\,.$$

7. Aragón, extraordinaria 2022

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = x\, e^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga la asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

a) La función es continua siempre, para cualquier valor de a.

Tendrá por asíntota horizontal la recta $y=0$ cuando $\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-ax^2}\right)=0$.

Para valores de $a < 0$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-ax^2}\right)=[\pm\infty\cdot\infty]=\infty$. No tiene asíntota horizontal.

Pero si $a > 0$, el límite es indeterminado:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-ax^2}\right)=[\pm\infty\cdot 0]$$

Se resuelve transformando la expresión inicial y aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-ax^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{ax^2}}=\left[\frac{\pm\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2axe^{ax^2}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Por tanto, $f(x)=xe^{-ax^2}$ es continua y tiene por asíntota horizontal la recta $y=0$ para cualquier valor de $a > 0$.

b) Si $a=\frac{1}{2}$ la función es $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

El área pedida viene dada por $\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$. (En ese intervalo $f(x)\geq 0$).

Teniendo en cuenta que $\int g´(x)e^{g(x)}dx=e^{g(x)}$, transformado la expresión, se tiene,

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int\left(-\frac{2x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1=-e^{-1/2}+e^0=1-e^{-1/2}.$$

8. Aragón, extraordinaria 2022

2) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que $\lim_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

Solución:

Como el denominador, $d(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, se anula en x = 1, para que exista el límite cuando $x \to 1$, es necesario que el numerador, $n(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$, también valga 0.

En ese caso, $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = \frac{0}{0}$.

Por tanto, debe cumplirse que $n(1) = 2 + a + b + 3 = 0 \Rightarrow 5 + a + b = 0$.

Aplicando L´Hôpital ,

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x^2 + 2ax + b}{-3x^2 + 8x - 5} = \left[\frac{6 + 2a + b}{0}\right]$$. Existirá solo si $6 + 2a + b = 0$.

Resolviendo $\begin{cases} 5 + a + b = 0 \\ 6 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = -4$.

Así pues,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = \frac{0}{0} = (L´H) = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{-3x^2 + 8x - 5} = \frac{0}{0} =$$

$$= (L´H) = \lim_{x \to 1} \frac{12x - 2}{-6x + 8} = \frac{10}{2} = 5.$$

9. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbf{R} - \{1\}$. La función está definida para todo $x \neq 1$, punto en el que se anula el denominador de $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función, pues $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Si la recta $y = mx + n$ es la asíntota oblicua de la curva $f(x)$, entonces:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Por lo tanto,

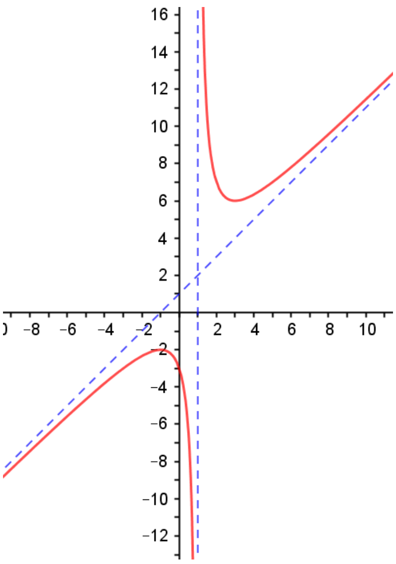
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-1x} = 1;\quad n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x-1}\right) = 1.$$

La asíntota es la recta $y = x + 1$.

b) Derivando: $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$



- La derivada primera se anula cuando $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$ $x = -1$, $x = 3$.

Con esto:

–Si $x < -1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente;

–Si $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Luego, en $x = -1$ se tiene un máximo relativo: $(-1, -2)$.

–Si $1 < x < 3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;

–Si $x > 3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Luego, en $x = 3$ se tiene un mínimo relativo: $(3, 6)$.

- La derivada segunda no se anula en ningún punto de su dominio, pero:

−Si $x < 1$, como $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$);

−Si $x > 1$, como $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).

c) Su gráfica es la adjunta.

10. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (−1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

Solución:

(a) La integral pedida es casi inmediata; basta con recordar que $\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$.

En este caso, ajustando constantes,

$$\int \left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)\cdot\left(1-x^2\right)^{1/2} dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3} + c\,.$$

$\rightarrow$ Si se hace el cambio $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = (-2x)dx \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt$; $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{t} = t^{1/2}$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} + c\,.$$

Deshaciendo el cambio: $\int \left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx = -\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3} + c$.

(b) La integral definida valdrá:

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx = \left[-\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

11. Asturias, extraordinaria 2022

BLOQUE 2.B Dada la función f(x) = − sen(2x) + 1,

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y x = π.

Solución:

(a)La integral es prácticamente inmediata; para resolverla basta con ajustar constantes y descomponer la suma.

$$\int(-\sin(2x)+1)\,dx = -\int \sin(2x)\,dx + \int dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(-2\cdot\sin(2x))\,dx + x + c = \frac{1}{2}\cos(2x) + x + c\,.$$

Si se desea que la primitiva, $F(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + x + c$, pase por el origen, entonces

$$F(0) = \frac{1}{2}\cos(2\cdot 0) + 0 + c = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 0 + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}\,.$$

La primitiva pedida es $F(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + x - \frac{1}{2}$.

(b) La función $f(x) = -\sin(2x) + 1$ nunca es negativa, pues $|\sin(2x)| \le 1$. Por tanto, el área limitada por *f*, el eje *X* y las rectas *x* = 0 y *x* = π, viene dada por la integral definida

$$\int_0^{\pi}(-\sin(2x)+1)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(2x) + x\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2}\cos(2\pi) + \pi\right) - \left(\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0) + 0\right) = \pi \text{ u}^2.$$

12. Baleares, ordinaria 2022

3. Considerau la funció $f(x) = e^{3x-2}$.

   (a) Determinau les coordenades del punt en el qual la tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ té pendent igual a $3/e$. Escriviu l'equació d'aquesta recta tangent.(4 punts)

   (b) Calculau el $\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 punts)

   (c) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (2 punts)

   (d) Calculau l'àrea de la superfície fitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$ i les rectes $x = 0$ i $y = 1$. (2 punts)

Solución:

(a) La pendiente de la recta tangente a una curva en el punto de abscisa $x = a$ es $f´(a)$.
Por tanto, se pide encontrar el punto en el que

$$f´(x) = 3e^{3x-2} = \frac{3}{e} \Rightarrow 3e^{3x-1} = 3 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f´\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y - e^{1-2} = \frac{3}{e}\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow y = \frac{3}{e}x.$$

(b) $\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4} = \lim_{x\to 2/3} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \left[\frac{1-e^0}{4-4} = \frac{0}{0}\right]$.

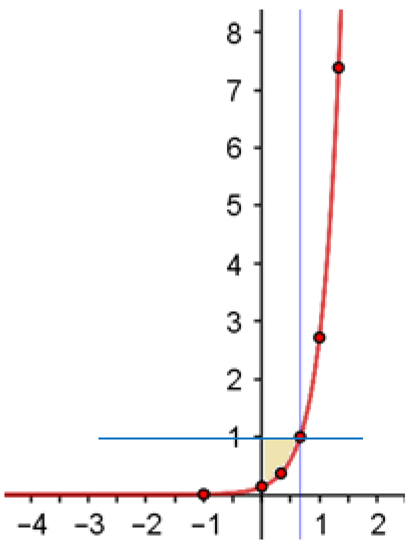
Aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2/3} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = \frac{-3e^0}{6} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Como $f´(x) = 3e^{3x-2} > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, la función es siempre creciente.
Además, tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$; es la recta $y = 0$, pues $\lim_{x\to -\infty} e^{3x-2} = e^{-\infty} = 0$.

Dando algunos valores:

$(-1, e^{-5}) \approx (-1,\ 0{,}007)$; $(0, e^{-2}) \approx (0,\ 0{,}14)$;
$(1/3, e^{-1}) \approx (1/3,\ 0{,}37)$; $(2/3, e^0) = (2/3,\ 1)$;
$(1, e^1) \approx (1,\ 2{,}72)$; $(4/3, e^2) \approx (4/3,\ 7{,}39)$.



(d) El área pedida, que se corresponde con la de la región sombreada en la figura (la abscisa de corte de $y = 1$ con la función es $x = 2/3$), viene dada por la integral definida

$$\int_0^{2/3} \left(1 - e^{3x-2}\right) dx = \left[x - \frac{1}{3}e^{3x-2}\right]_0^{2/3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^0\right) - \left(0 - \frac{1}{3}e^{-2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3e^2} \text{ u}^2.$$

13. Islas Canarias, ordinaria 2022

1A. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ \ x<1\\ a+ln(x) & si\ x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función f(x) sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 ptos

b) Tomando los valores $a=-2$ y $b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$ 1 pto

Solución:

a) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es $x = 1$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

En ese punto la función está definida, siendo $f(1) = a$; para que sea continua, además, debe tener límite en $x = 1$ y coincidir con su valor de definición.

Veamos:

Si $x\to 1^-$, $f(x)=(x-1)^2+bx\to b$

Si $x\to 1^+$, $f(x)=a+\ln x\to a.$

Ambos límites coinciden cuando $b = a$.

Luego, la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+ax & \text{si } x<0\\ a+\ln x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ es continua en todo **R**.

Salvo en $x = 1$, su derivada es

$$f´(x)=\begin{cases}2(x-1)+a & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$$

La función será derivable en $x = 1$ si coinciden las derivadas laterales.

Si $x\to 1^-$, $f´(x)=2(x-1)+a\to a$

Si $x\to 1^+$, $f´(x)=\dfrac{1}{x}\to 1.$

Las derivadas son iguales cuando $a = 1$.

En consecuencia, la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+x & \text{si } x<0\\ 1+\ln x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ es continua y derivable.

b) La ecuación de la recta tangente es $y-f(e)=f´(e)(x-e)$, siendo (por ser $e > 1$)

$$f(x)=-2+\ln x\ \Rightarrow\ f´(x)=\frac{1}{x}\ \to\ f(e)=-2+\ln e=-1;\ f´(e)=\frac{1}{e}.$$

Luego, la recta tangente pedida es:

$$y+1=\frac{1}{e}(x-e)\Rightarrow y=\frac{1}{e}x-2.$$

14. Islas Canarias, ordinaria 2022

1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+4}{x^2+4}\,dx$ 1.25 ptos b) $\int_1^e \frac{(lnx)^3}{x}\,dx$ 1.25 ptos

Solución:

a) La integral $\int \frac{x+4}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{4}{x^2+4}dx$.

La primera integral es casi inmediata; hay que ajustar constantes. Así:

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right).$$

La segunda integral es algo más complicada, pero se resuelve también ajustando constantes. Así:

$$\int \frac{4}{x^2+4}dx = \int \frac{\frac{4}{4}}{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{4}}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = 2\arctan\frac{x}{2}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+4}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\arctan\frac{x}{2} + c.$$

b) La integral $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ es casi inmediata; basta con recordar que $\int f^n \cdot f'dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$.

En este caso, como para $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, se tendrá que:

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^4}{4}.$$

Luego,

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \left.\frac{(\ln x)^4}{4}\right|_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

15. Islas Canarias, extraordinaria 2022

1A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1.75 ptos

Calcular los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ 0.75 ptos

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

Por pasar por $P(0, 1)$, $f(0) = 1$ $\Rightarrow 1 = d$

Por pasar por $Q(1, -1)$, $f(1) = -1$ $\Rightarrow -1 = a + b + c + d$

Por extremo en $P(0, 1)$, $f'(0) = 0$ $\Rightarrow 0 = c$

Por PI en $Q(1, -1)$, $f''(1) = 0$ $\Rightarrow 0 = 6a + 2b$

Como $c = 0$ y $d = 1$, hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} -1 = a + b + 0 + 1 \\ 0 = 6a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 1.$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \left[\frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}\right]$.

Puede resolverse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

16. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

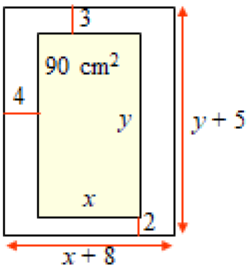
Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior 3 *cm*, inferior 2 *cm* y márgenes laterales 4 *cm* cada uno.

A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.

B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:

A. Puede valer el dibujo adjunto.



El área para texto es un rectángulo de dimensiones $x \cdot y = 90$.

El cartel será un rectángulo de ancho $x + 2 \cdot 4 = x + 8$, y alto $y + 3 + 2 = y + 5$.

B. La cantidad de papel utilizada es $S = (x+8) \cdot (y+5)$.

Como $x \cdot y = 90 \Rightarrow y = \dfrac{90}{x}$, luego, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$S = (x+8) \cdot (y+5) = xy + 5x + 8y + 40 \Rightarrow$$

$$S(x) = 90 + 5x + \frac{720}{x} + 40 \Rightarrow S(x) = 130 + 5x + \frac{720}{x}.$$

El mínimo de S se obtiene en la solución de $S' = 0$ que haga positiva a S''.

Derivando:

$$S'(x) = 5 - \frac{720}{x^2} \to S''(x) = \frac{1440}{x^3}.$$

La derivada primera se anula cuando $5 - \dfrac{720}{x^2} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 720 = 0 \Rightarrow x = \pm 12$.

Como para $x = 12$ (el valor negativo de la raíz debe descartarse) la derivada segunda es positiva, entonces en ese valor se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, las dimensiones del cartel deben ser:

Anchura, $12 + 8 = 20$ cm; Altura, $y + 5 = \dfrac{90}{12} + 5 = 12,5$ cm.

17. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^2\ e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de $f(x)$.

C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de $f(x)$.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

A.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \left[\infty\cdot e^{-\infty} = \infty\cdot 0\right]$. Resulta una forma indeterminada, que puede resolverse aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \left(\infty\cdot e^{+\infty}\right) = \infty$.

B. $f(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow f´(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = \left(2x - x^2\right)e^{-x}$.

C y D. La derivada se anula en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

Con esto:

–Si $x < 0$, como $f´(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;

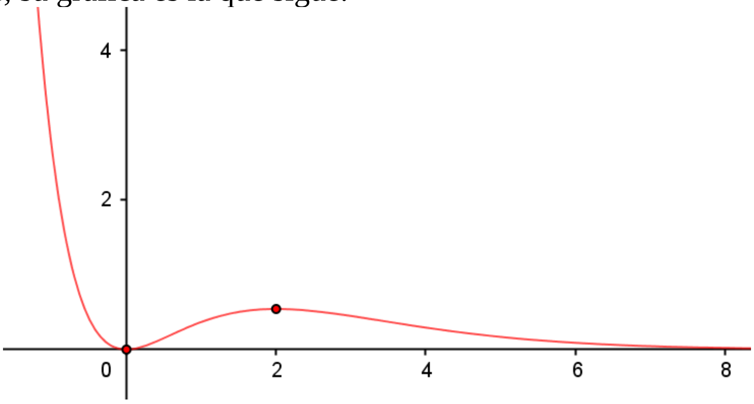
–Si $0 < x < 2$, $f´(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Luego, en $x = 0$ se tiene un mínimo: (0, 0).

–Si $x < 2$, $f´(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;

Luego, en $x = 2$ se tiene un máximo relativo: $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$.

Aunque no se pide, su gráfica es la que sigue.



18. Castilla y León, ordinaria 2022

E8.- (Análisis)

a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2-2\cos x}$ **(1 punto)**

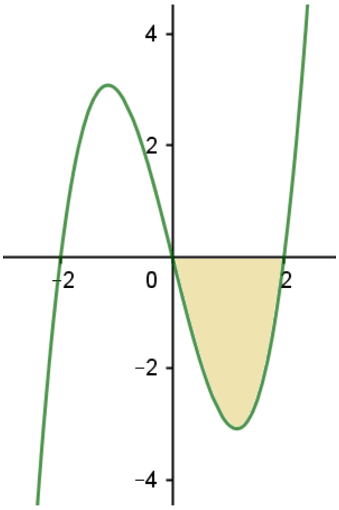
Solución:

a) La fusión $f(x) = x^3 - 4x$ puede escribirse como $f(x) = x\cdot\left(x^2-4\right)$, lo cual permite deducir fácilmente que toma valores negativos en el intervalo (0, 2).

Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida

$$-\int_0^2 \left(x^3-4x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2 = -4+8 = 4\,\text{u}^2.$$

Aunque no se pide, la representación gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$ ayuda a entender la solución.



b) El límite da lugar a una forma indeterminada.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x} = \left[\frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}\right]$$ → Debe hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$= (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{2\cos x} = \frac{2}{2} = 1.$$

19. Castilla y León, extraordinaria 2022

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene. **(1 punto)**

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene. **(1 punto)**

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. La función está definida para todo $x \neq 2$, punto en el que se anula el denominador de $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$.

La recta $x = 2$ es asíntota vertical de la función, pues $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Si la recta $y = mx + n$ es la asíntota oblicua de la curva $f(x)$, entonces:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x};\ n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right).$$

Por lo tanto,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(2-x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1;\quad n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{2-x}\right) = -2.$$

La asíntota es la recta $y = -x - 2$.

b) Derivando: $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2 \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(2-x)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4) \cdot (2-x)^2 - (-x^2 + 4x) \cdot 2(2-x) \cdot (-1)}{(2-x)^4} = \frac{8}{(2-x)^3}.$$

- La derivada primera se anula cuando $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ y $x = 4$.

Con esto:

–Si $x < 0$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

–Si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

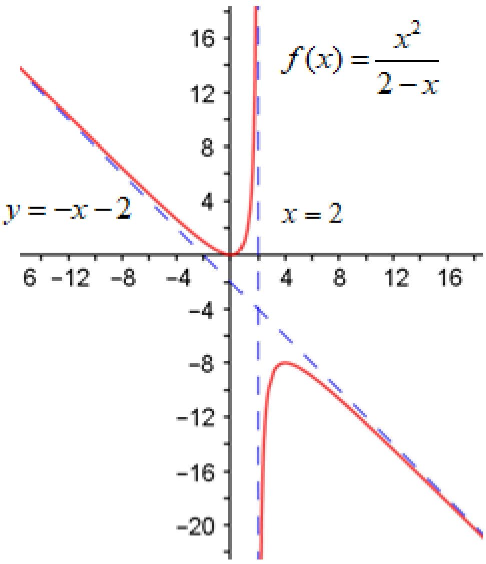
Luego, en $x = 0$ se tiene un mínimo: punto (0, 0).

–Si $2 < x < 4$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente;

–Si $x > 4$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Luego, en $x = 4$ se tiene un máximo: punto (4, –8).

Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.



20. Castilla y León, extraordinaria 2022

E7.- (Análisis)

a) Enuncie el Teorema de Bolzano. **(1 punto)**

b) Averigüe si la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. **(1 punto)**

Solución:

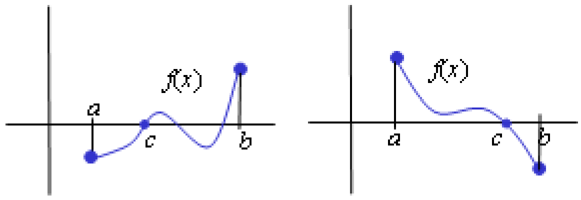
a) El teorema de Bolzano asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje en algún punto de ese intervalo.

Dice lo siguiente:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en a ($f(a) < 0$) y positiva en b ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto c entre a y b ($f(c) = 0$).

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)



Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre a y b. Esa solución será el punto c cuya existencia afirma el teorema.

b) La función $f(x) = x + \sin x - 2$ es continua en todo **R**; en particular en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $f(0) = 0 + \sin 0 - 2 = -2 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 > 0$, entonces, la función cumple el teorema de Bolzano.

Por tanto, existe un punto $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

21. Castilla–La Mancha, ordinaria 2022

3. *a*) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) **[1 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx.$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución:

a.1) La función $f(x) = a - x^2$ puede escribirse como $f(x) = \left(\sqrt{a}+x\right)\cdot\left(\sqrt{a}-x\right)$ siempre que *a* > 0. Esta función se anula en dos puntos, en $x = -\sqrt{a}$ y $x = +\sqrt{a}$.

La curva asociada a $f(x) = a - x^2$ es una parábola cóncava que está por encima del eje *OX* en el intervalo $\left(-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right)$, y lo corta en los puntos $x = -\sqrt{a}$ y $x = +\sqrt{a}$.

Nota. Podría aplicarse el teorema de Bolzano (visto en el problema anterior) a la función $f(x) = \left(\sqrt{a}+x\right)\cdot\left(\sqrt{a}-x\right)$, que es continua en todo **R** y cumple:

- Si $x < -\sqrt{a}$, $f(x) < 0$ y si $-\sqrt{a} < x < 0$, $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ corta al eje *OX* en el intervalo $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$.
- Si $0 < x < \sqrt{a}$, $f(x) > 0$ y si $x > \sqrt{a}$, $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ corta al eje *OX* en el intervalo $\left(0, \sqrt{a}\right)$.

a.2) El área del recinto que delimita con ele eje OX viene dada por

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right)dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} - \left(-a\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Como se desea que $\frac{4a\sqrt{a}}{3} = 36 \Rightarrow a\sqrt{a} = 27 \Rightarrow a = 9$.

b) Si en $\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$ se hace el cambio de variable $t = 1 + 3x^2 \Rightarrow 6xdx = dt \Rightarrow 2xdx = \frac{1}{3}dt$.

Luego:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t} + c.$$

Deshaciendo el cambio se obtiene:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{1+3x^2} + c.$$

22. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2022

2. a) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \longrightarrow +\infty$.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int x \cdot \cos(2x)dx.$$

Solución:

a) Para que $f(x) = \dfrac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de salto infinito en x = 1 es necesario que

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax+1}{2x+b} = \frac{a+1}{2+b} = \infty .$$

Para ello debe cumplirse que: $2+b=0 \Rightarrow b=-2$; pero $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$.

Si se desea que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{2x+b} = 2$, como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{2x+b} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$.

Por tanto, los valores pedidos son: a = 4; b = –2.

b) La integral $\int x \cdot \cos(2x)\, dx$ puede hacerse por el método de partes.

Tomando

$$x = u;\ dv = \cos(2x)dx \Rightarrow dx = du;\ v = \int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

se tiene,

$$\int x \cdot \cos(2x)\,dx = x \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c.$$

23. Cataluña, ordinaria 2022

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$.

[0,75 puntos]

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

[0,75 puntos]

c) Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a.

[1 punto]

Solución:

a) Si $f(x)$ es una primitiva de $f'(x) = 3x^2 - 12x$, entonces:

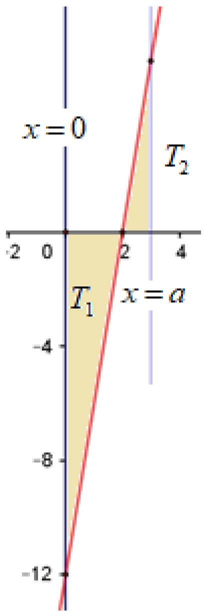
$$f(x) = \int (3x^2 - 12x)\,dx = x^3 - 6x^2 + c\,.$$

Como $f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1 - 6 + c = 0 \Rightarrow c = 5$.

Luego, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

b) En el punto de inflexión $f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ (Es así por $f'''(2) = 6 \neq 0$).

- Si $x < 2$, como $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$).
- Si $x > 2$, como $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).



c) La función $y = f''(x) = 6x - 12$ es una recta. Determina con el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$ dos triángulos.

El triángulo T_1 tiene área $T_1 = \dfrac{12 \cdot 2}{2} = 12$

El área del triángulo T_2 debe ser 3.

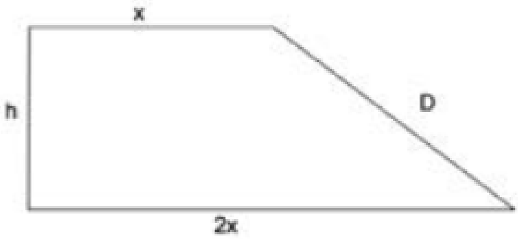
$$T_2 = \frac{(a-2)\cdot f(a)}{2} = 3 \Rightarrow \frac{(a-2)(6a-12)}{2} = 3 \Rightarrow$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1;\ a = 3.$$

La solución válida es $a = 3$.

24. Cataluña, ordinaria 2022

6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de $30\,\mathrm{m}^2$ para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



a) Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h=\dfrac{20}{x}$ y $D(x)=\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}$.
[1 punto]

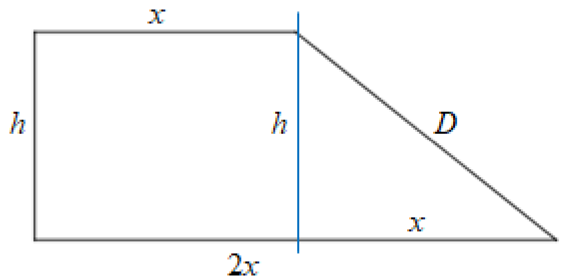
b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima.
[1,5 puntos]

Solución:

a) Como el área del trapecio es

$$S=\frac{(2x+x)h}{2}=30 \Rightarrow$$

$$\frac{3x\cdot h}{2}=30 \Rightarrow h=\frac{20}{x}.$$



Al trazar la altura por el extremo derecho de la base superior se forma un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es D; por tanto

$$D=\sqrt{h^2+x^2} \Rightarrow D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}.$$

b) El mínimo de D se da en la solución de $D'(x)=0$ que hace positiva a $D''(x)$.
Derivando con respecto a x,

$$D'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{400}{x^2}+x^2}}\cdot\left(-\frac{800}{x^3}+2x\right).$$

$$D'(x)=0 \Rightarrow \frac{-800}{x^3}+2x=0 \Rightarrow 2x^4=800 \Rightarrow x=\sqrt{20}.$$

En vez de hacer la derivada segunda, pues resulta engorroso, puede comprobarse que la función $D(x)$ decrece para valores de $x<\sqrt{20}$ y crece para $x>\sqrt{20}$. Así es.

Por tanto, para $x=\sqrt{20}$ la función toma el mínimo buscado.

Las dimensiones del trapecio serán: $2x=2\sqrt{20}$; $x=\sqrt{20}$; $h=\sqrt{20}$; $D=\sqrt{40}$.

<u>25. Cataluña, extraordinaria 2022</u>

2. Considere la función $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=4$. Represente en un mismo gráfico la función $f(x)$ y la recta tangente.
[1,25 puntos]

<u>Solución</u>:

a) $Dom(f)=\mathbf{R}-\{-2,1\}$, pues la función $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$ no está definida cuando $x^2+x-2=0$: puntos $x=-2$ y $x=1$.

Las rectas $x=-2$ y $x=1$ son asíntotas verticales de la función, pues:

$$\lim_{x\to -2}\frac{9}{x^2+x-2}=\left[\frac{9}{0}\right]=\infty \text{ y } \lim_{x\to 1}\frac{9}{x^2+x-2}=\left[\frac{9}{0}\right]=\infty .$$

También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\infty}\dfrac{9}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{9}{\infty}\right]=0$ → recta $y=0$.

b) Derivando: $f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-9(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$.

- La derivada se anula cuando $2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Con esto:

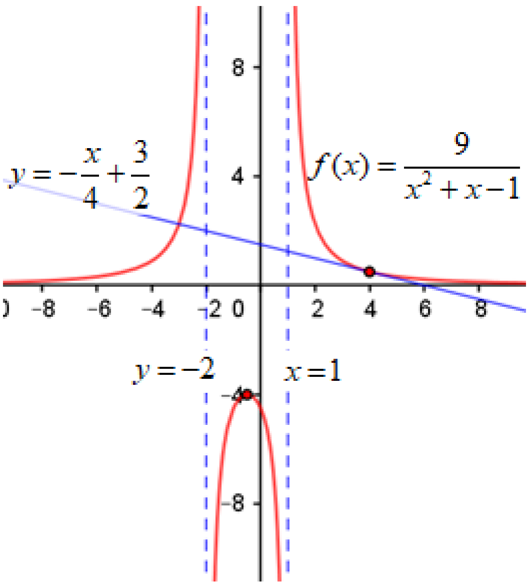
–Si $x<-2$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece;

–Si $-2<x<-\dfrac{1}{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece.

–Si $-\dfrac{1}{2}<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece.

Luego, en $x=-\dfrac{1}{2}$, la función tiene un máximo relativo: punto $\left(-\dfrac{1}{2},-4\right)$.

–Si $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece.



b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=4$ es $y-f(4)=f'(4)(x-4)$:

Como $f(4)=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$ y $f'(4)=\dfrac{-9\cdot 9}{(18)^2}=-\dfrac{1}{4}$, su ecuación es

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{x}{4}+\frac{3}{2}.$$

26. Comunidad Valenciana, ordinaria 2022

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

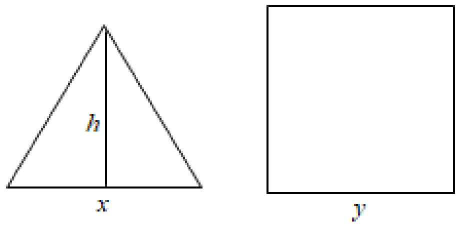
Solución:

a) Si el lado del triángulo mide x y el del cuadrado y, entonces:

–la suma de sus perímetros es $3x+4y=240 \Rightarrow y=\dfrac{240-3x}{4}$.

–la suma de sus áreas $S=\dfrac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}+y^2 \Rightarrow$

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2.$$



b) El mínimo de S se da en la solución de $S´ = 0$ que hace positiva a $S´´$.
Derivando e igualando a 0:

$$S´(x)=\frac{2\sqrt{3}x}{4}+2\left(\frac{240-3x}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow S´(x)=\frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x-720}{8}.$$

Se anula cuando $x=\dfrac{720}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Como $S´´(x)=\dfrac{\left(4\sqrt{3}+9\right)}{8}>0$, para ese valor de x se da el mínimo buscado.

El área mínima obtenida será

$$S=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)^2}{4}+\left(\frac{240-3\cdot\frac{720}{9+4\sqrt{3}}}{4}\right)^2 \text{ m}^2.$$

27. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2022

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 puntos)

Solución:

a) Como las raíces del denominador son $x = -2$ y $x = 7$, pues $x^2-5x-14=(x+2)(x-7)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{18}{x^2-5x-14}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-7}=\frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)}$$

Luego:

$18=A(x-7)+B(x+2) \Rightarrow$

si $x = -2$: $18 = -9A \Rightarrow A = -2$;

si $x = 7$: $18 = 9B \Rightarrow B = 2$.

Con esto:

$$\int\frac{18}{x^2-5x-14}dx=\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{2}{x-7}\right)dx=\int\frac{-2}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-7}dx =$$

$$= -2\ln(x+2)+2\ln(x-7)+c\,.$$

b) $$\int_8^t\frac{18}{x^2-5x-14}dx=\left[-2\ln(x+2)+2\ln(x-7)\right]_8^t =$$

$$= -2\ln(t+2)+2\ln(t-7)-\left[-2\ln 10+2\ln 1\right]=2\ln\frac{10(t-7)}{t+2}\,.$$

c) Si $2\ln\frac{10(t-7)}{t+2}=\ln\frac{25}{4} \Rightarrow \ln\left(\frac{10(t-7)}{t+2}\right)^2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{10(t-7)}{t+2}=\frac{5}{2}\Rightarrow t=10\,.$

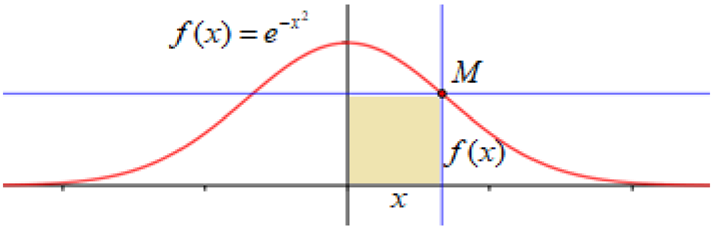
28. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2022

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)
b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Solución:

La situación puede dibujarse como sigue (bastaría con un esbozo).



a) El área del rectángulo será:

$$S(x) = x \cdot f(x) = xe^{-x^2}$$

b) El máximo de S se da en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.
Derivando e igualando a 0:

$$S'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x) \Rightarrow S'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

Se anula cuando $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Como $S''(x) = -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2} \cdot (-2x) = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$, para $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene

$S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{6}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} < 0$. Luego, para ese valor de x se obtiene el máximo buscado.

El área máxima obtenida será

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2} \text{ u}^2.$$

29. Extremadura, ordinaria 2022

6. Dada la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. (1 punto)

b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante. (1 punto)

Solución:

a) Hay que distinguir tres intervalos: $(-\infty, -1]$; $(-1, 2)$; $[2, +\infty)$.

- Si $x \in (-\infty, -1]$, $|x+1| = -x-1$ y $|x-2| = -x+2 \Rightarrow |x+1|+|x-2| = -2x+1$;
- Si $x \in (-1, 2)$, $|x+1| = x+1$ y $|x-2| = -x+2 \Rightarrow |x+1|+|x-2| = 3$:
- Si $x \in [2, +\infty)$, $|x+1| = x+1$ y $|x-2| = x-2 \Rightarrow |x+1|+|x-2| = 2x-1$.

Por tanto:

$$f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1, & \text{si } x \le -1 \\ 3, & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x-1, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}.$$

Hay que estudiar la continuidad y derivabilidad en los puntos $x = -1$ y $x = 2$. En los demás puntos es continua y derivable. Para la continuidad deben ser iguales los límites laterales; para la derivabilidad deben ser iguales las derivadas laterales.

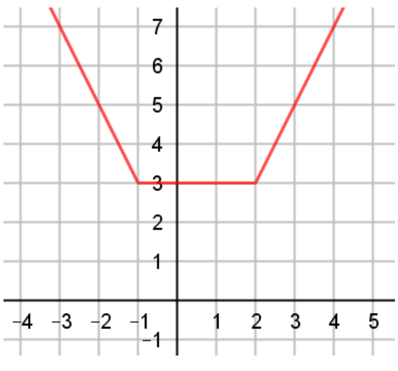
- Continuidad en $x = -1$:
  Si $x \to -1^-$, $f(x) = -2x+1 \to 3$;
  Si $x \to -1^+$, $f(x) = 3 \to 3$.

La función es continua en $x = -1$.

- Continuidad en $x = 2$:
  Si $x \to 2^-$, $f(x) = 3 \to 3$;
  Si $x \to 2^+$, $f(x) = 2x-1 \to 3$.

La función es continua en $x = 2$.

- La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.



Es evidente que la función no es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

b) La función es constante en el intervalo $[-1, 2]$.

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.

30. Extremadura, ordinaria 2022

7. Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$. (2 puntos)

Solución:

La función pedida es una primitiva de $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$; esto es,

$$f(x) = \int (2x+1)e^{-x}dx.$$

Esta integral debe hacerse por partes.

Tomando:

$$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

se tiene:

$$f(x) = \int (2x+1)e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

Como se desea que pase por el origen, $f(0) = 0$, entonces

$$0 = -e^{-0} - 2e^{-0} + c \Rightarrow 0 = -1 - 2 + c \Rightarrow c = 3.$$

La función buscada es $f(x) = -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + 3$.

31. Extremadura, extraordinaria 2022

6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2+1)$. (2 puntos)

Solución:

Hay que derivar dos veces.

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Los puntos de inflexión exigen que $f''(x) = 0$; esto sucede cuando $2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Para asegurar que son puntos de inflexión hay que ver que en ellos $f'''(x) \neq 0$.

La derivada tercera es:

$$f'''(x) = \frac{4x\left(x^2+1\right)^2 - \left(2x^2-2\right) \cdot 2\left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{4x\left(x^2+1\right) - \left(2x^2-2\right) \cdot 2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-4x^3+12x}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Efectivamente $f'''(-1) = \dfrac{4-12}{(2)^3} = -1 \neq 0$ y $f'''(1) = \dfrac{-4+12}{(2)^3} = 1 \neq 0$.

Por tanto, la inflexión se da en $x = -1$ y $x = 1$; puntos $\left(-1, -1-\ln 2\right)$ y $\left(1, 1-\ln 2\right)$.

31. Extremadura, extraordinaria 2022

7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3 - x}\, dx$. (2 puntos)

Solución:
Esta integral debe hacerse por descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador de la expresión $\frac{1}{x^3 - x}$ son 0, –1 y 1, se tendrá:

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x^3 - x}$$

Por tanto: $1 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Si damos los valores 0, 1 y –1 se tendrá:

Para $x = 0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1$;
Para $x = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = 1/2$;
Para $x = -1 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = 1/2$.

Luego

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + c .$$

32. Galicia, ordinaria 2022

4. Análisis

Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Solución:

Si $f''(x) = 2x - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = \int \left(2x - e^{-x}\right) dx \Rightarrow f'(x) = x^2 + e^{-x} + c$.

Por tanto,

$$f(x) = \int \left(x^2 + e^{-x} + c\right) dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + cx + d .$$

La tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$, entonces, como su ecuación originaria es $y - f(0) = f'(0) \cdot x \Leftrightarrow y = f'(0)x + f(0)$, se tendrá:

$f'(0) = 3$ y $f(0) = -1$.

Luego:

$$f'(0) = 0^2 + e^{-0} + c = 3 \Rightarrow 1 + c = 3 \Rightarrow c = 2 .$$

$$f(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + c \cdot 0 + d = -1 \Rightarrow -1 + d = -1 \Rightarrow d = 0 .$$

La función buscada será $f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x$.

33. Galicia, extraordinaria 2022

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

Solución:

a) La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2).$$

Como $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$ y $f(2) = 4$.

La recta tangente será:

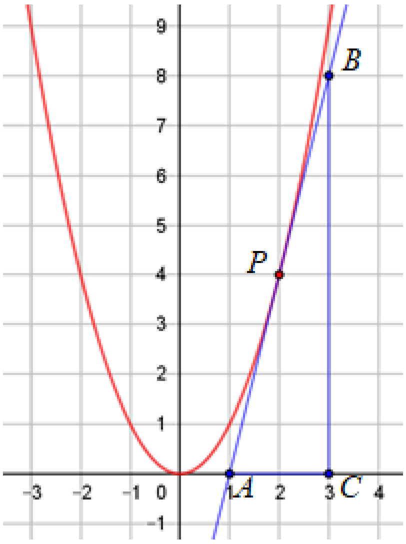
$$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

Esta recta corta al eje *OX* en $x = 1$, punto $A(1, 0)$.

Como el cateto horizontal tiene longitud 2, el otro vértice sobre el eje X es $C(3, 0)$.

El vértice B se obtiene al cortar $x = 3$ con la recta tangente, punto $B(3, 8)$.

Por tanto, la situación del triángulo es la que se muestra en la figura.



b) La función dada será continua y derivable cuando lo sea en $x = 1$, único punto dudoso

En ese punto deben ser iguales los límites laterales y las derivadas laterales.

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

- Continuidad en $x = 1$:

  Si $x \to 1^-$, $f(x) = 1 \to 1$;

  Si $x \to 1^+$, $f(x) = ax^2 + bx \to a + b$.

Será continua cuando $a + b = 1$.

- Derivabilidad en $x = 1$:

  Si $x \to 1^-$, $f'(x) = 0 \to 0$;

  Si $x \to 1^+$, $f'(x) = 2ax + b \to 2a + b$.

La función será derivable cuando $2a + b = 0$.

- Será continua y derivable en la solución de $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = 2$.

34. Galicia, extraordinaria 2022

4. Análisis

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$. b) $\int(\sin x)\sin(\cos x)\,dx$. c) $\int x^2\sin x\ dx$. d) $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$.

Solución:

a) La integral $\int\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)dx$ es casi inmediata; basta con ajustar constantes y recordar que $\int f^n\cdot f'dx=\frac{f^{n+1}}{n+1}$, $n\neq-1$.

En este caso,

$$\int\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int(2x)\cdot\left(x^2+1\right)^{1/2}dt=\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3/2}+c=\frac{2\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3}+c.$$

b) Lo mismo sucede con $\int(\sin x)\left(\sin(\cos x)\right)dx$.

Hay que saber que $\int f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)dx=-\cos\left(f(x)\right)+c$.

Luego, $\int(\sin x)\left(\sin(\cos x)\right)dx=+\cos(\cos x)+c$.

c) $\int x^2\sin x\ dx$ debe hacerse por el método de integración por partes.

Tomando $x^2=u$ y $dv=\sin x dx\Rightarrow 2xdx=du;\ -\cos x=v$.

Luego,

$$\int x^2\sin x\ dx\ =\ -x^2\cos x+2\int x\cos x dx$$

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes.

$\int x\cos x dx$:

Se toma: $x=u$ y $\cos x\ dx=dv\Rightarrow\ dx=du,\ v=\sin x$.

Luego, $\int x\cos x dx\ =x\sin x-\int\sin x\ dx=x\sin x+\cos x$

Por tanto:

$$\int x^2\sin x\ dx\ =\ -x^2\cos x+2\left(x\sin x+\cos x\right)+c.$$

d) $\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$ se hace por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Luego:

$1=A(x-2)+B(x-1)\Rightarrow$ si $x=1$: $1=-A\ \Rightarrow A=-1$; si $x=2$: $1=B$.

Con esto:

$$\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx==-\ln(x-1)+\ln(x-2)+c.$$

35. La Rioja, ordinaria 2022

1.– (2 puntos) Dada la curva $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$

(i) Halla los puntos de la curva en los que la recta tangente a ésta pase por el punto $(0, 0)$.

(ii) Da las ecuciones de las rectas tangentes.

Solución:

(i) La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es

$$y - f(a) = f´(a)\cdot(x-a) \Rightarrow y = f´(a)\cdot x - f´(a)\cdot a + f(a)$$

Dicha recta pasa por el origen cuando $-f´(a)\cdot a + f(a) = 0$: la de ecuación $y = f´(a)\cdot x$.

Como $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4 \Rightarrow f´(x) = \frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a + 4,\ f´(a) = \frac{1}{2}a + 4$.

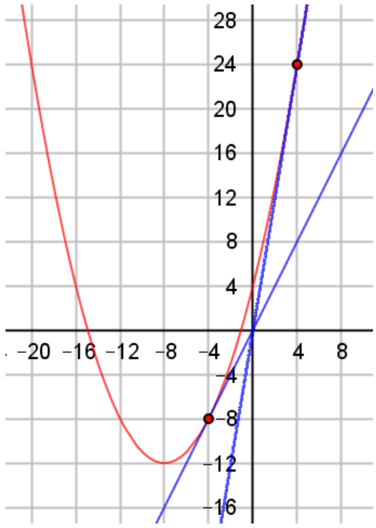
Por lo tanto, debe cumplirse que

$$-\left(\frac{1}{2}a + 4\right)\cdot a + \frac{1}{4}a^2 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4}a^2 + 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 4.$$

Los puntos de tangencia serán:

$$\left(-4, f(-4)\right) = (-4, -8);\ \left(4, f(4)\right) = (4, 24)$$



(ii) Para $a = 4$, $f´(4) = 6 \Rightarrow$ la tangente será $y = 6x$.

Para $a = -4$, $f´(-4) = 2 \Rightarrow$ la tangente es $y = 2x$

(La representación gráfica, que no se pide, se da para que el problema se comprenda mejor).

36. La Rioja, ordinaria 2022

3.– (2 puntos) Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

(i) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+a\,x+1}-(3x-1)\right)=2.$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e.$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=[\infty-\infty]$. Para resolver esta indeterminación es necesario transformar la función multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada; así:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(9x^2+ax+1\right)-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}\ 0$$ = (dividiendo cada término por x) =

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(a+6)x}{x}}{\sqrt{\dfrac{9x^2+ax+1}{x^2}}+\dfrac{3x-1}{x}}=\frac{a+6}{3+3}.$$

Si el valor de $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right)=2\Rightarrow\frac{a+6}{3+3}=2\Rightarrow a=6$.

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=\left[1^\infty\right]$ → esta indeterminación se transforma aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)\right)=[\infty\cdot\ln 1=\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$ → ahora puede aplicarse L´Hôpital:

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{3x+a}{3x-1}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{-3-3a}{(3x-1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3+3a)x^2}{(3x-1)^2}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$==(L'H)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2(3+3a)x}{6(3x-1)}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2(3+3a)}{18}\right)=\frac{1+a}{3}.$$

Por tanto, $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e^{\frac{1+a}{3}}$. Como se desea que $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+a}{3x-1}\right)^x=e\Rightarrow\frac{1+a}{3}=1\Rightarrow a=2$.

37. La Rioja, extraordinaria 2022

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función f, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión si los hubiera.

Solución:

(i) La función $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ no está definida cuando se anula el denominador: $(1+x)^2 = 0$; en $x = -1$. Por tanto, Dom(f) = **R** – {–1}.

La recta $x = -1$ es asíntota vertical, pues: $\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1+x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1 \text{ y}$$

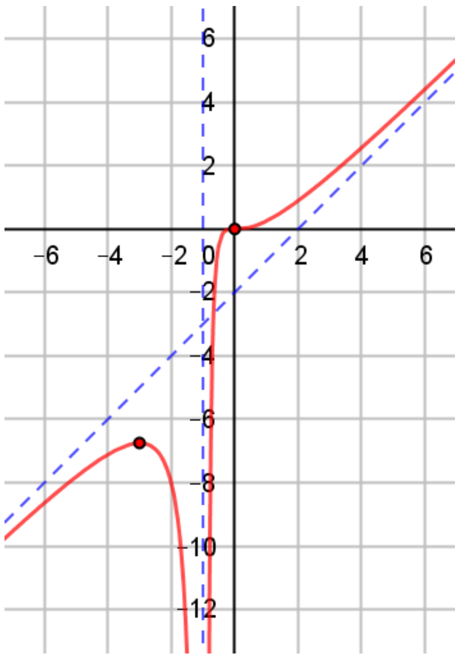
$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(1+x)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2$$

La asíntota es la recta $y = x - 2$.

(ii) Derivando:

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}.$$



Lugo: $f'(x) = 0$ en $x = -3$ y $x = 0$; $f''(x) = 0$ en $x = 0$.

Con esto:

Si $x < -3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si $-3 < x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Por tanto, en $x = -3$ hay un máximo: (–3, –27/4).

Si $x > -1$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si $x < -1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).

Si $-1 < x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).

Si $x > 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).

Por tanto, en $x = 0$ hay un punto de inflexión: (0, 0).

(La gráfica se da para que el problema se comprenda mejor).

38. Madrid, ordinaria 2022

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\,dx$.

Solución:

a) La función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ será continua y derivable en $x = 0$ cuando

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 e^{-1/x^2} = 0\cdot e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ la función es continua en $x = 0$.

Derivando:

Salvo en $x = 0$, $f'(x) = 3x^2 e^{-1/x^2} + x^3\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2} = \left(3x^2+2\right)e^{-1/x^2}$.

Como $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(3x^2+2\right)e^{-1/x^2} = 2\cdot e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ la función es derivable en $x = 0$.

b) Como $f(-x) = \begin{cases} (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(-x) = \begin{cases} -x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

Por tanto, la función es simétrica respecto del origen: impar.

c) Una primitiva de $\int \frac{f(x)}{x^6}dx = \int \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6}dx = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx$ puede hacerse ajustando constantes, teniendo en cuenta que $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$.

En este caso, como la derivada del exponente es $\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$, el ajuste es:

$$\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2}dx = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}.$$

Por tanto

$$\int_1^2 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx = \left[\frac{1}{2}e^{-1/x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}e^{-1/4} - \frac{1}{2}e^{-1}.$$

39. Madrid, ordinaria 2022

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a) El teorema de Bolzano dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Como $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y, además, $f(-1) = -\dfrac{1}{2} < 0$ y $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ la función cumple dicho teoema.

b) Derivando, $f'(x) = \dfrac{x^2+1-x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$ → se anula en $x = -1$ y $x = 1$, entonces:

- Si $x < -1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

Luego, en $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo.

- Si $x > 1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

c) Como la función es impar, el área pedida viene dada por

$$2\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

40. Madrid, extraordinaria 22

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

a y b) La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$ está definida, es continua y derivable en todo **R**, salvo en $x = 0$, en donde hay que comprobarlo.

Será continua y derivable en $x = 0$ cuando $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$.

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{x} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty \Rightarrow$ la función no es continua en $x = 0$. En consecuencia, tampoco será derivable.

c) Por la izquierda de $x = 0$, la función tiene una asíntota vertical, la recta $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{x} = -\infty$.

También tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$ ya que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$.

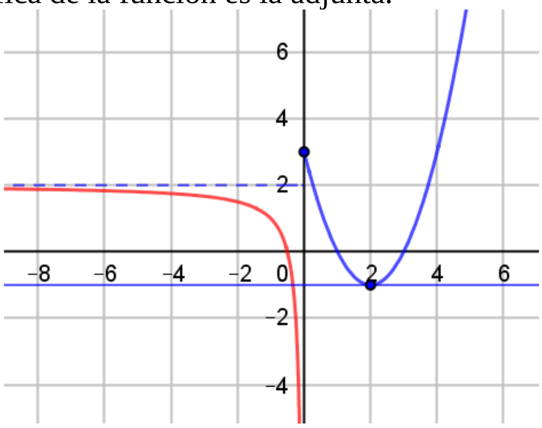
La asíntota es la recta $y = 2$.

d) Derivando $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$.

La pendiente de la tangente es nula en $x = 2$; punto $(2, -1)$. Su ecuación será $y = -1$.

En el punto $(2, -1)$ la función alcanza un mínimo, pues la derivada segunda es $f''(x) = 2 > 0$.

Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.



41. Madrid, extraordinaria 2022

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$.

Solución:

a) La función dada $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ está definida, es continua y derivable en todo **R**, salvo en $x = 0$, en donde hay que comprobarlo.

Será continua y derivable en $x = 0$ cuando $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Como:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0\cdot(-\infty)$, este límite debe hacerse por L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Al coincidir los límites laterales, la función es continua en $x = 0$.

Derivando, $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Las derivadas laterales en $x = 0$ no son iguales:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$.

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

b) A la izquierda de $x = 0$ la función es creciente: es una semirrecta de pendiente 1.

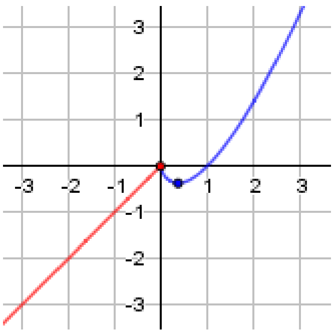
Para $x > 0$, la derivada se anula cuando $\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

- Si $0 < x < \frac{1}{e}$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece en ese intervalo.
- Si $x > \frac{1}{e}$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece cuando $x > \frac{1}{e}$.

Luego, en $x = \frac{1}{e}$ la función tiene un mínimo relativo: $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

En $x = 0$, como a su izquierda es creciente y a su derecha dececiente, la función tiene un máximo relativo; punto (0, 0).

(La gráfica no se pide).



d) La integral $\int x\ln(x)\,dx$ debe hacerse por partes.

Se hace

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx;\ dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

Luego,

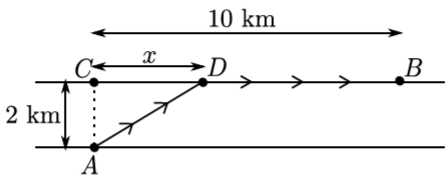
$$\int x\ln(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

Por tanto, $\int_1^2 x\ln(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-1-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}\right)=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

42. Murcia, ordinaria 2022

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **[1 p.]** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) **[1,5 p.]** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución:

a) La distancia recorrida nadando es $d(A,D)=\sqrt{x^2+4}$; el tiempo empleado en recorrerla es $t_1=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}$. (Recuérdese la relación entre velocidad, espacio y tiempo: $v=\frac{e}{t}\Leftrightarrow t=\frac{e}{v}$).

La distancia recorrida corriendo es $d(D,B)=10-x$; el tiempo empleado en recorrerla es $t_2=\frac{10-x}{12}$.

El tiempo total empleado será $t=f(x)=t_1+t_2 \to f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12}$.

b) El mínimo de $f(x)$ se da en la solución de $f'(x)=0$ que hace a $f''(x)>0$.

Derivando:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{10-x}{12} \Rightarrow f(x)=\frac{2x}{4\cdot 2\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{12}=\frac{3x-\sqrt{x^2+4}}{12\sqrt{x^2+4}}.$$

$$f´(x)=0 \text{ cuando } 3x-\sqrt{x^2+4}=0 \Rightarrow 3x=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow 9x^2=x^2+4 \Rightarrow 8x^2=4 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(La solución negativa no tiene sentido; supondría retroceder).
En vez de calcular la derivada segunda (en este caso resulta engorroso) puede estudiarse el signo de $f´(x)$ a izquierda y derecha de $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, observándose:

- si $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece:
- si $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

En consecuencia, en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene el mínimo buscado.

El tiempo mínimo que tardará el atleta en hacer el recorrido será

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{4}+\frac{10-\frac{1}{\sqrt{2}}}{12}=\frac{4+5\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \text{ h} \approx 1,3 \text{ h}.$$

<u>**43**. Murcia, ordinaria 2022</u>

4: Considere la función $f(x)=x\ln(x)$, definida para $x>0$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

<u>Solución</u>:

a) La derivada de $f(x)=x\ln(x)$ es $f´(x)=\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}=\ln(x)+1$.

Para $x>0$, la derivada se anula cuando $\ln x+1=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

- Si $0<x<\frac{1}{e}$, como $f´(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece en ese intervalo.
- Si $x>\frac{1}{e}$, como $f´(x)>0 \Rightarrow$ la función crece cuando $x>\frac{1}{e}$.

Luego, en $x=\frac{1}{e}$ la función tiene un mínimo relativo: $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$.

b) La integral $\int x\ln(x)\,dx$ debe hacerse por partes.

Tomando

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx;\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Luego,

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Si la primitiva buscada pasa por el punto (1, 0), entonces, $F(1) = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$.

Por tanto, $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$.

<u>**44**. Murcia, extraordinaria 2022</u>

3: Considere la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

b) **[1 p.]** Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

c) **[1 p.]** Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

<u>Solución</u>:

a) El límite pedido se hace aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

b) La función es continua en x = 1 cuando $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Luego, a = 1.

c) Una función $f(x)$ es derivable en x = 1 si existe el $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Como $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{\ln(1+h)}{h}-1}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) =$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{h\to0}\frac{\frac{-1}{(1+h)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto, la función es derivable en x = 1 y su derivada vale $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

45. Navarra, ordinaria 2022

P6) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

(0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

(1.75 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$ no está definida cuando $\sin x + \cos x = 0$.

Como $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x$, cuyas soluciones son $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, siendo una de ellas $x = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$, se deduce que la función no es continua en dicho punto.

b) Derivando $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} \cdot \left(\frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} \right)$.

Se anula cuando $\sin x = \cos x$: en los puntos $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, siendo uno de ellos $x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$.

El signo de la derivada viene determinado por el factor $-\cos x + \sin x$, pues tanto $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$ como $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$ son positivos

Con esto:

- Si $0 < x < \frac{\pi}{4}$, como $-\cos x + \sin x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, luego $f(x)$ decrece.
- Si $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, como $-\cos x + \sin x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, luego $f(x)$ crece.

Por tanto, en $x = \frac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo: punto $\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$.

- Si $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, como $-\cos x + \sin x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, luego $f(x)$ crece.

46. Navarra, ordinaria 2022

P7) Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2,-1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \dfrac{e^{x^2-2}}{x}$ es el cociente de dos funciones continuas en el intervalo [–2, –1]; por tanto, es continua en dicho intervalo.

b) También es derivable en el intervalo (–2, –1), siendo

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2-2}\cdot x - e^{x^2-2}\cdot 1}{x^2} = \frac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2-2}}{x^2}$$, que existe para todo x del intervalo.

Además, esta derivada es continua en [–2, –1].

En consecuencia, cumple el teorema de los valores intermedios en el intervalo [–2, –1], que dice: Si $f(x)$ es continua en [a, b], entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor c, $f(a) \le c \le f(b)$, existe un punto $\alpha \in [a, b]$, tal que $f(\alpha) = c$.

En este caso, como la función continua $f'(x) = \dfrac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2-2}}{x^2}$ cumple que:

$f'(-2) = \dfrac{7e^2}{4}$ y $f'(-1) = \dfrac{e^{-1}}{1} = \dfrac{1}{e}$, como es $\dfrac{7e^2}{4} > e > \dfrac{1}{e}$ $\Rightarrow$ existe un punto $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$.

47. Navarra, extraordinaria 2022

P5) Sea la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$ está definida para todo $x > 0$. Por tanto, es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) También es derivable en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, pues la función derivada siempre está definida.

La derivada es:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{4x}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{x}\right)$$, que está definida en todo ese intervalo.

Luego, la función dada, cumple las hipótesis del teorema del valor medio (incrementos finitos, de Lagrange), que dice:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

- Aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, entonces, existe un punto $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $\frac{f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{e - \frac{1}{e}} = f'(\alpha)$.

Como $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\ln e\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{1}{e}\right)}{e-\frac{1}{e}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{e^2-1}{e}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{e^2-1}{e}} = \frac{e\sqrt{2}}{e^2-1}$,

efectivamente, existe un punto $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{e^2-1}$.

48. Navarra, extraordinaria 2022

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x}$$

(1.25 puntos)

Solución:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\left[1^\infty\right]$.

Puede aplicarse la regla $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

Así, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}-1\right)\cdot(2x-1)}$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}-1\right)\cdot(2x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(-x+1)(2x-1)}{x^2+x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}\right)=-2\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}=e^{-2}.$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ Esta indeterminación se resuelve aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)e^x}{\frac{1}{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^x}{\frac{1}{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-2e^x}{-\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{4-2}{-1}=-2.$$

49. País Vasco, ordinaria 2022
Ejercicio A4
Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)\left(x^2-x-2\right)}dx$.

Solución:
Puede hacerse por descomposición en fracciones simples.
La raíz $x = -1$ es doble: $(x+1)\left(x^2-x-2\right)=(x+1)(x+1)(x-2)$.
Con esto:

$$\frac{7x+13}{(x+1)\left(x^2-x-2\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(-A+B+2C)+(-2A-2B+C)}{(x+1)^2(x-2)} \to \text{identificando coeficientes:}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+2C=7 \\ -2A-2B+C=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} A+C=0 \\ B+3C=7 \\ -2B+3C=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} A+C=0 \\ B+3C=7 \\ -3B=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ C=3 \\ B=-2 \end{cases}.$$

Luego:

$$\int \frac{7x+13}{(x+1)\left(x^2-x-2\right)}dx =$$

$$=\int\left(\frac{-3}{x+1}+\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x-2}\right)dx=-3\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+3\ln(x-2)+k.$$

50. País Vasco, ordinaria 2022
Ejercicio B3
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de *A*, *B* y *C* para que *f* se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y=2x+1$.
Solución:
Si $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ se anula en $x = 1 \Rightarrow 0=1+A+B+C$.
Si las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ son paralelas a la recta $y=2x+1 \Rightarrow f'(-1)=f'(3)=2$.
Como $f'(x)=3x^2+2Ax+B \Rightarrow f'(-1)=3-2A+B=2$ y $f'(3)=27+6A+B=2$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 1+A+B+C=0 \\ 3-2A+B=2 \\ 27+6A+B=2 \end{cases}$ se obtienen los valores de *A*, *B* y *C*.

$$\begin{cases} 1+A+B+C=0 \\ 3-2A+B=2 \\ 27+6A+B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=-1 \\ -2A+B=-1 \\ 6A+B=-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} A+B+C=-1 \\ -2A+B=-1 \\ 8A=-24 \end{cases} \Rightarrow A=-3;\ B=-7;\ C=9.$$

Por tanto, la función es: $f(x)=x^3-3x^2-7x+9$.