PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EvAU–EBAU–PEBAU… DE 2021

En las páginas que siguen están resueltos todos los problemas propuestos en los exámenes de Acceso a la Universidad, (antigua *Selectividad*), del curso 2020/2021 en las convocatorias de junio (ordinaria) o julio y septiembre (extraordinaria). En total son 49 problemas.
En cuatro distritos universitarios (Andalucía, Cataluña, Comunidad Valenciana y Navarra) no se propusieron problemas de este bloque.

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de PROBABILIDAD (en todos los distritos universitarios) son:
1) Probabilidad elemental: unión e intersección de sucesos; contrarios; sucesos dependientes e independientes. Uso de diagramas de Venn.
2) Probabilidad total; Bayes… Elaboración de diagramas de árbol o de tablas de contingencia.
3) Distribución binomial. Cálculo de probabilidades asociadas. Ajuste de una binomial mediante una normal; corrección de continuidad.
4) Distribución normal. Cálculo de probabilidades asociadas; uso de la tabla normal estándar. Valor de *Z* correspondiente a una probabilidad dada.

1. Aragón, junio 2021

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

Solución:

a) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta se distribuye como una *N*(120, 30). Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-120}{30}$.

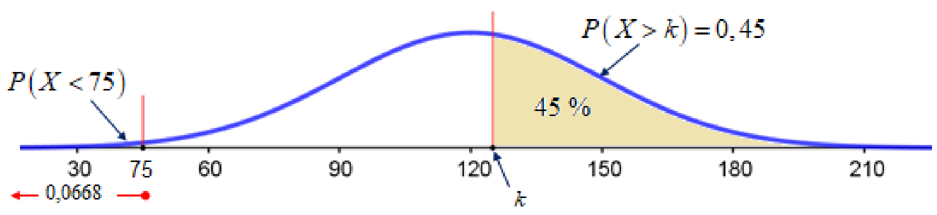
Con esto:

$$P(X<75)=P\left(Z<\frac{75-120}{30}\right)=P(Z<-1,5)=1-P(Z<1,5)=1-0,9332=0,0668.$$

b) Hay que encontrar el valor de *k* tal que $P(X>k)=0,45 \Leftrightarrow P(X<k)=0,55$

Luego: $P\left(Z<\dfrac{k-120}{30}\right)=0,55 \Rightarrow \dfrac{k-120}{30}\approx 0,126 \Rightarrow k\approx 120+3,78=123,78$.

El valor 0,126 se obtiene interpolando.
(En la tabla normal: al valor de probabilidad 0,5478 $\to$ z = 0,12; a 0,5517 $\to$ z = 0,13 $\Rightarrow$ a 0,55 $\to$ $z\approx$ 0,126).



2. Aragón, extraordinaria 2021

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Solución:

Con los datos proporcionados en el enunciado puede construirse la siguiente tabla.

Coche	Defectuoso (*D*)	Correcto (*C*)	Total
Eléctrico (*E*)	12	73	85
Híbrido (*H*)	31	114	145
Total	43	187	230

Los datos dados se han subrayado, los demás se deducen.

a) De los 230 vehículos hay 114 que son híbridos y correctos. Por tanto:

P(híbrido y correcto) = $P(H \cap C) = \frac{114}{230} = \frac{57}{115}$.

b) Entre los 145 coches híbridos hay 31 con defecto, luego:

P(sea defectuoso si es híbrido) = $P(D/H) = \frac{31}{145}$.

3. Aragón, extraordinaria 2021

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Solución:

La variable aleatoria *X* que mide el número de deportistas (de gimnasia deportiva) elegidos para las próximas olimpiadas es una binomial $B\left(9,\ \frac{1}{7}\right)$, pues *n* = 9 y $p = \frac{1}{7} \to q = 1 - p = \frac{6}{7}$.

Con esto:

a) La probabilidad de que de que sean elegidos exactamente 2 de los 9 es:

$$P(X=2) = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{6^7}{7^9} = 36 \cdot \frac{279936}{40353607} \approx 0,2497.$$

b) La probabilidad de "al menos 1" es la contraría de "ninguno". Vale:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 1 - \frac{10077696}{40353607} \approx 1 - 0,2497 = 0,7503.$$

4. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 4.A En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

Solución:

Se definen los sucesos: $A1$ = "ascensor 1º"; $A2$ = "ascensor 2º"; F = "el ascensor falla".

Se conocen las probabilidades:

$$P(A1)=0,6;\ P(A2)=0,4;\ P(F/A1)=0,03;\ P(F/A2)=0,08.$$

a) Por la probabilidad total, la probabilidad de que el ascensor falle será:

$$P(F)=P(A1)\cdot P(F/A1)+P(A2)\cdot P(F/A2) = 0,6\cdot 0,03+0,4\cdot 0,08=0,05.$$

b) Por la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A2/F)=\frac{P(A2\cap F)}{P(F)}=\frac{0,4\cdot 0,08}{0,05}=\frac{0,32}{0,05}=0,64.$$

5. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6, 10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

Solución:

La variable aleatoria $N(10, 2)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-10}{2}$.

Con esto:

a) $$P(6\leq X<10)=P(X\leq 10)-P(X\leq 6)=P\left(Z\leq\frac{10-10}{2}\right)-P\left(Z\leq\frac{6-10}{2}\right)=$$
$$P(Z\leq 0)-P(Z\leq -2)=P(Z\leq 0)-(1-P(Z\leq 2))=0,5-(1-0,9772)=0,4772.$$

b) Para el nuevo valor de σ se sabe que,

$$P(X\leq 12)=P\left(Z\leq\frac{12-10}{\sigma}\right)=0,80\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{2}{\sigma}\right)=0,80\Rightarrow\ \frac{2}{\sigma}=0,8416\Rightarrow\sigma\approx 2,3764.$$

6. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 4.A Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Solución:

Con los datos del problema se puede construir el diagrama de árbol adjunto.

Se designa por: *n*, bola negra; *r*, bola roja; *Dn*, dado negro; *Dr*, dado rojo.

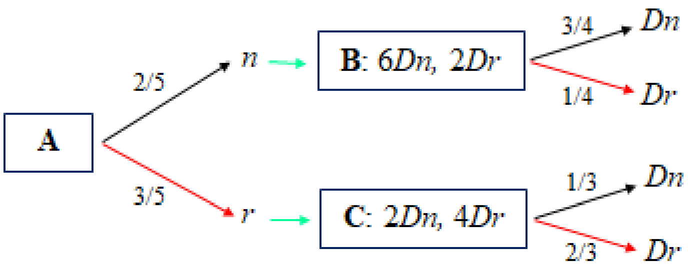
Las probabilidades de cada suceso son las que se indican:

$$P(n)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};\ P(r)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$

$$P(Dn/B)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};$$

$$P(D/B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4};$$

$$P(Dn/C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ P(Dr/C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$



Con esto:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos es:

$$P(r\cap Dr)=P(r)\cdot P(Dr/C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}.$$

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color es:

$$P(n\cap Dn)+P(r\cap Dr)=P(n)\cdot P(Dn/B)+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}.$$

c) Por la probabilidad total:

$$P(Dr)=P(n)\cdot P(Dr/B)+P(r)\cdot P(Dr/C)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

7. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)

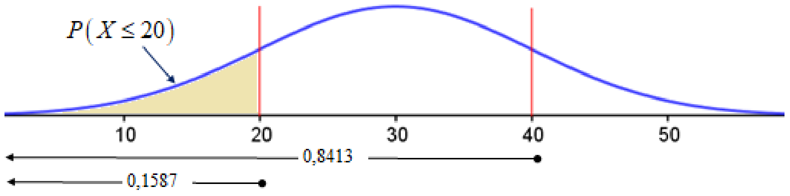
b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$. y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica? (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.6745) = 0.75$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

Solución:

La normal es $N(30,\ 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-30}{10}$.

a) $P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \dfrac{20-30}{10}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1)$ = 1 – 0,8413 = 0,1587.



b) Para el nuevo valor de σ se sabe que,

$$P(X \leq 35) = P\left(Z \leq \frac{35-\bar{x}}{\sigma}\right) = 0,50 \Rightarrow \frac{35-\bar{x}}{\sigma} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 35.$$

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40-35}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0,75 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 0,6745 \Rightarrow \sigma \approx 7,4129.$$

8. Baleares, ordinaria 2021

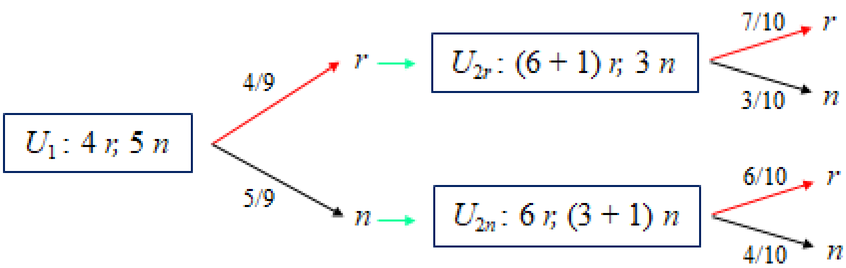
7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2. Calcula la probabilitat que:

(a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)

(b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)

(c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

Solución:
Con los datos del problema se puede construir el diagrama de árbol que sigue.
Se designa por: *r*, bola roja; *n*, bola negra.



Las probabilidades de cada suceso son las que se indican en el diagrama. Con esto:

a) La probabilidad de que la bola extraída de U_2 sea roja es:

$$P(r \text{ de } U_2) = P(r \text{ de } U_1) \cdot P(r \text{ de } U_{2r}) + P(n \text{ de } U_1) \cdot P(r \text{ de } U_{2n}) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{58}{90} = \frac{29}{45}.$$

Con esto, $P(n \text{ de } U_2) = 1 - P(r \text{ de } U_2) = 1 - \frac{29}{45} = \frac{16}{45}$.

b) Por la probabilidad condicionada,

$$P((n \text{ de } U_1)/(n \text{ de } U_2)) = \frac{P(n \text{ de } U_1) \cap (n \text{ de } U_{2n})}{P(n \text{ de } U_2)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{16}{45}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

c) Sacar al menos una bola roja es el suceso contrario de sacar las dos negras.

La probabilidad no sacar ninguna roja es: $P(n \text{ de } U_1) \cap (n \text{ de } U_{2r}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{9}$.

Luego, la probabilidad de sacar al menos una bola roja será:

$$P(\text{al menos una } r) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

9. Baleares, ordinaria 2021

8. Una companyia aèria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:

   (a) pesi menys de 7,2 kg però més de 7 kg. (4 punts)

   (b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)

   (c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

Solución:

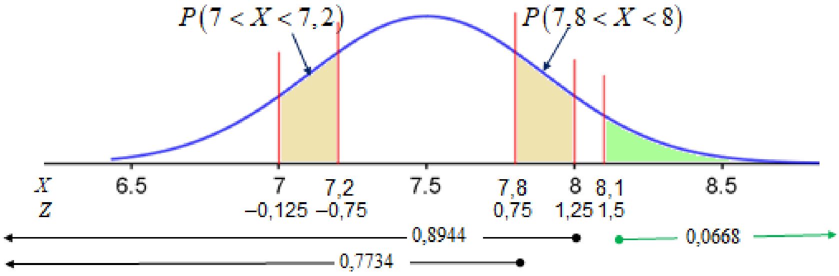
La distribución de pesos de las maletas es $N(7{,}5,\ 0{,}4)$, en kg. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 7{,}5}{0{,}4}$.

Por tanto, aplicando la *N*(0, 1) se obtiene:

(a) $P(7 < X < 7{,}2) = P(X < 7{,}2) - P(X < 7) = P\left(Z < \dfrac{7{,}2 - 7{,}5}{0{,}4}\right) - P\left(Z < \dfrac{7 - 7{,}5}{0{,}4}\right) =$

$= P(Z < -0{,}75) - P(Z < -1{,}25) = 1 - P(Z < 0{,}75) - \left(1 - P(Z < 1{,}25)\right) =$

$= P(Z < 1{,}25) - P(Z < 0{,}75)$ = 0,8944 – 0,7734 = 0,1210



(b) $P(7{,}8 < X < 8) = P\left(Z < \dfrac{8 - 7{,}5}{0{,}4}\right) - P\left(Z < \dfrac{7{,}8 - 7{,}5}{0{,}4}\right) = P(Z < 1{,}25) - P(Z < 0{,}75) =$

= 0,1210.

(c) La probabilidad de que una maleta pese al menos 8,1 kg es:

$P(X > 8{,}1) = P\left(Z > \dfrac{8{,}1 - 7{,}5}{0{,}4}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5)$ = 1 – 0,9332 = 0,0668.

Si hay 90 maletas, cabe esperar que 90 · 0,0668 = 6,012 (se redondea a 6) maletas pesen más de 8,1 kg.

10. Baleares, extraordinaria 2021

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

(a) A="les dues bolles són vermelles" (2 punts)

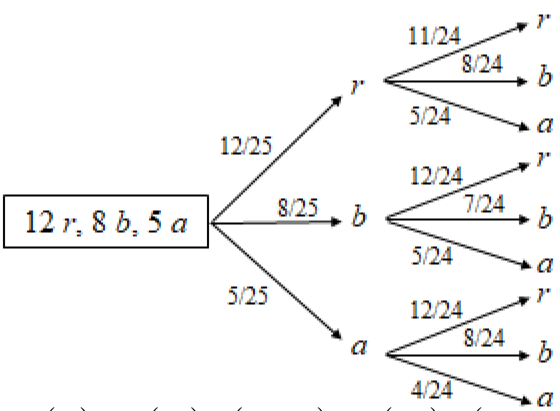
(b) B="les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

(c) C="almenys una bolla és vermella" (3 punts)

(d) D="cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

Solución:

Con los datos del problema puede confeccionarse el diagrama de árbol adjunto. Los sucesos bola roja, bola blanca y bola azul se designan por r, b y a, respectivamente. Como el experimento se realiza sin reemplazamiento, el color de la primera bola extraída condiciona el de la segunda bola.



Con esto:

(a) El suceso A = {1ª r y 2ª r} = {rr}.

Su probabilidad es:

$P(R)=P([1])\cdot P(R/[1])+P([2])\cdot P(R/[2])+P([3])\cdot P(R/[$

$$P(rr)=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}=\frac{11}{50}=0,22.$$

(b) El suceso B = {rr, bb, aa}.

Su probabilidad es:

$$P(rr,bb,aa)=P(rr)+P(bb)+P(aa)=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{208}{600}\approx 0,3467.$$

(c) El suceso C, "alguna bola es roja", es el contrario de "ninguna bola es roja", $\overline{C}$ = {bb, ba, ab, aa}.

La probabilidad de $\overline{C}$ es:

$$P(\overline{C})=P(bb)+P(ba)+P(ab)+P(aa)=\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}+\frac{8}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{8}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{154}{600}.$$

Luego,

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{156}{600}=\frac{37}{50}=0,74.$$

(d) El suceso D, "ninguna de las dos bolas es roja", es el contrario de "alguna bola es roja"; es el suceso $\overline{C}$ indicado anteriormente. Su probabilidad de $\overline{C}$ es: $P(\overline{C})=\frac{156}{600}=0,26$.

11. Baleares, extraordinaria 2021

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

   (a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)

   (b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)

   (c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

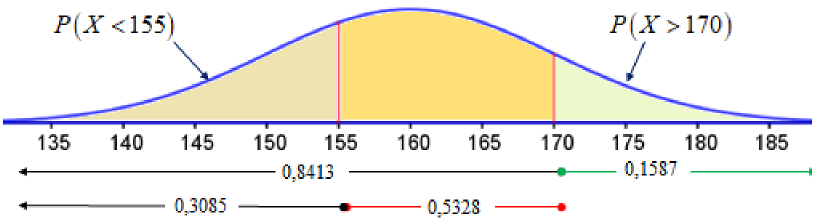
Solución:

Se trata de una normal $N(160,\ 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-160}{10}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

(a) $P(X>170)=P\left(Z>\dfrac{170-160}{10}\right)=P(Z>1)$ = $1-P(Z<1)$ = 1 – 0,8413 = 0,1587.

(b) $P(X<155)=P\left(Z<\dfrac{155-160}{10}\right)=P(Z<-0{,}5)$ = $1-P(Z<0{,}5)$ = 1 – 0,6915 = 0,3085.



(c) $P(155<X<170)=P(X<170)-P(X<155)=P(Z<1)-P(Z<-0{,}5)$ =
   = 0,8413 – 0,3085 = 0,5328.

<u>**12**. Islas Canarias, ordinaria 2021</u>

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

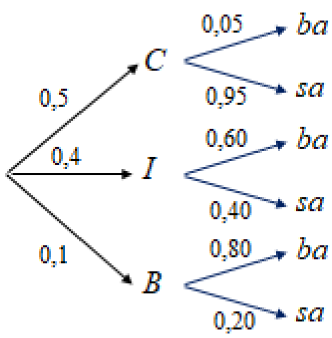
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. 0.5 ptos

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas. 1 pto

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1 1 pto

<u>Solución</u>:

a) Se designa por *ba* el suceso “el desayuno incluye bebidas azucaradas” y por *sa* su contrario: “sin bebidas azucaradas”; y por *C*, *I* y *B*, los sucesos llevar el desayuno desde casa, comprarlo en el instituto o en un bazar, respectivamente.



Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol de la derecha.

b) La probabilidad de que un desayuno, elegido al azar, incluya bebidas azucaradas es:

$$P(ba) = P(C) \cdot P(ba/C) + P(I) \cdot P(ba/I) + P(B) \cdot P(ba/B) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,60 + 0,1 \cdot 0,80 = 0,345.$$

El 34,5 % de los desayunos incluye bebidas azucaradas; es más del 30 %.

c) Por la probabilidad condicionada, la probabilidad de que el desayuno provenga de casa, sabiendo que incluye bebidas azucaradas, es

$$P(C/ba) = \frac{P(C) \cdot P(ba/C)}{P(ba)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,345} = \frac{25}{345} \approx 0,072.$$

Esta probabilidad es menor que 0,1.

13. Islas Canarias, ordinaria 2021

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes? 1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes? 1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes? 0.5 ptos

Solución:

a) La variable *X* que mide el número de éxitos del medicamento se distribuye como una binomial *B*(100, 0,80).

→ *n* = 100 es el número de ensayos; *p* = 0,80 es la probabilidad de que el medicamento tenga éxito (elimine el acné); siendo *q* = 1 – *p* = 0,20, la probabilidad de fracaso.

Como la binomial *B*(*n*, *p*) tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, puede aproximarse mediante la normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right)$. Esta aproximación puede realizarse cuando *n* es grande y tanto np como nq son mayores que 5.

En este caso, como μ = 100 · 0,80 = 80 y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,80 \cdot 0,20} = 4$, la *B*(100, 0,80) se aproxima por la *N*(80, 4), que, a su vez, se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-80}{4}$.

Con esto:

$$P(X > 75) = P(X' > 75,5) = P\left(Z > \frac{75,5-80}{4}\right) = P(Z > -1,125) = P(Z < 1,125) =$$

$$= \frac{0,8686 + 0,8708}{2} = 0,8697.$$

(Se ha hecho la corrección de continuidad y el valor de probabilidad es el intermedio entre *Z* = 1,12 y *Z* = 1,13).

b) Si se toman 225 pacientes, la binomial *B*(225, 0,8) se aproxima por la normal

$$N\left(225 \cdot 0,8,\ \sqrt{225 \cdot 0,8 \cdot 0,2}\right) = N(180,\ 6).$$

Luego,

$$P(170 < X < 190) = P(169,5 < X' < 190,5) = P\left(Z < \frac{190,5-180}{6}\right) - P\left(Z < \frac{169,5-180}{6}\right) =$$

$$= P(Z < 1,75) - P(Z < -1,75) = 0,9599 - (1 - 0,9599) = 0,9198.$$

La probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es del 3,427 %.

c) Como la probabilidad de que no se elimine el acné es 0,20, si se toman 500 pacientes, cabe esperar que en 100 de ellos (500 · 0,20 = 100) NO se elimine el acné.

14. Islas Canarias, extraordinaria 2021

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20% 1.25 ptos

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote? 0.75 ptos

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas? 0.5 ptos

Solución:

La probabilidad de que una arandela sea defectuosa es p = 0,01; la de su contrario, q = 0,99. Si se seleccionan 20 arandelas de ese tipo, el número de ellas, X, que son defectuosas puede medirse como una binomial B(20, 0,01).

Con esto:

a) La probabilidad de encontrar 1 o 2 defectuosas será:

$$P(X=1 \text{ o } X=2)=P(X=1)+P(X=2)=\binom{20}{1}\cdot 0,01^1\cdot 0,99^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0,01^2\cdot 0,99^{18}=$$

$$=20\cdot 0,01^1\cdot 0,99^{19}+\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}\cdot 0,01^2\cdot 0,99^{18}\approx 0,1652+0,0159=0,1811\to 18,11\ \%.$$

El porcentaje de arandelas defectuosas es inferior al 20 %.

→ Puede recordarse que $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

b) El suceso "al menos una defectuosa" ($X \geq 1$) es el contrario al suceso "ninguna defectuosa", $X = 0$.

Como

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot 0,01^0\cdot 0,99^{20}\approx 0,8179 \quad \Rightarrow$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,8179=0,1821.$$

c) La binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$. En este caso, $\mu = 200 \cdot 0,01 = 2$.

Como la media esperada de defectuosas es 2, la de arandelas sin defecto será 198.

15. Islas Canarias, extraordinaria 2021

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos. 1.25 ptos

b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación? 1.25 ptos

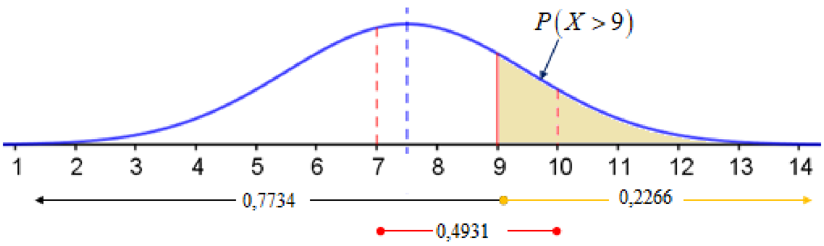
Solución:

La distribución que mide el tiempo de espera es $N(7{,}5,\ 2)$, en minutos. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-7{,}5}{2}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

a) $P(X>9)=P\left(Z>\dfrac{9-7{,}5}{2}\right)=P(Z>0{,}75)=1-P(Z<0{,}75)$ = 1 – 0,7734 = 0,2266.

El 22,66 % de las personas espera más de 9 minutos.



(b) $P(7<X<10)=P\left(Z<\dfrac{10-7{,}5}{2}\right)-P\left(Z<\dfrac{7-7{,}5}{2}\right)=P(Z<1{,}25)-P(Z<-0{,}25)$ =

= $P(Z<1{,}25)-(1-P(Z<0{,}25))$ = 0,8944 – (1 – 0,5987) = 0,4931.

No es correcta la afirmación de Correos, ese porcentaje es del 49,31 %.

16. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

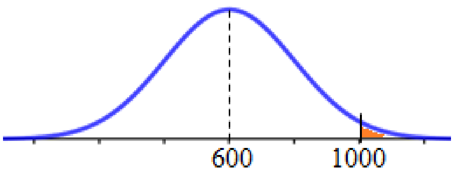
Solución:

Se trata de una normal $N(600,\ 200)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-600}{200}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

1) $P(X>1000)=P\left(Z>\dfrac{1000-600}{200}\right)=$

$=P(Z>2)=1-P(Z<2)$ = 1 – 0,9772 = 0,0228.



2) Un 1 entre 1000 se corresponde con una probabilidad de 0,001.
Hay que encontrar el valor t, tal que $P(X\le t)=0{,}999$.

Luego:

$$P\left(Z<\frac{t-600}{200}\right)=0{,}999 \Rightarrow \frac{t-600}{200}=3{,}08 \Rightarrow t=3{,}08\cdot 200+600=1216 \text{ ng/dl.}$$

17. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Solución:

Si se designan por b, n, g/b y g/n, los sucesos jugar con blancas, negras, ganar si se juega con blancas y ganar si se juega con negras, respectivamente, se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(b)=0{,}5;\ P(n)=0{,}5;\ P(g/b)=0{,}4;\ P(g/n)=0{,}3$$

1) Por la probabilidad total, la probabilidad de ese jugador gane una partida será:

$P(g)=P(b)\cdot P(g/b)+P(n)\cdot P(g/n)$ = 0,5 · 0,4 + 0,5 · 0,3 = 0,35.

2) Por la probabilidad condicionada, la probabilidad de que haya jugado con blancas sabiendo que ha ganado, es:

$$P(b/g)=\frac{P(b)\cdot P(g/b)}{P(g)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}35}=\frac{20}{35}\approx 0{,}57.$$

18. Cantabria, extraordinaria 2021

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Solución:

Si se designan por $E1$, $E2$, $S/E1$ y $S/E2$, los sucesos eclosionar primero, segundo, ser superviviente si eclosionó primero o segundo, respectivamente, se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(E1)=0,5;\ P(E2)=0,5;\ P(S/E1)=0,6;\ P(S/E2)=0,3$$

1) La probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente será:

$$P(S)=P(E1)\cdot P(S/E1)+P(E2)\cdot P(S/E2) = 0,5\cdot 0,6+0,5\cdot 0,3=0,45.$$

2) Por la probabilidad condicionada, la probabilidad de que un ave adulta (por tanto, un superviviente) proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar, es:

$$P(E2/S)=\frac{P(E2)\cdot P(S/E2)}{P(S)}=\frac{0,5\cdot 0,3}{0,45}=\frac{1}{3}.$$

19. Cantabria, extraordinaria 2021

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

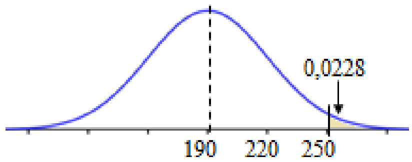
1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

Solución:

Se trata de una normal $N(190,\ 30)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-190}{30}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:



1) $P(X>250)=P\left(Z>\frac{250-190}{30}\right)=$

$= P(Z>2)=1-P(Z<2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$

2) Un 1 % se corresponde con una probabilidad de 0,01.

Hay que encontrar el valor c, tal que $P(X\le c)=0,99$.

Luego:

$$P\left(Z<\frac{c-190}{30}\right)=0,99 \Rightarrow \frac{c-190}{30}\approx 2,33 \Rightarrow c=2,33\cdot 30+190=259,9 \text{ mg/dl}.$$

20. Castilla y León, ordinaria 2021

E9.- (Probabilidad y Estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**

b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

Solución:

Sean los sucesos: *H*, ser hombre; *M*, ser mujer; *N*, practicar la natación; N/H y N/M designan los sucesos practicar la natación en el supuesto de ser hombre o mujer, respectivamente.

Se conocen los siguientes valores de probabilidad:

$$P(H)=0,55;\quad P(M)=0,45;\ P(N/H)=0,60;\ P(N/M)=0,40.$$

a) La probabilidad de que un socio elegido al azar practique natación será:

$$P(N)=P(H)\cdot P(N/H)+P(M)\cdot P(N/M) = 0,55\cdot 0,60 + 0,45\cdot 0,40 = 0,51.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(M/N)=\frac{P(M)\cdot P(N/M)}{P(N)}=\frac{0,45\cdot 0,40}{0,51}=\frac{18}{51}\approx 0,353.$$

21. Castilla y León, ordinaria 2021

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**

b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

Solución:

Se trata de una distribución normal *N*(20, 4).

Se tipifica haciendo el cambio

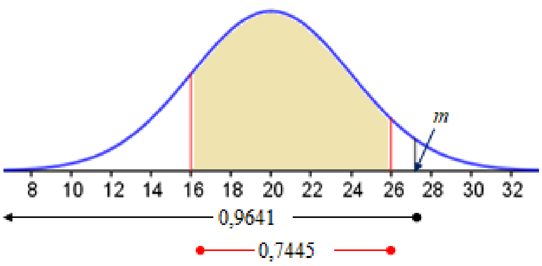
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-20}{4}.$$

a) $P(16<X<26)=P\left(\frac{16-20}{4}<Z<\frac{26-20}{4}\right)=$

$= P(-1<Z<1,5)=P(Z<1,5)-P(Z<-1)=$

$= P(Z<1,5)-(1-P(Z<1))=$

$= 0,9332 - (1 - 0,8413) = 0,7445 \to 74,45$ %.



b) Hay que encontrar el valor de *m* tal que $P(X<m)=0,9641$.

Luego: $P\left(Z<\frac{m-20}{4}\right)=0,9641$ (Tabla normal) $\Rightarrow \frac{m-20}{4}=1,8\Rightarrow m=20+1,8\cdot 4=27,2$.

Son necesarios 27,2 minutos para garantizar que se ha obtenido respuesta del 96,41 % de los test.

22. Castilla y León, extraordinaria 2021

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

• El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
• El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
• El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: $B =$ "ser blanca", $R =$ "ser roja", $V=$ "ser verde" y $M =$ "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0'3 puntos)**

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0'7 puntos)**

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

Solución:

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(B)=0,48;\ P(R)=0,24;\ P(V)=0,28.$$

a) También se indica en el enunciado que:

$$P(M/B)=\frac{2}{3};\ P(M/R)=\frac{3}{4};\ P(M/V)=\frac{1}{2}.$$

b) Por tanto, por la expresión de la probabilidad total, si se extrae una bola al azar, la probabilidad de que sea de madera, será:

$$P(M)=P(B)\cdot P(M/B)+P(R)\cdot P(M/R)+P(V)\cdot P(M/V)=$$

$$=0,48\cdot\frac{2}{3}+0,24\cdot\frac{3}{4}+0,28\cdot\frac{1}{2}=0,64.$$

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(B/M)=\frac{P(B)\cdot P(M/B)}{P(M)}=\frac{0,48\cdot\frac{2}{3}}{0,64}=\frac{32}{64}=0,5.$$

23. Castilla y León, extraordinaria 2021

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(100, 20)$.

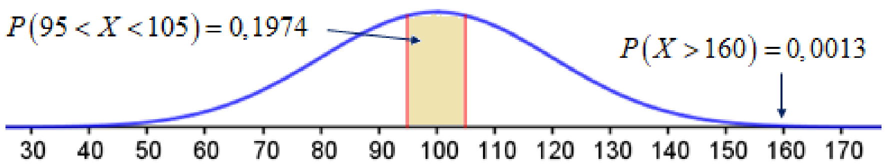
Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 100}{20}$.

a) $P(95 < X < 105) = P\left(\frac{95-100}{20} < Z < \frac{105-100}{20}\right) =$

$= P(-0,25 < Z < 0,25) = P(Z < 0,25) - P(Z < -0,25) =$

$= P(Z < 0,25) - (1 - P(Z < 0,25))$ = 0,5987 – (1 – 0,5987) = 0,1974.

El 19,74 % de los españoles adultos tiene un cociente intelectual entre 95 y 105.



b) La probabilidad de que un adulto no tenga un cociente intelectual superior al 160 es

$P(X < 160) = P\left(Z < \frac{160-100}{20}\right) = P(Z < 3) = 0,9987$.

Por tanto, la probabilidad de que sea superdotado, $P(X > 160) = 1 - 0,9987 = 0,0013$; esto implica que el porcentaje de superdotados es 0,13 %.

24. Castilla–La Mancha, ordinaria 2021

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) [**0,5 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a.2) [**0,75 puntos**] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

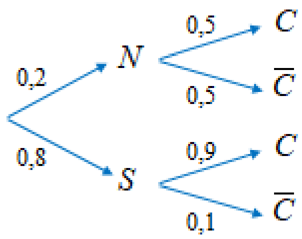
b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) [**0,5 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) [**0,75 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

Solución:

a) La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto.
Las letras *N* y *S* indican los sucesos No compartir fotografías o Sí hacerlo. Con *C* se designa el suceso comentar una fotografía, siendo su contrario $\overline{C}$.



a1) La probabilidad de que un usuario de esa red haya comentado alguna vez una fotografía será:

$$P(C) = P(N)\cdot P(C/N) + P(S)\cdot P(C/S) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,9 = 0,82.$$

Por tanto, la probabilidad de que no haya comentado fotografía alguna es:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,82 = 0,18.$$

a2) Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía, la probabilidad de que sea de los que comparte fotos será:

$$P(S/\overline{C}) = \frac{P(S)\cdot P(\overline{C}/S)}{P(\overline{C})} = \frac{0,8\cdot 0,1}{0,18} = \frac{8}{18} \approx 0,44.$$

b1) Sea *X* la variable que mide el número de fotografías identificadas de manera correcta (acertar); se distribuye como una binomial *B*(4, 0,8).
→ *p* = 0,80 es la probabilidad de acertar; *q* = 1 – *p* = 0,20, la probabilidad de fallar.
Con esto:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4}\cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

b2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0}\cdot 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 1 - 0,0016 = 0,9984.$

25. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2021

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

Solución:

a) Sean los sucesos:

L = paciente leve; G = paciente grave; I = el paciente ingresa en el hospital.

Con I/L e I/G se designa que el paciente leve o grave ingresa en el hospital.

Se conocen los siguientes valores de probabilidad:

$$P(L)=0,90\,;\ P(G)=0,10\,;\ P(I/L)=0,20\,;\ P(I/G)=0,60\,.$$

a1) La probabilidad de que un paciente elegido al azar ingrese en el hospital será:

$$P(I)=P(L)\cdot P(I/L)+P(G)\cdot P(I/G) = 0,90\cdot 0,20+0,10\cdot 0,60=0,24.$$

a2) Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, la probabilidad de que llegase con una dolencia leve es:

$$P(L/I)=\frac{P(L)\cdot P(I/L)}{P(I)}=\frac{0,90\cdot 0,20}{0,24}=\frac{18}{24}=0,75\,.$$

b1) Sea X la variable que mide el número de pacientes con dolencias leves que tienen que ingresar; se distribuye como una binomial $B(8,\ 0,90)$.

→ $n = 8$, el número de pacientes que acuden a urgencias; $p = 0,90$ es la probabilidad de un paciente llegue con dolencias leves; $q = 1 - p = 0,10$, la probabilidad de su contrario: que llegue con dolencia grave.

Con esto:

$$P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0,90^4\cdot 0,10^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,00006561\approx 0,0046\,.$$

→ Puede recordarse que $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

b2) $P(X\le 7)=1-P(X=8)=1-\binom{8}{8}\cdot 0,90^8=1-0,43046721\approx 0,5695\,.$

Los valores de probabilidad pueden obtenerse en la tabla dada:

Casilla 4, 0,9 → 0,0046; Casilla 8, 0,9 → 0,4315.

26. Extremadura, ordinaria 2021

9. Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B. Compra el 40 % a la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa. (1 punto)

b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A. (1 punto)

Solución:

Se conoce la probabilidad de los siguientes sucesos:

$P(A)=0,40$; $P(B)=0,60$.

Si D indica que el lote es defectuoso, se sabe también que:

$P(D/A)=0,03$; $P(D/B)=0,01$.

a) Por la probabilidad total, la probabilidad de que una rueda elegida al azar sea defectuosa es:

$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)$ = 0,40 · 0,03 + 0,60 · 0,01 = 0,018.

b) Por la probabilidad condicionada se tendrá:

$$P(A/D)=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)}=\frac{0,40\cdot 0,03}{0,018}=\frac{12}{18}\approx 0,6667.$$

27. Extremadura, ordinaria 2021

10. Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6, 5 y desviación típica de 1, 5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5). (1 punto)

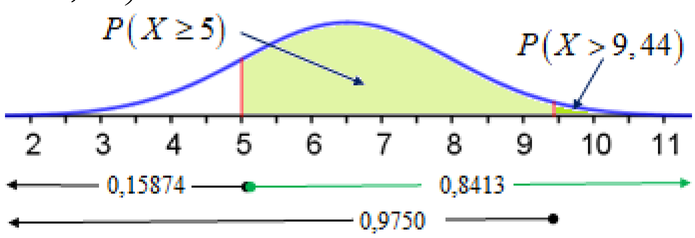
b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97, 50 % de las notas. (1 punto)

Solución:

La variable X que mide la nota se ajusta a una distribución normal N(6,5, 1,5).

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-6,5}{1,5}$.

a) $P(X\geq 5)=P\left(Z\geq\frac{5-6,5}{1,5}\right)=P(Z\geq -1)=P(Z\leq 1)$ = 0,8413.



b) Hay que encontrar el valor de n tal que $P(X<n)=0,9750$.

Luego: $P\left(Z<\frac{n-6,5}{1,5}\right)=0,9750\Rightarrow\frac{n-6,5}{1,5}=1,96\Rightarrow n=6,5+1,5\cdot 1,96=9,44$.

La nota pedida es n = 9,44.

28. Extremadura, extraordinaria 2021

9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

Solución:

Sean los sucesos:

I = hablar inglés; E = hablar español; $I \cap E$ = hablar los dos idiomas.

Se sabe que:

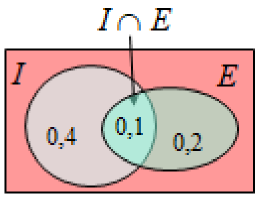
$$P(I)=\frac{500}{1000}=0,5;\ P(E)=\frac{300}{1000}=0,3;\ P(I\cap E)=\frac{100}{1000}=0,1$$

a) La probabilidad de que un estudiante hable alguno de los dos idiomas es:

$P(I\cup E)=P(I)+P(E)-P(I\cap E)$ = 0,5 + 0,3 – 0,1 = 0,7.

b) Por la probabilidad condicionada,

$$P(E/I)=\frac{P(I\cap E)}{P(I)}=\frac{0,1}{0,5}=\frac{1}{5}=0,20.$$



Nota: Podría hacerse un diagrama de Venn como el adjunto.

29. Extremadura, extraordinaria 2021

10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

Solución:

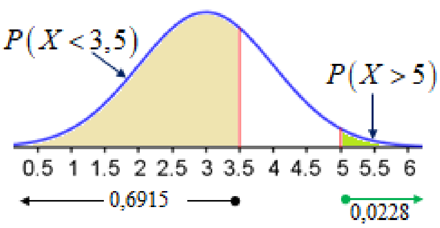
La variable X, que mide la duración de un Smartphone se distribuye normalmente según la $N(3, 1)$, en años. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-3}{1}$.

Con esto:

a) $P(X<3,5)=P\left(Z<\frac{3,5-3}{1}\right)=P(Z<0,5)=0,6915$.

b) $P(X>5)=P\left(Z>\frac{5-3}{1}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)=$

= 1 – 0,9772 = 0,0228.



30. Galicia, ordinaria 2021

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

Solución:

a) Teniendo en cuenta que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

si $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ y $P(A \cup B) = 0{,}8$, entonces:

$$0{,}8 = P(A) + 2P(A) - 0{,}1 \Rightarrow 3P(A) = 0{,}9 \Rightarrow P(A) = 0{,}3.$$

b) Los sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

En este caso, como $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}3$, deberá cumplirse que

$$P(A \cap B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18.$$

Como $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}82$ y, por una de las leyes de Morgan,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}82 = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}18.$$

Por tanto, los sucesos considerados son independientes.

31. Galicia, ordinaria 2021

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Solución:

La variable X que mide el número de personas contagiadas se distribuye como una binomial $B(8,\ 0{,}10)$.

→ $n = 8$, el número de personas de contacto; $p = 0{,}10$ es la probabilidad de una persona se contagie; $q = 1 - p = 0{,}90$, la probabilidad de que no se contagie.

Con esto:

a) $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= \binom{8}{0} \cdot 0{,}10^0 \cdot 0{,}90^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}10^1 \cdot 0{,}90^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}10^2 \cdot 0{,}90^6 =$$

$= 0{,}430467 + 0{,}382638 + 0{,}148803 = 0{,}961908.$

b) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$

$= 1 - 0{,}430467 - 0{,}382638 = 0{,}186895.$

→ Puede recordarse que $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

32. Galicia, extraordinaria 2021

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

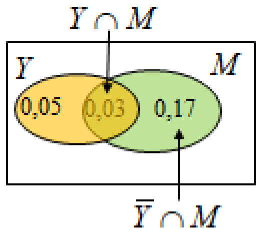
Solución:

Sean Y y M los sucesos practicar yoga y tener mascota, respectivamente.

Se sabe que:

$$P(Y)=0,08;\ P(M)=0,20;\ P(Y\cap M)=0,03.$$

Con estos datos puede construirse el diagrama de Venn adjunto.



a) El suceso no tener yoga y a la vez tener mascota es $\bar{Y}\cap M$, siendo

$$P(\bar{Y}\cap M)=P(M)-P(Y\cap M)\Rightarrow P(\bar{Y}\cap M)=0,20-0,03=0,17.$$

a) Por la probabilidad condicionada,

$$P(M/Y)=\frac{P(M\cap Y)}{P(Y)}=\frac{0,03}{0,08}=\frac{3}{8}=0,375.$$

33. Galicia, extraordinaria 2021

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

Solución:

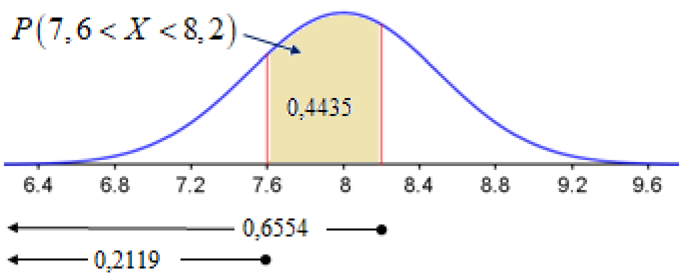
La distribución normal $N(8,\ 0,5)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-8}{0,5}$.

Con esto:

$$P(7,6<X<8,2)=P(X<8,2)-P(X<7,6)=$$

$$=P\left(Z<\frac{8,2-8}{0,5}\right)-P\left(Z<\frac{7,6-8}{0,5}\right)=P(Z<0,4)-P(Z<-0,8)=$$

$$=P(Z<0,4)-(1-P(Z<0,8))=0,6554-(1-0,7881)=0,6554-0,2119=0,4435.$$



34. La Rioja, ordinaria 2021

9.– (2 puntos) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?.

b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

Solución:

La distribución normal $N(20, 5)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-20}{5}$.

Con esto:

a) No cumplen la garantía las máquinas que funcionen bien menos de 25 años.

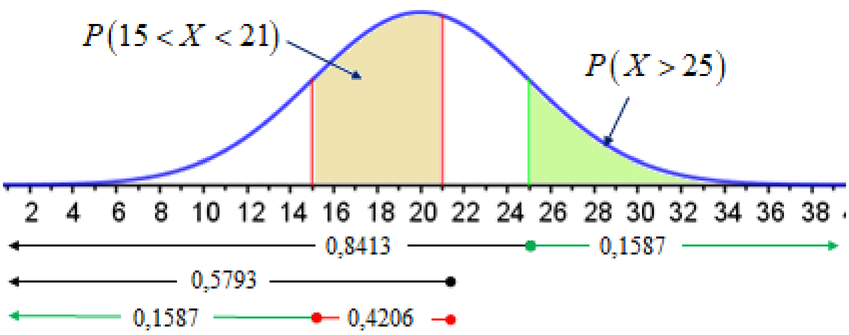
$$P(X<25)=P\left(Z<\frac{25-20}{5}\right)=P(Z<1)=0{,}8413.$$

El 84,13 % de las máquinas no cumplirán la garantía.

b) $P(15<X<21)=P(X<21)-P(X<15)=P\left(Z<\dfrac{21-20}{5}\right)-P\left(Z<\dfrac{15-20}{5}\right)=$

$= P(Z<0,2)-P(Z<-1)=P(Z<0,2)-(1-P(Z<1))$ = 0,5793 – (1 – 0,8413) =

= 0,4206.



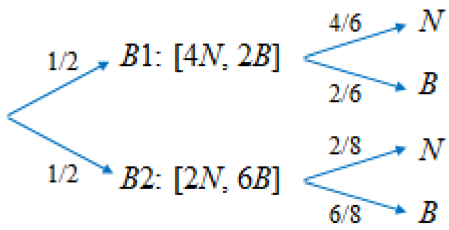
35. La Rioja, ordinaria 2021

10.– (2 puntos) Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.

Solución:
Se designan por *N* y *B* los sucesos bola negra y bola blanca; *B*1 y *B*2 designan cada una de las bolsas.
Con la información proporcionada en el enunciado se puede construir el diagrama de árbol adjunto; en él se indican las probabilidades de cada suceso.



a) Por la probabilidad total, si se elige una bolsa al azar y se extrae una bola, la probabilidad de que la bola sea blanca es:

$$P(B)=P(B1)\cdot P(B/B1)+P(B2)\cdot(B/B2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}=\frac{13}{24}.$$

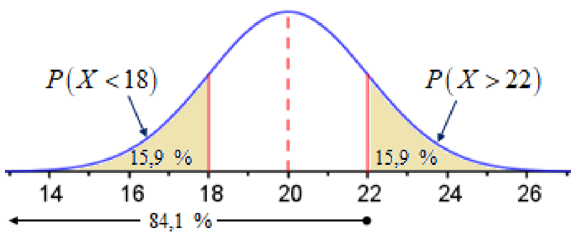
b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(B1/B)=\frac{P(B1)\cdot P(B/B1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{13}{24}}=\frac{4}{13}.$$

36. La Rioja, extraordinaria 2021

9.– (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?.

Solución:
Como se trata de una distribución normal de media 20, que es una función simétrica respecto de la media, la probabilidad de que tarde 2 minutos más que la media (de que $X < 22$) es la misma que de tarde 2 minutos menos (de que $X < 18$).
Si llega antes de 22 minutos el 84,1 % de los días ⇒ llega después de 22 minutos el 15,9 %.
Por tanto, el 15,9 % de los días tarda menos de 18 minutos.
El 15,9 % de 290 es 290 · 0,159 = 46,11; luego 46 días tardará menos de 18 minutos en llegar al trabajo.



Nota. Podría hacerse también encontrando el valor de la deviación típica, teniendo en cuenta que la normal $N(20, \sigma)$ se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-20}{\sigma}$. Para porcentaje dado se obtiene que $\sigma = 2$.

<u>**37**. La Rioja, extraordinaria 2021</u>

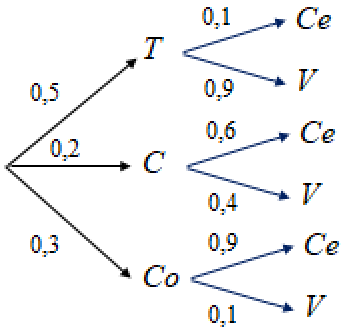
10.– (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?.

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?.

<u>Solución</u>:

Se designan por *T*, *C* y *Co* los sucesos ir al teatro, al cine o de concierto, respectivamente; con *Ce* y *V* los sucesos ir de cena después o volver a casa, también respectivamente.
Con la información proporcionada en el enunciado se puede construir el diagrama de árbol adjunto; en él se indican las probabilidades de cada suceso.



a) Por la probabilidad total, se obtiene que la probabilidad de que se vaya de cena con los amigos es:

$$P(Ce) = P(T) \cdot P(Ce/T) + P(C) \cdot (Ce/C) + P(Co) \cdot (Ce/Co)$$

$$= 0,5 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,44.$$

Luego, la probabilidad de que vuelva a casa después del espectáculo será,

$$P(V) = 1 - P(Ce) = 1 - 0,44 = 0,56.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(C/V) = \frac{P(C) \cdot P(V/C)}{P(V)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,56} = \frac{8}{56} \approx 0,143.$$

38. Madrid, ordinaria 2021

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

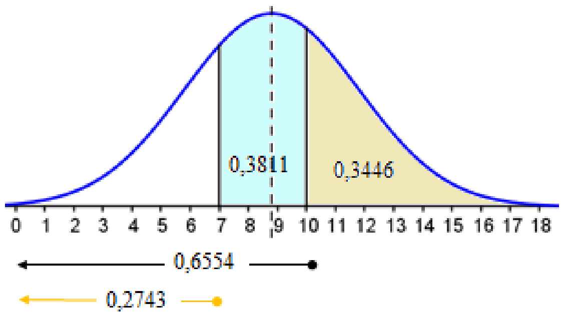
Solución:

La variable X que mide la vida de esos individuos se ajusta a la distribución normal $N(8{,}8,\ 3)$, en meses. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 8{,}8}{3}$.

Con esto:

a) $P(X > 10) = P\left(Z > \dfrac{10 - 8{,}8}{3}\right) = P(Z > 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$.



• $P(7 < X < 10) = P\left(\dfrac{7 - 8{,}8}{3} < Z < \dfrac{10 - 8{,}8}{3}\right) =$

$= P(-0{,}6 < Z < 0{,}4) =$

$= P(Z < 0{,}4) - P(Z < -0{,}6) = 0{,}6554 - (1 - P(Z < 0{,}6)) = 0{,}6554 - (1 - 0{,}7257) =$

$= 0{,}3811$.

b) El suceso "al menos uno de los 4 no supere los 10 meses de vida" es el contrario del suceso "los 4 superan los 10 meses de vida".

Por tanto:

P(al menos uno de los cuatro no supere …) = 1 – P(los 4 superan los 10 meses de vida) =

$= 1 - (0{,}3446)^4 = 0{,}9859$.

→ Se supone que la vida de cada individuo es independiente de la vida de los demás; esto es, se trata de sucesos independientes. Por eso:

P(los individuos A, B, C y D vivan más de 10 meses cada uno) =

$P(A > 10) \cdot P(B > 10) \cdot P(C > 10) \cdot P(D > 10) = (0{,}3446)^4$.

c) Se pide el valor de c tal que $P(8{,}8 - c < X < 8{,}8 + c) = 0{,}98 \Leftrightarrow P(0 < X < 8{,}8 + c) = 0{,}49$

$\Rightarrow P(X < 8{,}8 + c) = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{8{,}8 + c - 8{,}8}{3}\right) = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{c}{3}\right) = 0{,}99 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{c}{3} = 2{,}33 \Rightarrow c = 6{,}99$.

Esto significa que el 98 % de los individuos de esa especie viven entre 1,81 y 15,79 meses.

→ (8,8 – 6,99, 8,88 + 6,99) = (1,81, 15,79).

39. Madrid, ordinaria 2021

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

Se consideran los siguientes sucesos y probabilidades:

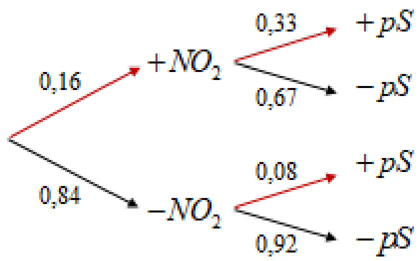
Nivel de NO_2 superior al permitido: $+NO_2 \to P(+NO_2)=0{,}16 \Rightarrow$

$-NO_2 \to P(-NO_2)=1-0{,}16=0{,}84$.

Partículas en suspensión (pS): $+pS$ y $-pS \to$

$P(+pS/+NO_2)=0{,}33$; $P(+pS/-NO_2)=0{,}08$.

Con estos datos puede construirse el diagrama de árbol adjunto.



a) Por el enunciado, la probabilidad de que un día se superen los niveles de NO_2 es $P(+NO_2)=0{,}16$.

Por la probabilidad total, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas en suspensión es:

$$P(+pS)=P(+NO_2)\cdot P(+pS/+NO_2)+P(-NO_2)\cdot P(+pS/-NO_2) \Rightarrow$$

$$P(+pS)=0{,}16\cdot 0{,}33+0{,}84\cdot 0{,}08=0{,}12.$$

$\to$ La probabilidad de que un día se superen los dos niveles será:

$$P((+NO_2)\cap(+pS))=P(+NO_2)\cdot P(+pS/+NO_2)=0{,}16\cdot 0{,}33=0{,}0528.$$

b) El suceso "al menos uno de los niveles se supere" es el contrario del suceso "ningún nivel se supera".

P(al menos uno de los niveles se supere) = 1 – P(ningún nivel se supera) =

$= 1-P(-NO_2)\cdot P(-pS/-NO_2)=1-0{,}84\cdot 0{,}92=0{,}2272$.

c) Los sucesos $+NO_2$ y $+pS$ serán independientes si se cumple que

$$P((+NO_2)\cap(+pS))=P(+NO_2)\cdot P(+pS)$$

Como

$P((+NO_2)\cap(+pS))=0{,}16\cdot 0{,}33=0{,}05528$ y $P(+NO_2)\cdot P(+pS)=0{,}16\cdot 0{,}12=0{,}0192$,

dichos sucesos no son independientes.

d) Por Bayes,

$$P(+NO_2/-pS)=\frac{P((+NO_2)\cap(-pS))}{P(-pS)}=\frac{0{,}16\cdot 0{,}67}{0{,}88}=0{,}1218.$$

40. Madrid, extraordinaria 2021

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

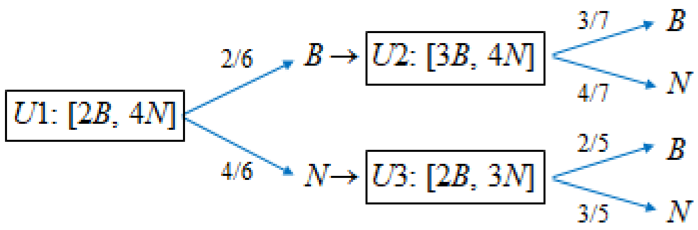
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:

La secuencia y probabilidades asociadas a cada suceso se indican en el diagrama de árbol adjunto.

– $U1$ tiene 2 bolas blancas y 4 negras: [2B, 4N].
– $U2$ tiene 3 bolas blancas y 4 negras: [3B, 4N].
– $U3$ tiene 2 bolas blancas y 3 negras: [2B, 3N].



Con esto:

a) Las bolas extraídas son de distinto color cuando salen BN o NB.

$$P(BN, NB) = P(1^a B; 2^a N) + P(1^a N; 2^a B) = P(1^a B) \cdot P(2^a N / 1^a B) + P(1^a N) \cdot P(2^a B / 1^a N) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{35}.$$

b) La probabilidad de que la segunda bola sea blanca es:

$$P(2^a B) = P(1^a B) \cdot P(2^a B / 1^a B) + P(1^a N) \cdot P(2^a B / 1^a N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{43}{105}.$$

Por Bayes:

$$P(1^a N / 2^a B) = \frac{P(1^a N) \cdot P(2^a B / 1^a N)}{P(2^a B)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{43}{105}} = \frac{28}{43}.$$

41. Madrid, extraordinaria 2021

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

a) La variable X que mide el número de días que ha llovido puede estudiarse como una binomial $B(100,\ 0{,}45)$.

$\to$ n = 100, es el número de días elegidos; p = 0,45 es la probabilidad de que llueva; $q = 1 - p$ = 0,55, la probabilidad de que no llueva.

Con esto:

a) $P(X=40)=\binom{100}{40}\cdot 0{,}45^{40}\cdot 0{,}55^{60}=\dfrac{100!}{40!(100-40)!}\cdot 0{,}45^{40}\cdot 0{,}55^{60}\approx 0{,}0488$.

b) La binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

En este caso puede hacerse, pues 100 ·0,45 = 45 y 100 · 0,55 = 55.

En consecuencia, la binomial $B(100,\ 0{,}45)$ puede estudiarse mediante la distribución normal $N\left(100\cdot 0{,}45,\ \sqrt{100\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55}\right)\to N(45,\ 4{,}975)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-45}{4{,}975}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X=40)=P(39{,}5<X'<40{,}5) = P\left(\frac{39{,}5-45}{4{,}975}<Z<\frac{40{,}5-45}{4{,}975}\right)=$$

$$= P(-1{,}12<Z<-0{,}91)=P(Z<-0{,}91)-P(Z<-1{,}12) =$$

$$= 1-P(Z<0{,}91)-\left(1-P(Z<1{,}12)\right) = 1 - 0{,}8186 - (1 - 0{,}8686) = 0{,}05.$$

42. Murcia, ordinaria 2021

7: Un estudio revela que el 10% de los hombres son daltónicos y que el 1% de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5% de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos ”ser una persona daltónica” y ”ser mujer”?

Solución:

Sean los sucesos:

H = hombre; M = mujer; D = daltónico.

D/H y $D/$M son los sucesos ser daltónico condicionados por ser H o M, respectivamente.

Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(H)=0,505$; $P(M)=0,495$; $P(D/H)=0,10$; $P(D/M)=0,01$.

a) Con estos datos, por la probabilidad total, la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea daltónica, es:

$P(D)=P(H)\cdot P(D/H)+P(M)\cdot P(D/M)$ = 0,505 · 0,10 + 0,495 · 0,01 = 0,05545.

En porcentajes, 5,545 %.

b) Por Bayes:

$$P(M/D)=\frac{P(M\cap D)}{P(D)}=\frac{P(M)\cdot P(D/M)}{P(D)}=\frac{0,495\cdot 0,01}{0,05545}\approx 0,0893.$$

El 8,93 % de las personas daltónicas son mujeres.

c) Serían independientes si $P(D)=P(D/M)$; pero esto no es así:

$P(D)=0,05545$ y $P(D/M)=0,01$.

Por otra parte, en el enunciado se indica claramente: la probabilidad de H y M son casi iguales, pero hay 10 hombres daltónicos por cada mujer daltónica.

(También podría verse que $P(M\cap D)\neq P(M)\cdot P(D)$).

43. Murcia, ordinaria 2021

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de esta distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

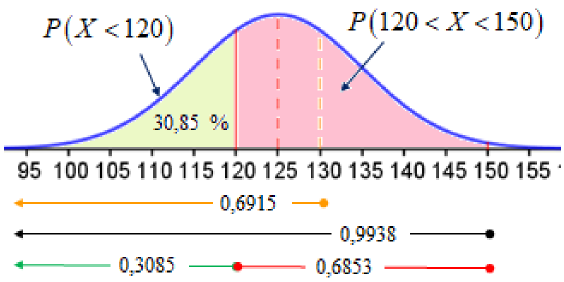
c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

Solución:

La velocidad, X, de los vehículos en esa autopista se distribuye según la normal $N(\mu, 10)$.

Se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{10}$.

Se sabe que $P(X < 130) = 0,6915$.



a) Como

$$P(X < 130) = P\left(Z < \frac{130-\mu}{10}\right) = 0,6915 \rightarrow$$

(por la tabla normal $N(0, 1)$) $\rightarrow$

$$\frac{130-\mu}{10} = 0,5 \Rightarrow \mu = 125 \text{ km/h}.$$

b) Por tanto,

$$P(X < 120) = P\left(Z < \frac{120-125}{10}\right) = P(Z < -0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 06915 = 0,3085.$$

El 30,85 % de los vehículos no sobrepasa los 120 km/h de velocidad máxima permitida.

b) $P(120 < X < 150) = P(X < 150) - P(X < 120) = P\left(Z < \dfrac{150-125}{10}\right) - 0,3085 =$

$P(Z < 2,5) - 0,3085 = 0,9938 - 030,85 = 0,6853.$

44. Murcia, extraordinaria 2021

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Solución:

Con los datos de problema puede construirse la siguiente tabla.

	Cantidad	Pares ($n^o p$)
Bola negra (N)	5	2 ($N2$ y $N4$)
Bola blanca (B)	7	3 ($B2$, $B4$, $B6$)
Total	12	5

a) De las 12 bolas de la urna, 7 son blancas. Por tanto, $P(B)=\frac{7}{12}$.

b) De las 12 bolas de la urna, 5 están numeradas con número par. Por tanto, $P(n^o\, p)=\frac{5}{12}$.

c) De las 7 bolas blancas, 3 están numeradas con número par. Por tanto, $P(n^o\, p/B)=\frac{3}{7}$

d) De las 12 bolas, 3 son blancas y están numeradas con número par. Por tanto,
$P(B\cap n^o\, p)=\frac{3}{12}$.

e) De las 5 bolas numeradas con número par, 3 son blancas. Por tanto, $P(B/n^o\, p)=\frac{3}{5}$.

45. Murcia, extraordinaria 2021

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial, pues hay dos opciones: llegar tarde o no llegar tarde. Siendo: p = probabilidad de llegar tarde = 0,45; $q = 1 - p = 0{,}55$; $n = 9$ es el número de ensayos.

Por tanto, la variable X que mide el número de veces que ese alumno llega tarde, en los próximos 9 días, puede estudiarse como una binomial $B(9,\ 0{,}45)$.

b) La media de la distribución es: $\mu = np = 9 \cdot 0{,}45 = 4{,}05$.

Su desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55} \approx 1{,}49$.

c) La probabilidad de que Juan llegue tarde como mucho 2 días de los 9 es:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{9}{0} \cdot 0{,}45^0 \cdot 0{,}55^9 + \binom{9}{1} \cdot 0{,}45^1 \cdot 0{,}55^8 + \binom{9}{2} \cdot 0{,}45^2 \cdot 0{,}55^7 =$$

$$= 1 \cdot 0{,}004605 + 9 \cdot 0{,}003768 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 0{,}003083 = 0{,}149505.$$

$\to$ El valor de $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$. En particular, $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$.

46. País Vasco, ordinaria 2021

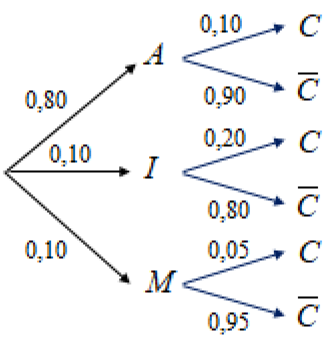
Ejercicio A5

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:
a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.
b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:

Se consideran los sucesos *A*, *I* y *M*, asociados a cada tipo de medicamento.

Se designa por *C* el suceso "medicamento caducado"; y con $\overline{C}$ el suceso contrario.
Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto.



a) Por la probabilidad total, la probabilidad coger un medicamento caducado será:

$$P(C)=P(A)\cdot P(C/A)+P(I)\cdot P(C/I)+P(M)\cdot P(C/M) =$$
$$= 0,80 \cdot 0,10 + 0,10 \cdot 0,20 + 0,10 \cdot 0,05 = 0,105.$$

b) Por la probabilidad condicionada (Bayes):

$$P(A/C)=\frac{P(A)\cdot P(C/A)}{P(C)}=\frac{0,80\cdot 0,10}{0,105}=\frac{80}{105}\approx 0,7619.$$

47. País Vasco, ordinaria 2021
Ejercicio B5
En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:
a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.
Solución:
Es un experimento binomial $B(n, p)$, con n = 3900, $p=\dfrac{1}{365}$ (la probabilidad de que una persona nazca el día del patrón) y $q=\dfrac{364}{365}$ (probabilidad de que nazca cualquier otro día).

Esto es, una binomial $B\left(3900,\ \dfrac{1}{365}\right)$.

Como n es grande, $np=3900\cdot\dfrac{1}{365}\approx 10,7>5$ y $nq=3900\cdot\dfrac{364}{365}\approx 3889,3>5$, esta binomial puede aproximarse mediante la normal de media $\mu=np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$; que a su vez se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Esto es:
$$B\left(3900,\ \frac{1}{365}\right)\sim N\left(3900\cdot\frac{1}{365},\ \sqrt{3900\cdot\frac{1}{365}\cdot\frac{364}{365}}\right)\approx N\left(10,68,\ 3,26\right)\to Z=\frac{X-10,68}{3,26}.$$

Con esto:
a) Aplicando la distribución normal y utilizando la corrección de continuidad:
$$P\left(X\geq 15\right)=P\left(X'>14,5\right)=P\left(Z>\frac{14,5-10,68}{3,26}\right)=P\left(Z>1,17\right)=1-P\left(Z<1,17\right)=$$
$= 1 - 0,8790 = 0,1230.$

b) $$P\left(5\leq X\leq 15\right)=P\left(4,5<X'<15,5\right)=P\left(\frac{4,5-10,68}{3,26}<Z<\frac{15,5-10,68}{3,26}\right)=$$
$$=P\left(-1,9<Z<1,48\right)=P\left(Z<1,48\right)-P\left(Z<-1,9\right)=P\left(Z<1,48\right)-\left(1-P\left(Z<1,9\right)\right)=$$
$= 0,9306 – (1 – 0,9713) = 0,9019.$

48. País Vasco, extraordinaria 2021
Ejercicio A5
De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:
a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?
Solución:
Con los datos del enunciado (en negrilla) se puede construir la siguiente tabla.

	Del mismo barrio	De otro barrio	Total
Estudiantes	**500**	200	**700**
Comedor	**400**	175	**575**
No comedor	100	25	125

Con esto:
a) De los 500 estudiantes del barrio 400 utilizan el servicio de comedor, suceso *C/B*. Por tanto,

$$P(C/B)=\frac{400}{500}=0,80.$$

b) De los 575 estudiantes que usan el servicio de comedor 175 no son del barrio, suceso $\overline{B}/C$. Por tanto,

$$P(\overline{B}/C)=\frac{175}{575}=0,3043.$$

c) De los 700 estudiantes del centro 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor, suceso $B \cap C$. Luego, $P(B\cap C)=\dfrac{400}{700}$.
Como se pide la probabilidad de ser del barrio o usar el servicio de comedor, suceso $B \cup C$, se tendrá:

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C) = \frac{500}{700}+\frac{575}{700}-\frac{400}{700}=\frac{675}{700}=0,9643.$$

d) De los 700 estudiantes del centro solo hay 25 que no son del barrio ni utilizan el servicio de comedor, suceso $\overline{B}\cap\overline{C}$. Por tanto,

$$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\frac{25}{700}=0,0357.$$

Puede verse que $P(\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{B\cup C})=1-P(B\cup C)=1-\dfrac{675}{700}$.

49. País Vasco, extraordinaria 2021

Ejercicio B5

La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?

c) Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

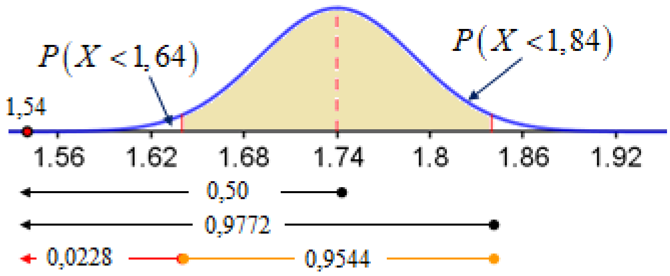
Solución:

a) La estatura, *X*, de los individuos se distribuye según normal *N*(1,74, 0,05) en cm.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 1,74}{0,05}$.

Como la población se distribuye de forma simétrica respecto de la media, μ = 1,74, se tiene que $P(X \le 1,74) = 0,5$.

b) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga una estatura entre 1,64 y 1,84 cm es:



$$P(1,64 < X < 1,84) =$$
$$= P(X < 1,84) - P(X < 1,64) =$$
$$= P\left(Z < \frac{1,84 - 1,74}{0,05}\right) - P\left(Z < \frac{1,64 - 1,74}{0,05}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$
$$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544.$$

c) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga una estatura inferior 1,54 cm es:

$$P(X < 1,54) = P\left(Z < \frac{1,54 - 1,74}{0,05}\right) = P(Z < -4) = 0.$$

Por tanto, teóricamente, no habrá ningún individuo entre los 1500 que mida menos de 1,54 cm.