ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2020

1. Andalucía, ordinaria 2020

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**

b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Para determinar la posición relativa de las rectas *r* y *s* hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r = (1, 1, a)$, $\vec{v}_s = (-a, -1, 2)$ y $\boldsymbol{SR} = (1, 2, 1) - (3, 3, -1) = (-2, -1, 2)$,

siendo $R(1, 2, 1)$ y $S(3, 3, -1)$ puntos de *r* y *s*, respectivamente.

Esa dependencia lineal se estudia a partir del valor del determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 4 + a^2 - 2a = a^2 - 4 \to \text{se anula si } a = \pm 2.$$

Con esto:

- Si $a \neq -2$ y 2, las rectas se cruzan: los vectores considerados son linealmente independientes.
- Si $a = -2$ o 2, las rectas están en el mismo plano y se cortan, pues en ningún caso los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ serán paralelos.

b) Para $a = 2$, las rectas se cortan.

Sus ecuaciones son:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}; \quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3-2h \\ y = 3-h \\ z = -1+2h \end{cases}.$$

El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema:

$$r \equiv s \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t = 3-2h \\ 2+t = 3-h \\ 1+2t = -1+2h \end{cases} \to t = 0;\ h = 1.$$

El punto de corte es $P(1, 2, 1)$.

Un vector perpendicular a ambas rectas es

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (4,\ -6,\ 1).$$

Por tanto, la perpendicular a ambas rectas por el punto *P* será: $p \equiv \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2-6\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$.

2. Andalucía, ordinaria 2020

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

Solución:

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-2+3z \end{cases} \Rightarrow (z=t) \to r \equiv \begin{cases} x=2-3t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-3, 3, 1).$$

a) El vector normal del plano perpendicular a r es: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

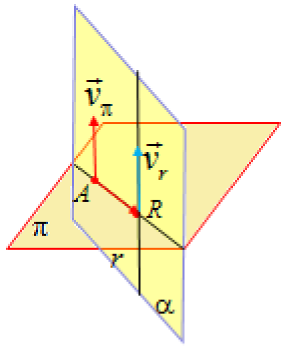
Su ecuación será:

$$\pi \equiv -3x+3y+z+d=0.$$

Como pasa por el punto $A(1, -2, 0)$: $-3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 9$.

Por tanto, $\pi \equiv -3x+3y+z+9=0$.

b) El plano que pasa por A y contiene a r está determinado por el punto A y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{AR}$, siendo R un punto de r, por ejemplo, $R(2, -2, 0)$.



$\boldsymbol{AR} = (2, -2, 0) - (1, -2, 0) = (1, 0, 0)$; $\vec{v}_r = (-3, 3, 1)$.

El plano pedido será:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = 2-3t+h \\ y=-2+3t \\ z = \quad t \end{cases} \to$$

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y+2 & 3 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha \equiv y+2-3z=0 \Rightarrow \alpha \equiv y-3z+2=0.$$

3. Andalucía, extraordinaria 2020

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**

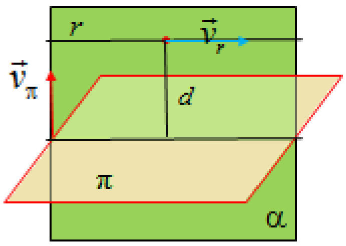
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) El vector normal del plano es $\vec{v}_\pi$ = (1, –1, 1); el de dirección de la recta, $\vec{v}_r$ = (2, 1, –1).
Como estos vectores son perpendiculares, pues $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r$ = 2 –1 –1 = 0, se deduce que la recta es paralela al plano. Por consiguiente, la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r al plano π.

$$d(r,\ \pi) = d\left((0,-1,-2),\ \pi \equiv x - y + z - 2 = 0\right) = \left|\frac{0+1-2-2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.$$

b) El plano α, que contiene a r y es perpendicular a π está determinado por la recta y por el vector normal a π, $\vec{v}_\pi$.



Como $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$, las ecuaciones paramétricas de α serán:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = 2t + h \\ y = -1 + t - h \\ z = -2 - t + h \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z+2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha \equiv -3(y+1) - 3(z+2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv -3y - 3z - 9 = 0 \Rightarrow \alpha \equiv y + z + 3 = 0\,.$$

4. Aragón, ordinaria 2020

4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

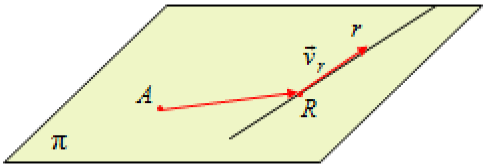
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \downarrow \\ y = 3 - 2(1 - z) \end{cases} \Rightarrow (z = t) \to r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

a) El plano que pasa por $A(0, 0, 1)$ y contiene a r está determinado por el punto A y por los vectores $\vec{v}_r = (-1, 2, 1)$ y $\boldsymbol{AR}$, siendo R un punto de r; por ejemplo, $R(1, 1, 0)$, luego,

$\boldsymbol{AR} = (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1)$.



El plano pedido será:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - t + h \\ y = 1 + 2t + h \\ z = \quad t - h \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -3(x-1) - 3z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + z - 1 = 0.$$

b) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $V = \left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right|$.

El producto mixto, [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$], se define como:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

En este caso, los vectores son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ = (–1, 1, 1), luego:

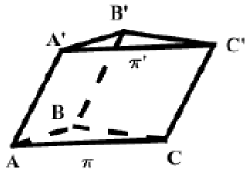
$$\left[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \times \vec{v}\right] = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2$$

En consecuencia, el volumen del paralelepípedo que determinan esos vectores será:

$$V = \left[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \times \vec{v}\right] = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3.$$

5. Asturias, ordinaria 2020

Bloque 3.B Sea el prisma triangular(triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A,B,C y π', al que pertenecen los puntos A',B',C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A',B. (0.75 puntos)
b) La distancia entre los planos π y π'. (0.75 puntos)
c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

Solución:

a) Los vectores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ deben ser iguales, luego, si $A'(a'_1,a'_2,a'_3)$ y $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$, entonces:

$$\overrightarrow{AA'}=(a'_1,a'_2,a'_3)-(1,\ 0,\ 0)=(a'_1-1,a'_2,a'_3);$$
$$\overrightarrow{BB'}=(-1,\ 2,\ 2)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(-1-b_1,\ 2-b_2,\ 2-b_3);$$
$$\overrightarrow{CC'} = (0, 4, 2) - (0, 3, 0) = (0, 1, 2).$$

Igualando:

$$\overrightarrow{AA'}=(a'_1-1,a'_2,a'_3) = (0, 1, 2) \Rightarrow a'_1=1;\ a'_2=1;\ a'_3=2 \to A'(1, 1, 2).$$
$$\overrightarrow{BB'}=(-1-b_1,\ 2-b_2,\ 2-b_3) = (0, 1, 2) \Rightarrow b_1=-1;\ b_2=1;\ b_3=0 \to B(-1, 1, 0).$$

b) Ecuación del plano π, definido por el punto $A(1, 0, 0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-2, 1, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0, 3, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 3, 0)$.

Luego:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=1-2t-h \\ y= \quad t+3h \\ z=0 \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv z=0.$$

Como los planos π y π´ son paralelos, la distancia entre ellos es:

$$d(\pi,\ \pi')=d\left(A'(1,\ 1,\ 2),\ \pi \equiv z=0\right)=\frac{2}{\sqrt{1}}=2.$$

c) El volumen viene dado por $V=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AA'}\right]\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left|-12+2\right| = 5\ \text{u}^3.$

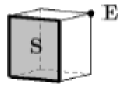
6. Asturias, extraordinaria 2020

Bloque 3.A Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S. (1 punto)

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S. (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E? (0.5 puntos)



Solución:

a) Si los puntos *A*, *B* y *C* son vértices de un cuadrado, entonces dos de los vectores ***AB***, ***BC*** y ***AC*** deben ser perpendiculares. Esto indicará su posición en el cuadrado.

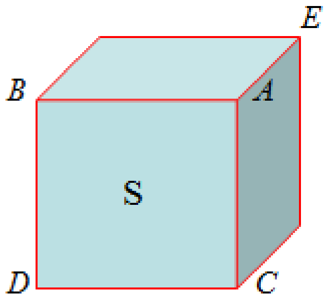
AB = (5, 5, 0) – (2, 1, 0) = (3, 4, 0); ***BC*** = (2, 1, 5) – (5, 5, 0) = (–3, –4, 5);

AC = (2, 1, 5) – (2, 1, 0) = (0, 0, 5).

Los productos escalares:

AB · ***BC*** = (3, 4, 0) · (–3, –4, 5) = –25;

AB · ***AC*** = (3, 4, 0) · (0, 0, 5) = 0.



Como los vectores perpendiculares son ***AB*** y ***AC***, el orden de los vértices de la cara S del cuadrado es: *ABDC*.

Con esto, ***BD*** = ***AC***.

Si $D(x, y, z)$, ***BD*** = $(x, y, z) - (5, 5, 0) = (x - 5, y - 5, z) \Rightarrow$

$(x - 5, y - 5, z) = (0, 0, 5) \Rightarrow x = 5, y = 5, z = 5$.

Esto es, $D(5, 5, 5)$.

El cubo tiene lado 5: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) Está definido por el punto $A(2, 1, 0)$ y los vectores ***AB*** = (3, 4, 0) y ***AC*** = (0, 0, 5).

Sus ecuaciones son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = \quad\quad 5h \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 0 \\ y-1 & 4 & 0 \\ z & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 20(x-2) - 15(y-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 3y - 5 = 0.$$

b) El vértice de la cara S adyacente a *E* es el punto (de los cuatro vértices de S) que esté a distancia 5 de él.

Como $d(E, A) = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$, el vértice adyacente a *E* es *A*.

Nota: Puede verse que las demás distancias son mayores que 5.

7. Asturias, extraordinaria 2020

Bloque 3.B Dados dos planos $\begin{cases} \pi \ : \ x+y-2z=3 \\ \pi' \ : \ x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

Solución:

a) La proyección ortogonal se obtiene trazando la perpendicular desde P a plano π'.
Esa perpendicular lleva la dirección del vector característico de π', que es $\vec{v}_{\pi'} = (1, 0, -1)$.

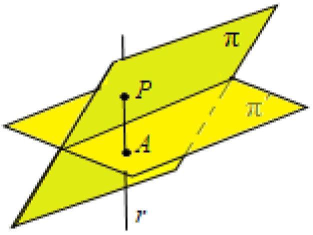
Por tanto, la recta pedida será: $r \equiv \begin{cases} x = 5+t \\ y = 1 \\ z = \quad -t \end{cases}$.

Las ecuaciones implícitas pueden ser: $r \equiv \begin{cases} x+z=5 \\ y=1 \end{cases}$. (La primera ecuación se obtiene sumando las ecuaciones paramétricas correspondientes a x y z).

b) El punto P es el de corte de r con π. Se obtiene sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r en π.

$\pi: x+y-2z=3 \to 5+t+1-2\cdot(-t)=3 \Rightarrow 3t=-3 \Rightarrow t=-1$.

Luego $P(4, 1, 1)$.



8. Baleares, ordinaria 2020, opción A

3. Considera el punt $P = (2, -1, 1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\} (r)$$

(a) Calcula l'expressió de l'equació contínua de la recta r. (2 punts)

(b) Calcula l'equació del pla, Π, perpendicular a la recta r que passa pel punt P. (2 punts)

(c) Calcula el punt, Q, d'intersecció del pla Π amb la recta r. (3 punts)

(d) De totes les rectes que passen pel punt $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta r. (3 punts)

Solución:

a) Hay que resolver el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 - 4z \\ x + 2y = 2 + 3z \end{cases} \begin{array}{c} 2E1 + 3E2 \\ \Rightarrow \\ 2E2 - E1 \end{array} \begin{cases} 7x = 8 + z \\ 7y = 3 + 10z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} + \dfrac{1}{7}z \\ y = \dfrac{3}{7} + \dfrac{10}{7}z \end{cases} \to \text{si se hace } z = 7t \to \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} + t \\ y = \dfrac{3}{7} + 10t \\ z = 7t \end{cases}.$$

Puntos de la recta son: para $t = 0$, $A = (8/7, 3/7, 0)$; para $t = 6/7$, $B = (2, 9, 6)$.

Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (1, 10, 7)$.

La ecuación continua de la recta puede ser: $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-9}{10} = \dfrac{z-6}{7}$.

b) El vector de dirección de la recta es el normal del plano: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 10, 7)$.

El plano pedido será: $\Pi \equiv x + 10y + 7z + d = 0 \to$ como $P(2, -1, 1) \in \Pi \Rightarrow$

$2 - 10 + 7 + d = 0 \Rightarrow d = 1 \to$ luego $\Pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$.

c) El punto de intersección de la recta con el plano se obtiene sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r en Π.

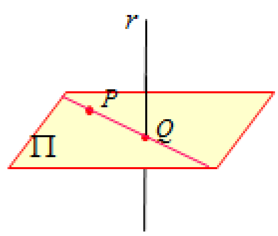
$$\frac{8}{7} + t + 10\left(\frac{3}{7} + 10t\right) + 7(7t) + 1 = 0 \Rightarrow 150t = -\frac{45}{7} \Rightarrow t = -\frac{3}{70}.$$

Para este valor de t, el punto de la recta es: $Q = \left(\dfrac{11}{10},\ 0,\ -\dfrac{3}{10}\right)$.

d) Es la recta determinada por los puntos P y Q.

Su ecuación es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \left(2 - \dfrac{11}{10}\right)h \\ y = -1 + (-1 - 0)h \\ z = 1 + \left(1 + \dfrac{3}{10}\right)h \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \dfrac{9}{10}h \\ y = -1 - h \\ z = 1 + \dfrac{13}{10}h \end{cases}.$$



9. Canarias, ordinaria 2020, grupo A

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

   a. Estudie la posición relativa de r y s. 1.5 ptos

   b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto $A\,(11,-2,5)$ 1 pto

Solución:
Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} z=x+y-4 \\ x=7-2y \uparrow \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} z=3-y \\ x=7-2y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=7-2t \\ y=\quad t \\ z=3-t \end{cases} \to \vec{v}_r = (-2,\ 1,\ -1)$$

$$s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\quad h \end{cases} \to \vec{v}_s = (0,\ 0,\ 1).$$

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:
$\vec{v}_r = (-2, 1, -1)$, $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{RS} = (2, -5, 0) - (7, 0, 3) = (-5, -5, -3)$
siendo R un punto de r y S un punto de s.

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

b) El vector característico del plano pedido es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2, 1, -1)$.
Su ecuación será:
$\pi \equiv -2x + y - z + d = 0$.
Como debe contener al punto $A(11, -2, 5)$:
$-2 \cdot 11 - 2 - 5 + d = 0 \Rightarrow d = 29$.
Luego
$\pi \equiv -2x + y - z + 29 = 0$.

10. Canarias, extraordinaria 2020

3. Consideremos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

   a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r. 1.5 ptos

   b. Consideremos $P\ (1,4,2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=5-y \\ z=14-3y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=5-t \\ y=\quad t \\ z=14-3t \end{cases} \to \vec{v}_r = (-1,\ 1,\ -3).$$

a) El vector característico del plano pedido es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 1, -3)$; como, además, debe contener al punto $A(1, 2, 1)$, su ecuación será:

$$\pi \equiv -(x-1)+(y-2)-3(z-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv -x+y-3z+2=0.$$

b) El vector de dirección de la recta s es $\overrightarrow{AP} = (1, 4, 2) - (1, 2, 1) = (0, 2, 1)$.

Su ecuación será:

$$s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+2h \\ z=1+h \end{cases}.$$

El ángulo que forman las rectas r y s es el determinado por sus vectores de dirección:

$\vec{v}_r = (-1, 1, -3)$ y $\vec{v}_s = (0, 2, 1)$.

Aplicando el producto escalar:

$$\cos(\vec{v}_r\ ,\ \vec{v}_s) = \frac{(-1,\ 1,\ -3)\cdot(0,\ 2,\ 1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2-3}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{55}} \Rightarrow$$

ángulo $(r, s) = 97{,}75^\circ \to 82{,}25^\circ$.

11. Cantabria, ordinaria 2020

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.

3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

1) La recta pedida está determinada por el punto $P(1, 2, 8)$ y el vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 8 - 3t \end{cases}$.

2) Sustituyendo las ecuaciones de r en el plano $\pi \equiv -x - y + 3z = -8$ se tiene:

$$-(1+t) - (2+2t) + 3(8-3t) = -8 \Rightarrow -12t = -29 \Rightarrow t = \frac{29}{12}.$$

La recta y el plano se cortan cuando $t = \frac{29}{12}$, en el punto $Q\left(1 + \frac{29}{12},\ 2 + 2\cdot\frac{29}{12},\ 8 - 3\cdot\frac{29}{12}\right) \to$ $Q\left(\frac{41}{12},\ \frac{82}{12},\ \frac{9}{12}\right)$.

3) El vector característico (normal) del plano será $\vec{v} = (1, 2, -3)$.

El plano pedido es: $\pi' \equiv x + 2y - 3z = d$.

Como pasa por el origen, $d = 0$. Luego, resulta $\pi' \equiv x + 2y - 3z = 0$

12. Cantabria, ordinaria 2020

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, -4)$, $C = (4, 3, 2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

1) La recta pedida viene determinada por el punto $A = (1, 2, 1)$ y el vector $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, -4) - (1, 2, 1) = (1, 1, -5)$.

Luego, sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

2) El plano queda determinado por el punto $A = (1, 2, 1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -5)$; $\overrightarrow{AC} = (4, 3, 2) - (1, 2, 1) = (3, 1, 1)$.

Luego, sus ecuaciones paramétricas serán: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 3h \\ y = 2 + t + h \\ z = 1 - 5t + h \end{cases}$.

El área del triángulo determinado por los puntos A, B y C viene dada por: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Como:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6, \ -16, \ -2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36 + 256 + 4} = \sqrt{296}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \frac{\sqrt{296}}{2} = \sqrt{74}$ u^2.

13. Cantabria, extraordinaria 2020

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (3, 5, 2)$, $D = (1, 1, 3)$.

1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano, Π, que contiene los puntos A, B, C.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano Π.

3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

1) El plano queda determinado por el punto $A = (1, 3, 1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$ = (4, 1, –2) – (1, 3, 1) = (3, –2, –3); $\overrightarrow{AC}$ = (3, 5, 2) – (1, 3, 1) = (2, 2, 1).

Luego, sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t + 2h \\ y = 3 - 2t + 2h \\ z = 1 - 3t + h \end{cases} \Rightarrow \text{Ecuación general: } \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y-3 & -2 & 2 \\ z-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Pi \equiv 4(x-1) - 9(y-3) + 10(z-1) = 0 \Rightarrow \Pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0$$

2) El punto D pertenecerá al plano si cumple su ecuación.

Sustituyendo:

$4 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 13 \neq 0 \Rightarrow$ no pertenece al plano.

3) A partir del producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se obtiene:

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{(3,\ -2,\ -3)\cdot(2,\ 2,\ 1)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{6-4-3}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{9}} = -\frac{1}{3\sqrt{22}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{22}}\right) \approx 94{,}08^{\circ} \to 85{,}92^{\circ}.$$

14. Castilla La Mancha, ordinaria 2020

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) [**1,5 puntos**] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

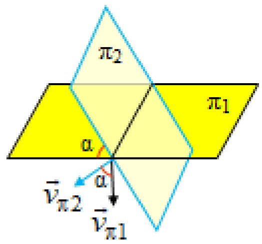
Solución:

a) Se expresa el plano π_2 en forma cartesiana.

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z+2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -2(x+1) - 2y = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y + 1 = 0.$$

El ángulo que forman viene determinado por los vectores normales de esos planos, que son:

$\vec{v}_{\pi 1} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (1, 1, 0)$



A partir del producto escalar de los vectores $\vec{v}_{\pi 1}$ y $\vec{v}_{\pi 2}$ se obtiene:

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos\alpha = \cos(\vec{v}_{\pi 1}, \vec{v}_{\pi 2}) = \frac{(2,\ 1,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ 0)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2+1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ.$$

b) Los puntos de corte del plano $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ con los ejes son: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 2)$.

El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, que son:

AP = (3, –3, 2) – (1, 0, 0) = (2, –3, 2); **BP** = (3, –3, 2) – (0, 2, 0) = (3, –5, 2);

CP = (3, –3, 2) – (0, 0, 2) = (3, –3, 0).

En consecuencia:

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|12 - 18 + 12| = \frac{6}{6} = 1 \text{ u}^3.$$

15. Castilla La Mancha, ordinaria 2020

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1+\mu \\ y = 1+\lambda+a\mu \\ z = 1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y = 1-b \\ z = -3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *s* son:

$$s \equiv \begin{cases} x-2y = 1-b \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1-b+2t \\ y = t \\ z = -3 \end{cases} \to \vec{v}_s = (2, 1, 0).$$

Dos vectores del plano π son: $\vec{v}_1 = (0, 1, 2)$ y $\vec{v}_2 = (1, a, -1)$.

Si la recta *s* está contenida en el plano π deben cumplirse dos cosas:

1) Los vectores $\vec{v}_s$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ deben ser linealmente dependientes: el determinante que determinan debe valer 0.

2) El punto (1 – *b*, 0, –3) de *s* debe cumplir la ecuación del plano.

1) S los vectores son linealmente dependientes, entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2-4a+2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

2) La ecuación cartesiana de π es (con *a* = 0):

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -(x+1)+2(y-1)-(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x+2y-z-2 = 0.$$

Sustituyendo el punto (1 – *b*, 0, –3) de *s* en π, se tiene:

$$-1+b+0+3-2 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

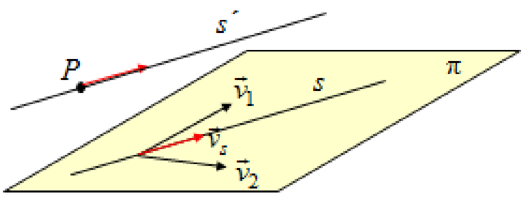
b) Si *a* = 0 y *b* = 0 la recta *s* está contenida en el plano π.

Si *a* = 0 y *b* = 3, la recta *s* es: $s \equiv \begin{cases} x = 1-b+2t \\ y = t \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2+2t \\ y = t \\ z = -3 \end{cases}$.

Esta recta no está contenida en el plano, luego es paralela a él. (Puede verse de nuevo que su vector de dirección, $\vec{v}_s$, depende linealmente de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

La paralela a ella que pasa por *P*(1, –1, –8) es:

$$s´\equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = -8 \end{cases}.$$



16. Castilla La Mancha, extraordinaria 2020

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{cases}$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Solución:

a) La distancia de un punto a un plano viene dada por:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi : ax + by + cz + d = 0\right) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

Para $P(1, 2, -1)$ y $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ se tendrá:

$$d\left(P,\ \pi\right) = \frac{1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) - 4}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

b) El punto de corte de la recta y el plano es la solución del sistema:

$$\begin{cases} \pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$ (restando a la primera ecuación las otras dos)

$$E1 - E2 - E3 \begin{cases} 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \downarrow \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ -z - 2 = 0 \Rightarrow z = -2 \end{cases}$$. El punto de corte es $A(2, 0, -2)$.

El área del triángulo determinado por los puntos A, B y C viene dada por la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$ = (1, –1, 2) – (2, 0, –2) = (–1, –1, 4); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 1, 1) – (2, 0, –2) = (–2, 1, 3).

El producto vectorial es:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left(-7,\ -5,\ -3\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{49 + 25 + 9} = \sqrt{83}$$

Luego, el área del triángulo será: $S = \frac{1}{2}\sqrt{83}$ u².

17. Castilla y León, ordinaria 2020

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto A=(1, 3, -1).

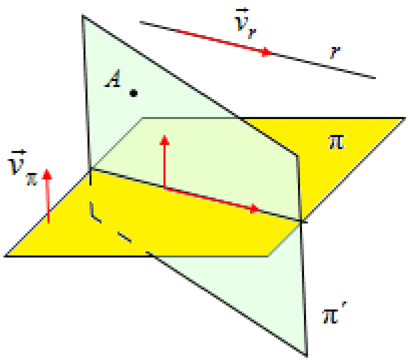
Hallar la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

(2 puntos)

Solución:

a) El plano pedido viene determinado por el punto $A = (1, 3, -1)$ y por los vectores de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, y el normal al plano, $\vec{v}_\pi = (1, -2, 2)$.

Haciendo $x = t$ y despejando en $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de r:



$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 0):$$

Por tanto, el plano pedido será:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-3 & -2 & 1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv -2(x-1) + 2(y-3) + 3(z+1) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv -2x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

18. Castilla y León, extraordinaria 2020

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$. **(1 punto)**

Solución:

a) La recta pedida ($r´$) viene dada por los planos paralelos a los que determinan r y que pasan por el punto $A(1, 2, 3)$

Luego, $r´\equiv\begin{cases} x-y-z+d=0 \\ x+y+z+d´=0 \end{cases} \to$ por contener al punto A: $r´\equiv\begin{cases} 1-2-3+d=0 \Rightarrow d=4 \\ 1+2+3+d´=0 \Rightarrow d´=-6 \end{cases}$.

Por tanto,

$$r´\equiv\begin{cases} x-y-z+4=0 \\ x+y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow r´:\begin{cases} x=1 \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

b) Sea $A'=(x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de π.

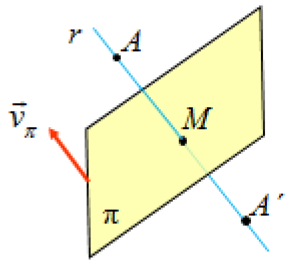
Ambos puntos, A y A' estarán en la recta r, perpendicular a π por A. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre A y $A´$.

Como $\vec{v}_\pi = (3, 2, 1)$, se deduce que $r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con plano π:

$$3\cdot(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+4=0 \Rightarrow 14+14\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

Por tanto, $M = (-2, 0, 2)$.



Punto medio de A y $A´$: $\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right)$

Como $M = (-2, 0, 2) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$-2=\frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0=-5;\ 0=\frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-2;\ 2=\frac{3+z_0}{2} \Rightarrow z_0=1$$

Por tanto, $A´ = (-5, -2, 1)$.

19. Cataluña, ordinaria 2020

3. ***a***) Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto (8, 8, 8) y tiene como vectores directores $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ y $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.
[1,25 puntos]

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al plano π.
[1,25 puntos]

Solución:
a) Las ecuaciones paramétricas del plano pedido son:

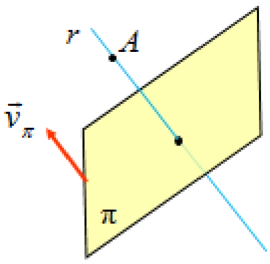
$$\pi \equiv \begin{cases} x = 8 + t - h \\ y = 8 + 2t \\ z = 8 - 3t + 3h \end{cases} \Rightarrow \text{Ecuación general: } \pi \equiv \begin{vmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y-8 & 2 & 0 \\ z-8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 6(x-8) + 0(y-8) + 2(z-8) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + z - 32 = 0.$$

b) El punto (1, –5, a) pertenece al plano cuando cumple su ecuación. Luego:
$3 + a - 32 = 0 \Rightarrow a = 29$.

La recta pedida pasa por el punto $A(1, -5, 29)$ y lleva la dirección del vector normal al plano, $\vec{v}_\pi = (3, 0, 1)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$.



20. Cataluña, extraordinaria 2020

2. Un avión se desplaza desde un punto $A = (0, 3, 1)$ hacia una plataforma plana de ecuación π: $x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$.

***a*)** Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida.

[1,25 puntos]

***b*)** Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A.

[1,25 puntos]

Solución:

a) El avión sigue la trayectoria de la recta $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases}$

La intersección con el plano se obtiene sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

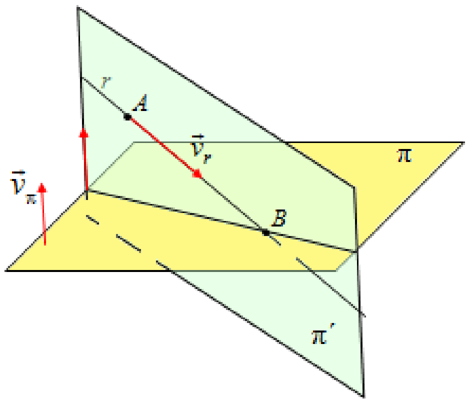
$\lambda-2(3-\lambda)+1=1 \Rightarrow 3\lambda=6 \Rightarrow \lambda=2 \to$ Punto $B(2, 1, 1)$.

La distancia recorrida es:

$d(A,B)=\sqrt{2^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$.

b) El plano viene determinado por el punto A y por los vectores $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$, de dirección de la recta, y $\vec{v}_\pi = (1, -2, 1)$, normal al plano.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\pi' \equiv \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=3-\lambda-2\mu \\ z=1+\quad\mu \end{cases}$.



La ecuación general es: $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-3 & -1 & -2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\pi' \equiv -x-(y-3)-(z-1)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y+z-4=0$.

21. Comunidad Valenciana, ordinaria 2020

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1,0,0)$ y $Q = (2,1,\alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 *puntos*)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$. (3 *puntos*)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$. (4 *puntos*)

Solución:

a) Dos rectas son paralelas cuando tienen el mismo vector de dirección (salvo el módulo).

El vector de dirección de r es $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$.

El vector determinado por P y Q es: $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, \alpha) - (1, 0, 0) = (1, 1, \alpha)$.

Serán iguales si $\alpha = -1$.

b) Si $\alpha = 1$, $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$.

Entonces, el plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, viene determinado por cualquiera de los puntos P o Q y por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$.

La ecuación general es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2(x-1) + 2y = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + y + 1 = 0.$$

c) El plano que pasa por $P(1, 0, 0)$ y es perpendicular a r tiene como vector característico a $\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1,\ 1,\ -1)$.

Su ecuación general es: $\pi' \equiv (x-1) + y - z = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y - z - 1 = 0$.

Luego, la distancia de $Q(2, 1, 1)$ a este plano será:

$$d(Q,\ \pi') = \frac{2+1-1-1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

22. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2020

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1,-1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'. (3 *puntos*)
b) La distancia de la recta r a los planos π y π'. (3 *puntos*)
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.
(4 *puntos*)

Solución:

a) La recta *r* viene dada por los planos paralelos a π y π´ que pasan por el punto *P*(1, –1, 0).

Esto es, $r \equiv \begin{cases} x+y=d \\ x-y+z=d \end{cases}$ → por contener al punto *P*: $r \equiv \begin{cases} 1-1=d \Rightarrow d=0 \\ 1+1+0=d' \Rightarrow d'=2 \end{cases}$.

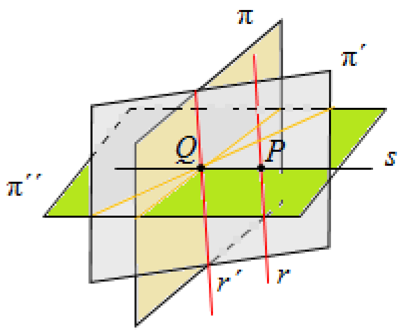
Por tanto, $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=-y \\ z=2-x+y \end{cases}$ → haciendo $x = t$ → $r: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2-2t \end{cases}$.

b) La distancia de *r* a los planos dados es la misma que la distaqncia de *P* a cada uno de esos planos.

$$d(r,\ \pi) = d\left(P(1,-1,0),\ \pi: x+y-1=0\right) = \left|\frac{1-1-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$d(r,\ \pi') = d\left(P(1,-1,0),\ \pi': x-y+z-1=0\right) = \left|\frac{1+1-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) La recta pedida (*s*) está determinada por los puntos *P* y *Q*, siendo *Q* el punto de corte del plano π´´, perpendicular a *r* y que pasa por *P*, con la recta (*r*´) que determinan π y π´. El plano π´´, que tiene como vector normal a $\vec{v}_{\pi''} = \vec{v}_r = (1,-1,-2)$ es:



$$\pi'' \equiv (x-1)-(y+1)-2z=0 \Rightarrow \pi'' \equiv x-y-2z-2=0.$$

La recta *r*´ es:

$$r' \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \to \text{(haciendo } x=t) \to r': \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2-2t \end{cases}.$$

Corte de π´´ con *r*´: se sustituyen las ecuaciones de *r*´en π´´,

$$\pi'' \equiv t-1+t-2(2-2t)-2=0 \Rightarrow 6t=7 \to t=7/6 \Rightarrow Q(7/6,\ -1/6,\ -2/6).$$

Por último, la recta que pasa por *P* y *Q* es:

$$s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+5\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}, \text{ donde } \vec{v}_S = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) - (1,-1,0) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}, -\frac{2}{6}\right) \equiv (1,\ 5,\ -2).$$

23. Extremadura, ordinaria 2020

3. Sean el plano Π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

Solución:

a) La posición relativa de una recta y un plano se puede determinar hallando el ángulo formado por el vector normal del plano, $\vec{v}_\pi$, y el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r$. Si los vectores son perpendiculares la recta es paralela al plano, o está contenida en él; en cualquier otro caso, la recta corta al plano.

Los vectores son: $\vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_r = (3, -3, 3)$

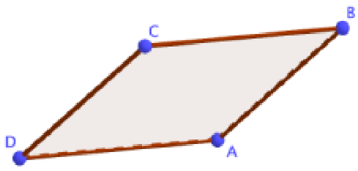
Como su producto escalar vale $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2, 1, -1) \cdot (3, -3, 3) = 6 - 3 - 3 = 0$, esos vectores son perpendiculares, por tanto, la recta y el plano no se cortan: la recta es paralela al plano, pues el punto (0, 2, 1) de r no cumple la ecuación del plano: $2 \cdot 0 + 2 - 1 - 2 \neq 0$.

b) En este caso, la distancia de la recta al plano viene dada por:

$$d(r,\ \pi) = d\left(P(0,2,1) \in r,\ \pi: 2x + y - z - 2 = 0\right) = \left|\frac{0+2-1-2}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

24. Extremadura, ordinaria 2020

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

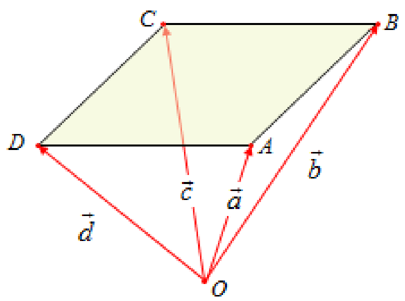
Solución:

a) Al vértice D se llega sumando:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow \vec{d} = \vec{c} + \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$$

Luego:

$D = (1, 0, 1) + (1, 3, -2) - (4, 3, 1) = (-2, 0, -2)$.



b) El área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial de dos de los vectores que determinan el paralelogramo. Por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Como $\overrightarrow{AB} = (4, 3, 1) - (1, 3, -2) = (3, 0, 3)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, -2) - (1, 3, -2) = (-3, -3, 0) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (9,\ -9,\ -9).$$

Luego, el área pedida es: $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + (-9)^2} = 9\sqrt{3}$ u².

25. Galicia, ordinaria 2020

6. Geometría:

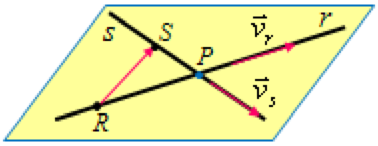
Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$.
Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

La posición relativa entre dos rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\mathbf{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano, pudiendo cortase o ser paralelas.

En este caso:

$\vec{v}_r = (2, -1, -2)$, $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$ y $\mathbf{RS} = (0, -3, -2) - (3, 0, -1) = (-3, -3, -1)$



Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 10 + 8 - 18 = 0$, los vectores son linealmente dependientes.

Como la dirección de los vectores $\vec{v}_r = (2, -1, -2)$ y $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$ no es la misma, las rectas se cortarán.

El punto de corte se halla igualando las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 - 2t \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x = h \\ y = -3 + 4h \\ z = -2 + 3h \end{cases} \to \text{Se igualan: } r \cap s \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2t = h \\ -t = -3 + 4h \\ -1 - 2t = -2 + 3h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 + 2t = h \downarrow \\ -t = -3 + 4(3 + 2t) \\ -1 - 2t = -2 + 3(3 + 2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2t = h \\ -9t = 9 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow t = -1;\ h = 1. \\ -8t = 8 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Luego, el punto de corte es $P(1, 1, 1)$.

26. Galicia, extraordinaria 2020

6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

Solución:

a) Los vectores dados serán coplanarios cuando el determinante asociado valga 0.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Rightarrow k=1$. Los vectores son coplanarios si $k = 1$.

b) El plano pedido viene determinado por el punto P y por los vectores $\vec{v}_r$ = (1, –4, 3), de dirección de r, y $\boldsymbol{RP}$, siendo R(1, 0, –1) ∈ r.

$\boldsymbol{RP}$ = (1, 0, 0) – (1, 0, –1) = (0, 0, 1).

Sus ecuaciones paramétricas son: $\pi: \begin{cases} x=1+t \\ y=-4t \\ z=3t+h \end{cases}$.

Su ecuación implícita será:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -4 & 0 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -4(x-1)-y=0 \Rightarrow \pi: 4x+y-4=0.$$

27. La Rioja, ordinaria 2020

7.– (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = a, \\ (a+1)x + (2a+1)y + z = -a, \\ ax + ay + z = -a. \end{cases}$$

Solución:

La posición relativa de los tres planos se determina estudiando la compatibilidad del sistema asociado.

- Si el sistema es compatible determinado, los tres planos se cortan en un único punto, cuyas coordenadas vienen dadas por la solución del sistema.
- Si el sistema es CI con un grado de indeterminación, los tres planos se cortan en una recta. La ecuación de esa recta viene dada por la solución del sistema. En este caso se dice que los tres planos son del mismo haz (de planos).
- Si el sistema es CI con dos grados de indeterminación, los tres planos son coincidentes.
- Si el sistema es incompatible, los tres planos no tienen ningún punto en común.

Discusión del sistema.

Si A es la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a+1 & 1 & -a \\ a & a & 1 & -a \end{array}\right) = M \to$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2+F1 \\ F3+F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 2a & 2a+2 & 0 \\ 2a-1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)(2a-2).$$

El determinante de A vale 0 cuando $a = -1$ o $a = 1$.

Con esto:

- Si $a \neq -1$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado. En este caso los tres planos se cortarán en un único punto.
- Si $a = -1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

Como $C2 = -C3 = -C4 \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta: son del mismo haz.

Que el rango vale 2 se deduce de $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

- Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = M$.

También se cumple que r(A) = r(M) = 2, pues $C3 = C4$. El sistema será compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta: son del mismo haz; distinto del anterior.

28. La Rioja, extraordinaria 2020

8.– (2 puntos) Dadas las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1, \\ 4x-2y+2z = 10, \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3},$$

y el plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s,

b) el plano π y la recta s.

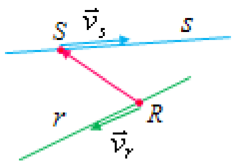
Solución:

a) La posición relativa entre dos rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\mathbf{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano, pudiendo cortase o ser paralelas.

En este caso:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{matrix} \\ E2+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ 6x=12 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y=1-2+z \\ 6x=12 \Rightarrow x=2 \end{cases} \to$$

haciendo $z = t$: $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 1)$;

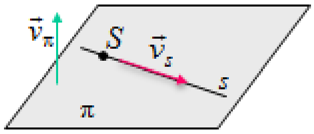


$\vec{v}_s = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{RS} = (-3, -2, 1) - (2, -1, 0) = (-5, -1, 1)$.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -18+9 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes.

Por tanto, las rectas se cruzan.

b) El vector normal del plano es $\vec{v}_\pi = (1, 1, -1)$.



Como el producto escalar

$\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_s = (1, 1, -1) \cdot (1, 2, 3) = 1 + 2 - 3 = 0$,

se deduce que dichos vectores son perpendiculares; lo que significa que la recta s es paralela la plano π, o está contenida en él.

Dado que el punto $S(-3, -2, 1) \in s$ cumple la ecuación del plano: $-3 - 2 - 1 + 6 = 0$, entonces la recta s está contenida en el plano π.

29. Madrid, ordinaria 2020

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

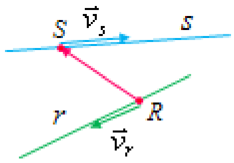
$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases};\quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Puede verse que $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} y = x - 2 \\ z = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\mathbf{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, estarán en el mismo plano.

Como $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$, $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$; $R = (0, -2, 1)$, $S = (-1, -4, 0) \to \mathbf{RS} = (-1, -2, -1)$, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 15 \neq 0.$$

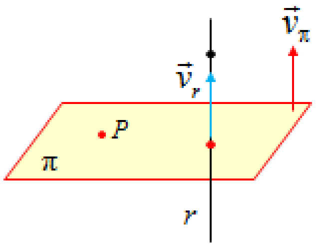


Luego, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

b) El vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$, será el normal al plano.

Si se quiere que el plano contenga al punto $P(2, -1, 5)$ su ecuación será:

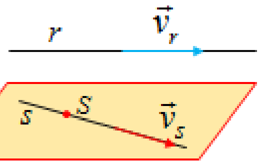
$$\pi \equiv 1\cdot(x-2) + 1\cdot(y+1) + 3\cdot(z-5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0.$$



c) El plano pedido viene determinado por el punto $S = (-1, -4, 0)$, de la recta s, y por los vectores $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$.

Sus ecuaciones son:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda + t \\ y = -4 - \lambda + t \\ z = \lambda + 3t \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y+4 & -1 & 1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \alpha \equiv -4(x+1) - 5(y+4) + 3z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 4x + 5y - 3z + 24 = 0.$$

30. Madrid, ordinaria 2020

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

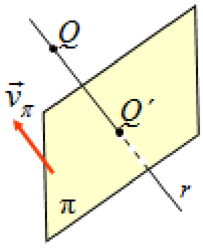
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) La proyección de Q sobre π es el punto de corte de π con la recta perpendicular a π por Q. La recta perpendicular a π que pasa por Q es:

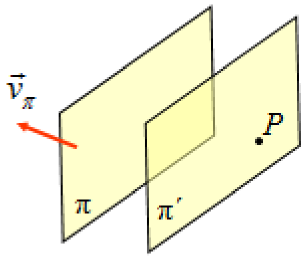
$$r \equiv \begin{cases} x=-1+t \\ y=0+2t \\ z=1-3t \end{cases}.$$



Corte de r con π:

$$(-1+t)+2(2t)-3(1-3t)=4 \Rightarrow 14t=8 \Rightarrow t=\frac{4}{7}.$$

Por tanto, $Q´=\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)$.

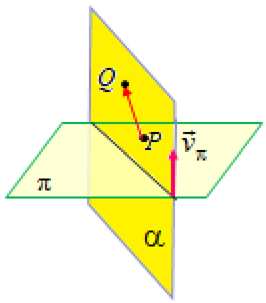


b) El plano paralelo a π que contiene a P es:

$$\pi´\equiv 1(x+3)+2(y-1)-3(z-2)=0 \Rightarrow \pi´\equiv x+2y-3x+7=0.$$

c) El plano pedido viene determinado por los vectores $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, –3) y ***PQ***, y por cualquiera de los puntos P (–3, 1, 2) o Q(–1, 0, 1).

Como ***PQ*** = (–1, 0, 1) – (–3, 1, 2) = (2, –1, –1), las ecuaciones del plano pedido son:



$$\alpha \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda+2t \\ y=\quad 2\lambda-t \\ z=1-3\lambda-t \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv -5(x+1)-5y-5(z-1)=0 \Rightarrow \alpha \equiv x+y+z=0.$$

31. Madrid, extraordinaria 20

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Solución:

a) El plano queda determinado por el punto $P(3, 3, 0)$ y por los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, y por $\boldsymbol{AP}$, donde $A(2, 0, -1) \in r$.

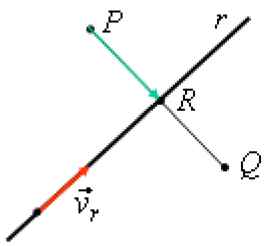
$\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$; $\boldsymbol{AP} = (3, 3, 0) - (2, 0, -1) = (1, 3, 1)$.

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ y-3 & 1 & 3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 1\cdot(x-3)+1\cdot(y-3)-4z=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-4z-6=0.$$

b) Si Q es el simétrico de P respecto la recta, se cumplen dos cosas:

- Su punto medio R debe ser de la recta.
- El vector $\boldsymbol{PR}$ debe ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \boldsymbol{PR} = 0$.



Sea R un punto genérico de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \to R = (2-t, t, -1).$$

Por tanto: $\boldsymbol{PR} = (2-t, t, -1) - (3, 3, 0) = (-1-t, t-3, -1)$.

- $\vec{v}_r \cdot \boldsymbol{PR} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 0)\cdot(-1-t, t-3, -1) = 1 + t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R = (1, 1, -1)$.
- Si $Q = (a, b, c)$, el punto medio entre P y Q es: $R = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

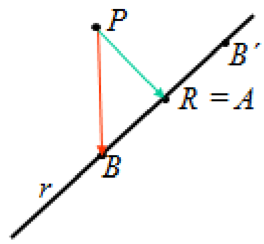
Igualando las coordenadas de *ambos* R se tiene:

$$\frac{a+3}{2} = 1 \Rightarrow a = -1; \quad \frac{b+3}{2} = 1 \Rightarrow b = -1; \quad \frac{c}{2} = -1 \Rightarrow c = -2.$$

El punto el punto simétrico de P respecto de r es: $Q = (-1, -1, -2)$.

c) La superficie del triángulo es un medio del módulo del producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{PB}$ y $\boldsymbol{AB}$.
Como el triángulo es rectángulo en A, entonces A es el punto R hallado anteriormente: $A = R = (1, 1, -1)$; : $\boldsymbol{PB} = (-2, -2, -1)$.
Si $B = (2-t, t, -1)$, entonces

$\boldsymbol{AB} = (2-t, t, -1) - (1, 1, -1) = (1-t, t-1, 0)$.



El producto vectorial es:

$$\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -2 & -2 & -1\\ 1-t & t-1 & 0\end{vmatrix}=(t-1,\ t-1,\ -4t+4)\ \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(t-1)^2+(t-1)^2+16(t-1)^2}=3\sqrt{2}\cdot(t-1).$$

El área del triángulo será: $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{BA}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot(t-1)$.

Como el área del triángulo debe ser $S=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot(t-1)\ \Rightarrow 1=(t-1)\ \Rightarrow t=2$.

Luego, las coordenadas del punto B serán:

$$B\equiv\begin{cases}x=2-2=0\\ y=2\\ z=-1\end{cases}.$$

Nota: Hay otra solución; el punto B' indicado en la figura.

32. Madrid, extraordinaria 2020

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

a) El punto medio el segmento AC es $M=\left(\frac{1+4}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$.

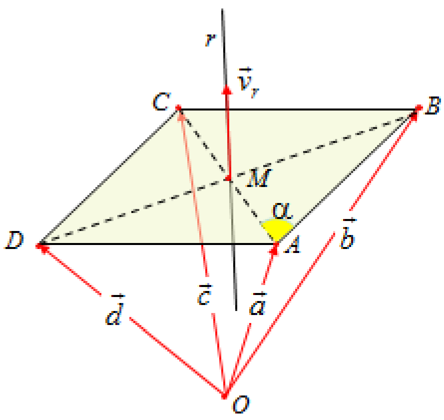
El vector de dirección de la recta pedida viene dado por $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, siendo

$\overrightarrow{AB}$ = (2, 1 , 0) – (1, 0, –1) = (1, 1, 1);

$\overrightarrow{AC}$ = (4, 3, –2) – (1, 0, –1) = (3, 3, –1).

Luego: $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}=(-4,\ 4,\ 0).$$

Por tanto: $$r\equiv\begin{cases}x=\frac{5}{2}-4t\\ y=\frac{3}{2}+4t\\ z=-\frac{3}{2}\end{cases}.$$



b) Al vértice D se llega sumando:

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}\Rightarrow$$
$$\vec{d}=\vec{c}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Luego:

D = (4, 3, –2) + (1, 0, –1) – (2, 1, 0) = (3, 2, –3).

El área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial de dos de los vectores que determinan el paralelogramo. Por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Por tanto, el área pedida es: $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ u².

c) A partir del producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se obtiene:

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(3,\ 3,\ -1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{3+3-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{59}}\Rightarrow$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{59}}\right)\approx 49{,}4^{\circ}.$$

33. Murcia, ordinaria 2020

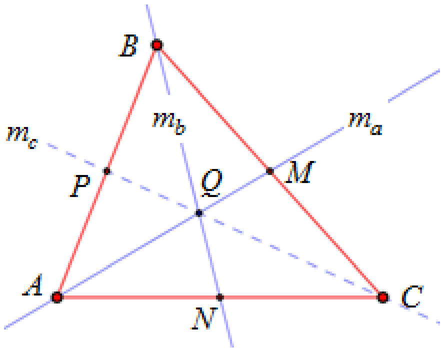
5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A=(-1,2,3)$, $B=(3,-4,1)$ y $C=(1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

a) Los puntos medios de los lados son:



$$M=\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{-4-4}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(2,\ -4,\ 3);$$

$$N=\left(\frac{-1+1}{2},\ \frac{2-4}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)=(0,\ -1,\ 4);$$

$$P=\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{2-4}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)=(1,\ -1,\ 2).$$

Vectores de dirección de las medianas:

- De m_a, $\overrightarrow{AM}$ = (2, –4, 3) – (–1, 2, 3) = (3, –6, 0) ≡ (1, –2, 0).
- De m_b, $\overrightarrow{BN}$ = (0, –1, 4) – (3, –4, 1) = (–3, 3, 3) ≡ (–1, 1, 1).
- De m_c, $\overrightarrow{CP}$ = (1, –1, 2) – (1, –4, 5) = (0, 3, –3) ≡ (0, 1, –1).

Ecuaciones de las medianas:

$$m_a\equiv\begin{cases}x=-1+t\\ y=2-2t\\ z=3\end{cases};\quad m_b\equiv\begin{cases}x=3-h\\ y=-4+h\\ z=1+h\end{cases};\quad m_c\equiv\begin{cases}x=1\\ y=-4+k\\ z=5-k\end{cases}.$$

b) Corte de m_a con m_b:

$$m_a\equiv m_b\Rightarrow\begin{cases}-1+t=3-h\\ 2-2t=-4+h\\ 3=1+h\end{cases}\Rightarrow t=2;\ h=2.$$ El punto de corte es: Q = (1, –2, 3).

Corte de m_a con m_c:

$$m_a\equiv m_c\Rightarrow\begin{cases}-1+t=1\\ 2-2t=-4+k\\ 3=5-k\end{cases}\Rightarrow t=2;\ k=2.$$ El punto de corte es: Q' = (1, –2, 3).

Como ambos puntos coinciden, se deduce que las tres medianas se cortan en un mismo punto: Q = (1, –2, 3). (Ese punto es el baricentro del triángulo).

34. Murcia, extraordinaria 2020

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q=(-3,-2,5)$, y la recta

$$r: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

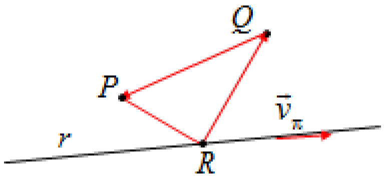
a) **[1,5 p.]** Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo $\widehat{PQR}$ es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) La superficie del triángulo es un medio del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{QP}$ por $\overrightarrow{QR}$.



$\overrightarrow{QP}$ = (5, 6, 1) – (–3, –2, 5) = (8, 8, –4).

Si $R = (t, t + 1, -1 + 4t)$ es un punto genérico de r, entonces:

$\overrightarrow{QR}$ = (t, t + 1, –1 +4t) – (–3, –2, 5) =(t +3, t + 3, 4t –6).

Su producto vectorial es:

$$\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 8 & 8 & -4\\ t+3 & t+3 & 4t-6\end{vmatrix}=(36t-36,\ -36t+36,\ 0)\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{(36(t-1))^2+(-36(t-1))^2}=36\sqrt{2}\cdot(t-1).$$

(Habría otra solución con el signo – de la raíz).

El área del triángulo será: $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}\right|=18\sqrt{2}\cdot(t-1)$.

Como el área del triángulo debe ser $S=18\sqrt{2}=18\sqrt{2}\cdot(t-1)\Rightarrow 1=(t-1)\Rightarrow t=2$.

Luego, R = (2, 3, 7).

b) La recta s, que pasa por P y Q, viene determinada por el punto P y el vector

$\overrightarrow{QP}$ = (8, 8, –4) ≡ (2, 2, –1).

Su ecuación es: $s\equiv\begin{cases}x=5+2h\\ y=6+2h\\ z=1-h\end{cases}$; $\vec{v}_s$ = (2, 2, –1).

Este vector es perpendicular a $\vec{v}_r$ = (1, 1, 4), pues su producto escalar vale 0.

En efecto: $\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s$ = (1, 1, 4) · (2, 2, –1) = 2 + 2 – 4 = 0.

Además, las rectas r y s se cortan, pues el sistema $r\equiv s\Leftrightarrow\begin{cases}t=5+2h\\ 1+t=6+2h\\ -1+4t=1-h\end{cases}$ tiene solución;

siendo t = 1 y h = –2. El punto de corte es P = (1, 2, 3).

35. Navarra, ordinaria 2020

P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta $s \equiv \begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi \equiv 2x-y+3z-6=0$ y pasa por el punto $P \equiv (-1,3,1)$. (2.5 puntos)

Solución:

La recta pedida tiene que estar en el plano π', paralelo a π y que pasa por P.

Este plano es:

$$\pi' \equiv 2x-y+3z+d=0;\ \text{como } P \in \pi' \to -2-3+3+d=0 \Rightarrow d=2 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv 2x-y+3z+2=0$$

Además de P, otro punto de r será el de corte de la recta s con el plano π'.

Ecuaciones paramétricas de la recta s:

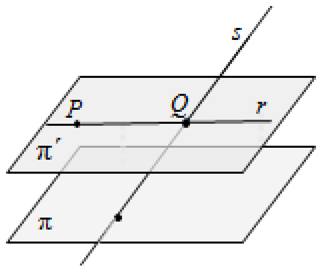
$$s \equiv \begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x+(5-x)-z-7=0 \\ y=5-x \uparrow \end{cases} \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} z=-2+2x \\ y=5-x \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=5-t \\ z=-2+2t \end{cases}.$$

El punto de corte de s con π' se obtiene sustituyendo las ecuaciones de s en π'.

$$\pi' \equiv 2t-(5-t)+3(-2+2t)+2=0 \Rightarrow 9t-9=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow$$

$Q \equiv (1, 4, 0)$.



La recta r viene determinada por el punto P y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PQ} = (1, 4, 0) - (-1, 3, 1) = (2, 1, -1)$.

Su ecuación en forma continua es:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

36. Navarra, ordinaria 2020

P6) Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$ (2.5 puntos)

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = 4+t \\ z = -1-4t \end{cases}$.

Puede verse que ninguno de los puntos, A o B, pertenecen a la reca.

Por otra parte, el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, 5, 1) – (–1, 2, 1) = (3, 3, 0), no es paralelo al de dirección de la recta, $\vec{v}_r$ = (–1, 1, –4), pero es perpendicular:

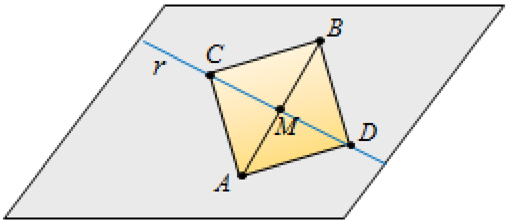
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_r = (3, 3, 0) \cdot (-1, 1, -4) = -3 + 3 = 0$.

Esto significa que los puntos A y B están en lados distintos de la recta.

Además, se observa que el punto medio, M, del segmento AB, pertenece a la recta.

En efecto:

$$M = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+5}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 1\right);$$



que se obtiene de r cuando $t = -\frac{1}{2}$.

En consecuencia, los puntos A y B son vértices opuestos del cuadrado, y la distancia entre ellos el valor de la diagonal.

Esa distancia es: $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Por tanto, los otros dos vértices, C y D, son dos puntos de la recta r que disten de M la mitad de la diagonal: $d(C, M) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Las coordenadas de C (o de D) son: $C = (-t, 4+t, -1-4t)$.

Luego:

$$d(C, M) = \sqrt{\left(-t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4+t-\frac{7}{2}\right)^2 + (-1-4t-1)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Elevando al cuadrado:

$$t^2 + t + \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{4} + t + t^2 + 4 + 16t + 16t^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow 18t^2 + 18t + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$18t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Para $t = 0$ se obtiene $C \equiv (0, 4, -1)$; para $t = -1$ se obtiene $D \equiv (1, 3, 3)$.

<u>**37**. País Vasco, ordinaria 2020</u>

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea *r* la recta dada por $r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}$.

Hallar *A* para que *r* y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a *r* que pase por el origen.

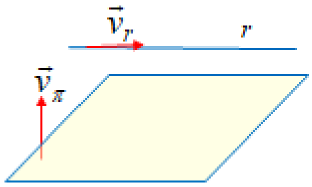
<u>Solución</u>:

La recta y el plano serán paralelos cuando el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, sea perpendicular al característico el plano, $\vec{v}_\pi$.

El vector de dirección de la recta puede obtenerse hallando sus ecuaciones paramétricas.

$$r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-3y=-1-4z\\3x-2y=-3-z\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}2E1-3E2\\4E2-3E1\end{matrix}\begin{cases}-x=7-5z\\y=-9+8z\end{cases}\to$$

Haciendo $z=t\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-7+5t\\y=-9+8t\\z=\quad t\end{cases}\Rightarrow\vec{v}_r$ = (5, 8, 1).



En vector característico del plano es: $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, *A*).

Ambos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar vale 0.

$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_\pi$ = (5, 8, 1) · (2, –1, *A*) = 10 – 8 + *A* = 0 ⇒ *A* = –2.

El plano es $\pi\equiv 2x-y-2z=0$.

Como el punto (–7, –9, 0) es de la recta, pero no del plano (no verifica su ecuación, pues –14 + 9 – 2 ≠ 0), se deduce que la recta es paralela al plano.

El vector característico del plano perpendicular a *r* es el de dirección de *r*: $\vec{v}_{\pi'}=\vec{v}_r$.

Por tanto, su ecuación será: $\pi'\equiv 5x+8y+z+d=0$.

Como se desea que pase por el origen, *d* = 0; luego, el plano pedido es: $\pi'\equiv 5x+8y+z=0$.

38. País Vasco, extraordinaria 2020

Ejercicio B2

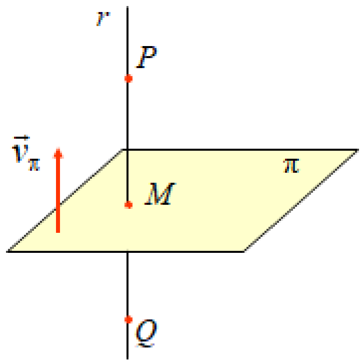
Hallar el punto Q, simétrico de $P = (1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación $x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución:

Si $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es el simétrico de P respecto de un plano π, entonces:

Ambos puntos, P y Q estarán en la recta r, perpendicular a π por P.

Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y Q.



Como $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1), se deduce que $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con plano π:

$(1 + \lambda) + (2 + \lambda) + (3 + \lambda) = 0 \Rightarrow 6 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

Por tanto, $M = (-1, 0, 1)$.

Punto medio de P y Q: $\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{2+y_0}{2}, \dfrac{3+z_0}{2}\right)$

Como $M = (-1, 0, 1) = \left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{2+y_0}{2}, \dfrac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$-1 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -3;\ 0 = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -2;\ 1 = \frac{3+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -1$$

Por tanto, $Q = (-3, -2, -1)$.