ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2020

1. Andalucía, ordinaria 2020

Ejercicio 2. (2,5 puntos) Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

Solución:

La función corta al eje OX en $x = 0$. Para $x < 0$, la función es negativa; para $x > 0$, es positiva. Por tanto, el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ se halla mediante la integral definida $\int_0^a xe^{3x}dx$.

Una primitiva de $f(x) = x \cdot e^{3x}$ se obtiene por "partes".

Tomando:

$$u = x \text{ y } dv = e^{3x}dx \Rightarrow du = dx \text{ y } v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Luego,

$$\int xe^{3x}dx = x\frac{1}{2}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$$

Por tanto:

$$\int_0^a xe^{3x}dx = \left[\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^a = \frac{a}{3}e^{3a} - \frac{1}{9}e^{3a} - \left(-\frac{1}{9}e^0\right) = \frac{1}{3}e^{3a}\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}.$$

Como esa área vale $\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{3}e^{3a}\left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{3}e^{3a}\left(a - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

2. Andalucía, ordinaria 2020

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ *para* $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (3, 5). **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Operando (dividiendo y descomponiendo en fracciones simples) se obtiene:

División: $\frac{3x^2+4}{(x-2)^2} = \frac{3(x^2-4x+4)+12x-8}{(x-2)^2} = 3 + \frac{12x-8}{(x-2)^2}$ → Si no terminas de "ver" lo que se ha hecho, haz la división con el algoritmo ordinario.

Descomposición en fracciones simples de $\frac{12x-8}{(x-2)^2}$.

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} \Rightarrow \frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{A+B(x-2)}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} 12 = B \\ -8 = A - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 12 \\ A = 16 \end{cases}.$$

Por tanto,

$$\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}=3+\frac{16}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)}.$$

Luego:

$$F(x)=\int\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx=\int\left(3+\frac{16}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)}\right)dx \Rightarrow F(x)=3x-\frac{16}{x-2}+12\ln(x-2)+k.$$

b) Si se desea que $F(x)$ pase por el punto (3, 5), debe cumplirse que $F(3)=5 \Rightarrow$

$$F(3)=3\cdot 3-\frac{16}{3-2}+12\ln(3-2)+k=5 \Rightarrow 9-16+0+k=5 \Rightarrow k=12.$$

Luego, $F(x)=3x-\dfrac{16}{x-2}+12\ln(x-2)+12$.

<u>**3**. Andalucía, extraordinaria 2020</u>

<u>**EJERCICIO 1**</u> **(2.5 puntos)**

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

<u>Solución</u>:

Derivando dos veces:

$$f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right) \Rightarrow f'(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)+e^x(2x-5) \Rightarrow f'(x)=e^x\left(x^2-3x+1\right);$$

$$f''(x)=e^x\left(x^2-3x+1\right)+e^x(2x-3) \Rightarrow f''(x)=e^x\left(x^2-x-2\right).$$

La función es cóncava (∩) para los valores de *x* tales que $f''(x)<0$; será convexa (∪) cuando $f''(x)>0$. En los puntos de inflexión, $f''(x)=0$ y $f'''(x)\neq 0$; en los puntos de inflexión la función pasa de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava.

$\to$ $f''(x)=0 \Rightarrow \left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=2$.

Con esto:

- Si $x<-1$, como $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa.
- Si $-1<x<2$, como $f''(x)<0 \Rightarrow$ la función es cóncava.
- Si $x>2$, como $f''(x)>0 \Rightarrow$ la función es convexa.
- En $x=-1$, la función cambia de convexa a cóncava: hay un punto de inflexión.
- En $x=2$, la función cambia de cóncava a convexa: hay un punto de inflexión.

Por tanto:

Concavidad (∩): $x \in (-1, 2)$;

Convexidad (∪): $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$;

Puntos de inflexión: $x=-1$; $x=2$.

4. Aragón, ordinaria 2020

5) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)$

Solución:

Se trata de una indeterminación: $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)=\left(1^{\infty}\right)$.

Aplicando logaritmos:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^3}\ln\left(1+x-\sin x\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+x-\sin x\right)}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)\to \text{ahora puede aplicarse}$$

L´Hôpital $\to$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{1+x-\sin x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2\left(1+x-\sin x\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(L´H\right)=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{6x\left(1+x-\sin x\right)+3x^2\left(1-\cos x\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(L´H\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{6\left(1+x-\sin x\right)+6x\left(1-\cos x\right)+6x\left(1-\cos x\right)+3x^2\sin x}=\frac{1}{6}.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)=e^{1/6}$.

Nota: Se obtiene un resultado más rápido aplicando la relación:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-\sin x\right)^{1/x^3}\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\left(\left(1+x-\sin x\right)-1\right)}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}}\to$$

$$\to\left(L´H\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=\left(L´H\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{6x}}=\left(L´H\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{6}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

5. Aragón, ordinaria 2020

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

Solución:

- La función dada, $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$, puede tener una asíntota vertical en los ceros del

denominador, cuando $1-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow x=0$. Para ello, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{+e^{-x}}=\frac{0}{1}=0 \to \text{No tiene asíntota vertical.}$$

- Tendrá una asíntota horizontal si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k$.

Para calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$ deben considerarse los límites hacia +∞ y –∞, pues $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, mientras que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

Luego:

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{1}\right]=+\infty \Rightarrow \text{la función no tiene asíntota horizontal hacia } +\infty.$$

$$\to \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=\left[\frac{2}{-\infty}\right]=0 \Rightarrow \text{la función}$$

tiene asíntota horizontal hacia –∞, la recta $y = 0$.

- Tendrá una asíntota oblicua si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$, siendo m y $n\neq\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\left(1-e^{-x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(1-e^{-x}\right)+xe^{-x}}\to$$

Hay que estudiar el comportamiento de xe^{-x} en el infinito: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}$.

$$\to \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

$$\to \lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=[-\infty\cdot\infty]=\infty.$$

Con esto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(1-e^{-x}\right)+xe^{-x}}=\frac{\infty}{1}\to \text{hacía } +\infty \text{ no hay asíntota oblicua.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(1-e^{-x}\right)+xe^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}}=\frac{2}{\infty}=0\to \text{Tampoco tiene}$$

asíntota oblicua hacia la izquierda.

6. Aragón, ordinaria 2020

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$.

Solución:

Esta integral debe hacerse por el método de partes.

Tomando:

$$u=\ln^2 x \Rightarrow du=\left(\frac{2}{x}\ln x\right)dx;\quad dv=\sqrt{x}dx=x^{1/2}dx \Rightarrow v=\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Luego:

$$\int\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)dx=\left(\ln^2 x\right)\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\int\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{2}{x}\ln x\right)dx$$ $\to$ la 2ª integral también debe hacerse por partes, tomando:

$$u'=\ln x \Rightarrow du'=\frac{1}{x}dx;\; dv'=\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{2}{x}dx=\frac{4}{3}x^{1/2}dx \Rightarrow v'=\int\frac{4}{3}x^{1/2}dx=\frac{8}{9}x^{3/2}.$$

Por tanto:

$$\int\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{2}{x}\ln x\right)dx=\ln x\cdot\frac{8}{9}x^{3/2}-\int\frac{8}{9}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot\frac{8}{9}x^{3/2}-\frac{16}{27}x^{3/2}.$$

Luego:

$$\int\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)dx=\left(\ln^2 x\right)\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\int\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{2}{x}\ln x\right)dx=\ln x\cdot\frac{8}{9}x^{3/2}-\left(\ln x\cdot\frac{8}{9}x^{3/2}-\frac{16}{27}x^{3/2}\right)+k$$

$$\Rightarrow \int\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{3/2}\cdot\ln x+\frac{16}{27}x^{3/2}+k.$$

7. Aragón, extraordinaria 2020

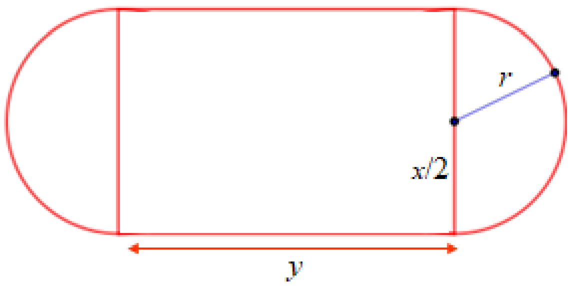
6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $4+\pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

Solución:

El perímetro exterior del campo de juego es:

$$p = 2y + 2\pi \cdot \frac{x}{2} = 2y + \pi x.$$



El total a pintar, con las dos rayas interiores, será:

$$P = 2y + \pi x + 2x$$

La superficie es: $S = xy + \dfrac{\pi x^2}{4}$.

Como

$$S = xy + \frac{\pi x^2}{2} = 4 + \pi \Rightarrow y = \frac{4+\pi - \frac{\pi x^2}{4}}{x} = \frac{16 + 4\pi - \pi x^2}{4x}$$

Sustituyendo el valor de y en P:

$$P = \frac{16 + 4\pi - \pi x^2}{2x} + (\pi + 2)x.$$

El mínimo de P se da en la solución de $P' = 0$ que haga positiva a P''.

Derivando:

$$P' = \frac{-2\pi x \cdot 2x - (16 + 4\pi - \pi x^2) \cdot 2}{4x^2} + (\pi + 2) = \frac{-4\pi x^2 - 32 - 8\pi + 2\pi x^2 + 4\pi x^2 + 8x^2}{4x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = \frac{-32 - 8\pi + (2\pi + 8)x^2}{4x^2}.$$

$P' = 0 \Rightarrow -32 - 8\pi + (2\pi + 8)x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{32 + 8\pi}{8 + 2\pi} = 4 \Rightarrow x = 2$; la solución $x = -2$ carece de sentido en este caso.

Como $P' = \dfrac{-32 - 8\pi + (2\pi + 8)x^2}{4x^2} = \dfrac{-32 - 8\pi}{4x^2} + \dfrac{2\pi + 8}{4} \Rightarrow$

$P'' = \dfrac{-32 - 8\pi + (2\pi + 8)x^2}{4x^2} = \dfrac{-(-32 - 8\pi) 8x}{16x^4} = \dfrac{16 + 4\pi}{x^3}$, es positiva para $x = 2$, se deduce que para el valor de $x = 2$ m se tiene el mínimo buscado.

El valor de $y = \dfrac{16 + 4\pi - \pi x^2}{4x} \Rightarrow y = \dfrac{16 + 4\pi - 4\pi}{8} = 2$ m.

8. Asturias, ordinaria 2020

Bloque 2.A Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

Solución:

a) Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son las soluciones de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 3.$$

Derivando:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12.$$

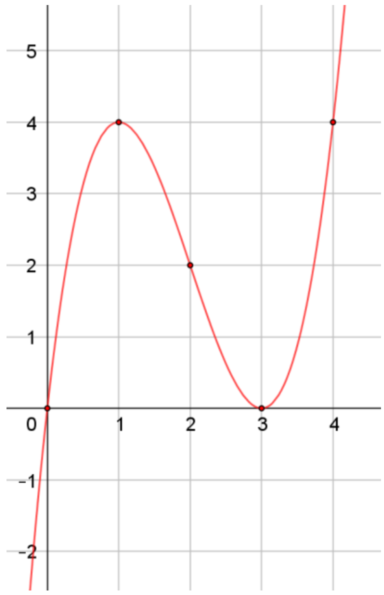
- Puntos singulares (son los posibles máximos o mínimos):

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}.$$

Como $f''(1) = -6$, en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.
Como $f''(3) = 6$, en $x = 3$ la función tiene un mínimo relativo.

- Puntos de inflexión: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Como $f'''(x) = 6 \neq 0$, en x = 2 se tiene un punto de inflexión.



b) Crecimiento y decrecimiento…

- Si $x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $1 < x < 3$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si $x > 3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$).
- Si $x > 2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$).

Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:

(−1, −16); (0, 0); (1, 4), máximo; (2, 2), P.I.;
(3, 0), mín; (4, 4): (5, 20)

c) La recta tangente a la curva en $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 2 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x + 8.$$

9. Asturias, ordinaria 2020

Bloque 2.B Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

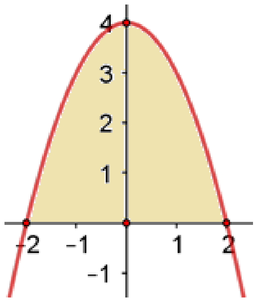
c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

Solución:

a) La gráfica de la función es una parábola cóncava que corta al eje OX en los puntos $x = -2$ y $x = 2$.

El recinto D es el sombreado en la figura adjunta.

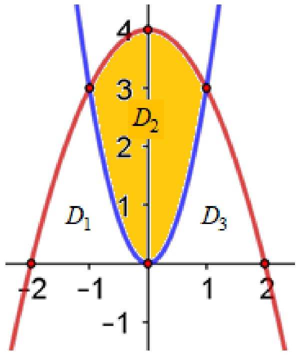
Su área viene dada por:



$$S_D = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

b) Ambas gráficas se cortan en las soluciones de $4 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \pm 1$.

La segunda función $g(x) = 3x^2$ es otra parábola, que puede trazarse dando algunos valores.



c) El recinto D_2 es la región limitada por las dos parábolas.

Su área viene dada por:

$$S_{D_2} = \int_{-1}^{1}\left(4 - x^2 - 3x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(4 - 4x^2\right)dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{4}{3} - \left(-4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ u}^2.$$

10. Asturias, extraordinaria 2020

Bloque 2.A Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función no está definida en $x = 0$: Dom(f) = **R** – {0}.

En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3+1}{x^2} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0 la función tiende hacia +∞; luego, la curva se pega, por ambos lados, al semieje positivo *OY*.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador. Su ecuación es la recta $y = mx + n$, siendo

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = n$, con m y $n \neq \infty$.

Esto es: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x^3}\right) = 2$;

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

La asíntota es la recta $y = 2x$.

Como $f(x) - y = \dfrac{2x^3+1}{x^2} - 2x = \dfrac{1}{x^2} > 0$, se deduce que la función siempre va por encima de la asíntota.

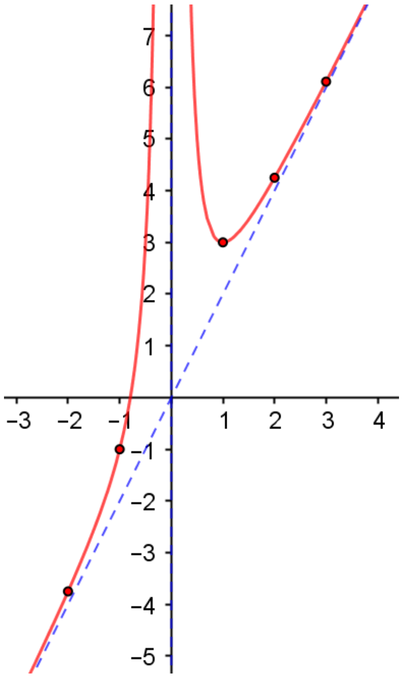
b) Derivando:

$$f'(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - \left(2x^2+1\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3-2}{x^3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \to x = 1.$$

Con esto:

- Si $x < 0$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $0 < x < 1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- En $x = 1$ la función tiene un mínimo (decrece a su izquierda, crece a su derecha).



c) Con lo indicado sobre las asíntotas y dando algunos valores, puede trazarse su gráfica.
Algunos valores:

(–2, –15/4); (–1, –1); (1, 3); (2, 17/4); (3, 55/9); …

11. Asturias, extraordinaria 2020

Bloque 2.B Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$.
(1.25 puntos)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$. La indeterminación se resuelve aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x - xe^x}{2x + 2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x - e^x - xe^x}{2 + 2\cos x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

b) $\int \left(x\cos x - e^{-x}\right)dx = \int x\cos x\,dx - \int e^{-x}dx = \int x\cos x\,dx + e^{-x} + k$.

La integral $\int x\cos x\,dx$ se hace por el método de partes.

Tomando:

$x = u \Rightarrow dx = du$; $\quad dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

se tiene,

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$$

Por tanto:

$$\int \left(x\cos x - e^{-x}\right)dx = x\sin x + \cos x + e^{-x} + k.$$

Si pasa por el punto (0, 3) $\Rightarrow 3 = 0\cdot\sin 0 + \cos 0 + e^{-0} + k \Rightarrow 3 = 1 + 1 + k \Rightarrow k = 1$.

Por tanto, la primitiva pedida es: $F(x) = x\sin x + \cos x + e^{-x} + 1$.

12. Baleares, ordinaria 2020

2. Considera la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$y = f(x) = x^3 - 3x.$$

(a) Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció al punt d'abscissa $x = -1$. (2 punts)

(b) Fes un esbós de la gràfica de $y = f(x)$ i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funció a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció donada i la recta $y = 2$.(4 punts)

Solución:

(a) La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

Derivando:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \to f'(-1) = 0.$$

Como $f(-1) = -1 + 3 = 2$, la recta tangente será:

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

(b) Corte con los ejes: $f(x) = x^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{3}$.

Puntos $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$; $(0,\ 0)$; $\left(\sqrt{3},\ 0\right)$

→ Como $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, se deduce:

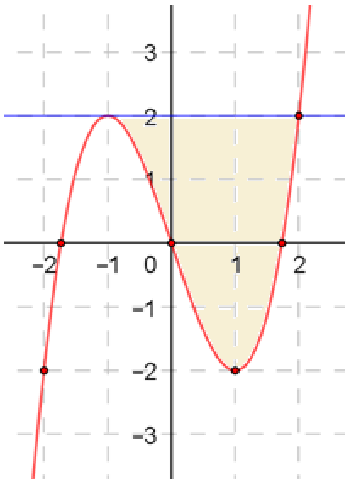
- Si $x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

En $x = -1$ se tiene un máximo (crece a su izquierda, decrece a su derecha). Punto (–1, 2).

- Si $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

En $x = 1$ se tiene un mínimo (decrece a su izquierda, crece a su derecha). Punto (1, –2).

- Si $x \to -\infty$, $f(x) = x^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right) \to (-\infty)\cdot(+\infty) \to -\infty$.
- Si $x \to +\infty$, $f(x) = x^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right) \to (+\infty)\cdot(+\infty) \to +\infty$.



Dando algunos valores más, puede trazarse su gráfica.

(–2, –2); (2, 2); …

(c) La recta y la cura se cortan en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$.

El área es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$\int_{-1}^{2}\left(2 - \left(x^3 - 3x\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(2 - x^3 + 3x\right)dx = \left(2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 4 - 4 + 6 - \left(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}\ \text{u}^2.$$

13. Baleares, extraordinaria 2020

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \to P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

on la variable t, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i $P(t)$ indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps t. Segons el model, calcula:

(a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020. (1 punt)

(b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)

(c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà. (4 punts)

(d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$. (2 punts)

Solución:

(a) El 1 de enero de 2000, t = 0, luego $P(t) = 1$: había 1000 peces.

A finales del año 2000, t = 20, luego habrá $P(20) = \sqrt{21} - \sqrt{20} \approx 0{,}1104$; unos 110 peces.

(b) A largo plazo, cuando $t \to \infty$, la población tiende a $\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right)$.

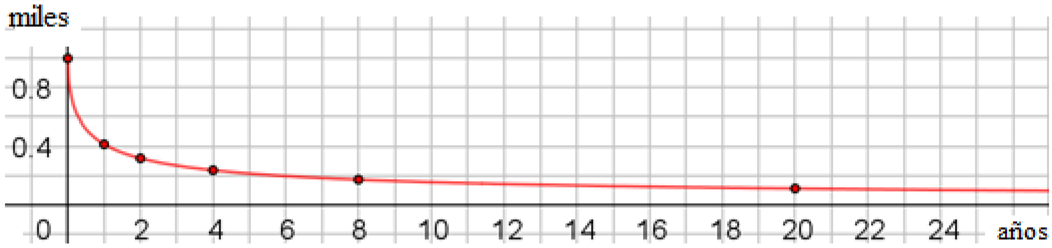
$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

(Esto significa que el eje OX es una asíntota horizontal de la función).

(c) La función es siempre decreciente, luego no tiene mínimo.
En efecto, su derivada,

$P'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} < 0$, pues la primera fracción siempre es menor que la segunda (tienen el mismo numerador, pero el denominador de la primera es mayor que el de la segunda).
Por tanto, la función siempre es decreciente.

(d) Dando algunos valores a t se obtiene los puntos:
(0, 1); (1, 0,4142); (2, 0,3178); (4, 0,23619); (8, 0,1716); (20, 0,1104), …
Su gráfica es la que se indica.



14. Cantabria, ordinaria 2020

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solución:

1) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$.

2) La pendiente de la tangente es el valor de la derivada en el punto.

$$f'(\pi) = \frac{\cos(\pi)\cdot\pi - \sin(\pi)}{\pi^2} = \frac{-\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}.$$

3) Puede tener una asíntota vertical en $x = 0$, pues en ese punto se anula el denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \text{No tiene asíntota vertical.}$$

Tiene una asíntota horizontal, pues:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{\infty} = 0 \rightarrow \text{la asíntota es la recta de ecuación } y = 0.$$

Evidentemente no tiene asíntota oblicua.

4) Hecho en el punto 3): $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = (L'H) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

15. Cantabria, extraordinaria 2020

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

3) [1 PUNTO] Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Solución:

1) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\sin(x)\cdot x - (1-\cos(x))}{x^2} = \dfrac{\sin(x)\cdot x + \cos(x) - 1}{x^2}$.

2) La pendiente de la tangente es el valor de la derivada en el punto.

$$f'(\pi) = \frac{\sin(\pi)\cdot\pi + \cos(\pi) - 1}{\pi^2} = \frac{-1-1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

3) Debe hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

4) En $x = 0$ la función no está definida y su denominador se anula, luego podría tener una asíntota vertical; pero como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0 \to$ No tiene asíntota vertical.

Tiene una asíntota horizontal, pues:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(\infty)}{\infty} = 0$$ $\to$ el cos (∞) es un número que está entre -1 y 1.

La asíntota es la recta de ecuación $y = 0$.

Evidentemente no tiene asíntota oblicua.

16. Castilla y León, ordinaria 2020

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2,2]$ y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

Solución:

Es una aplicación del teorema de Bolzano: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ o $f(a) > 0 > f(b)$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

Se considera la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

Es continua en todo **R**; en particular en el intervalo $[-2, 2]$.

Además, $f(-2) = -8 + 24 + 2 = 18 > 0$ y $f(2) = 8 - 24 + 2 = -14 < 0$.

Como cumple las hipótesis del teorema, entonces existe algún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Pero esto equivale a que $f(c) = c^3 - 12c + 2 = 0 \Leftrightarrow c^3 - 12c = -2$. O lo que es lo mismo, $c \in (-2, 2)$ es solución de la ecuación $x^3 - 12x = -2$.

Para ver que esa solución es única basta con comprobar que la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ es siempre decreciente en el intervalo $[-2, 2]$.

Como $f'(x) = 3x^2 - 12$, se anula en cuando $x = -2$ o $x = 2$, entonces:

- Si $x < -2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $-2 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

En $x = -2$ se tiene un máximo (crece a su izquierda, decrece a su derecha). Punto $(-2, 18)$.

- Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

En $x = 2$ se tiene un mínimo (decrece a su izquierda, crece a su derecha). Punto $(2, -14)$.

Como la función continua, $f(x) = x^3 - 12x + 2$, es decreciente en todo el intervalo $[-2, 2]$, y tiene distinto signo en sus extremos $f(-2) > 0 > f(2)$, se deduce que solo corta una vez al eje *OX*. Por tanto, la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución única en el intervalo $[-2, 2]$.

17. Castilla y León, ordinaria 2020

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + sen\, x - 1}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x + \cos x)dx$ **(1 punto)**

Solución:

a) Debe hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} = \left[\frac{1-1-0}{1+0-1} = \frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{e^x + \cos x} = \frac{1+0-1}{1+1} = 0 .$$

b) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\, dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi/2} =$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - (-\cos 0 + \sin 0) = 0 + 1 - (-1 + 0) = 2 .$$

18. Castilla y León, extraordinaria 2020

E6.- (Análisis)

Demostrar que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + sen\, x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,\ 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

Solución:

Es una aplicación del teorema de Bolzano: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ o $f(a) > 0 > f(b)$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

Se considera la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \sin x$, que es continua en todo **R**; en particular en el intervalo [0, 2].

Además, $f(0) = 0 + 0 - 1 - 0 < 0$ y $f(2) = 16 + 6 - 1 - \sin 2 = 21 - \sin 2 > 0$.

Como cumple las hipótesis del teorema, entonces existe algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Pero esto equivale a que $f(c) = c^4 + 3c - 1 - \sin c = 0 \Leftrightarrow c^4 + 3c = 1 + \sin c$. O lo que es lo mismo, $c \in (0, 2)$ es solución de la ecuación $x^3 + 3x = 1 + \sin x$.

Para ver que esa solución es única basta con comprobar que la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \sin x$ es siempre creciente en el intervalo [0, 2].

Como $f´(x) = 4x^3 + 3 - \cos x$ es positiva en el intervalo [0, 2], pues $4x^3 > 0$ si $x > 0$, y $3 - \cos x > 0$ siempre, entonces, se deduce que la función es creciente en el intervalo [0, 2]. Por tanto, solo puede cortar una vez al eje *OX*, lo que significa que la solución es única.

19. Castilla y León, extraordinaria 2020

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$. **(1 punto)**

Solución:

a) Puede hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} = \left[\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}{-1} = \frac{1}{2}.$$

b) Si se observa que el numerador, $2x-e^{-x}$, de la expresión $f(x) = \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$ es la derivada del denominador x^2+e^{-x}, entonces la primitiva es inmediata:

$$F(x) = \int \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}dx = \ln\left(x^2+e^{-x}\right)+k.$$

Si se verifica que $F(0)=3 \Rightarrow F(0) = \ln(0+1)+k = 3 \Rightarrow k = 3$.

Por tanto, $F(x) = \ln\left(x^2+e^{-x}\right)+3$.

20. Castilla y León, extraordinaria 2020

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo [1,3] y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$. **(1 punto)**

Solución:

a) La función está definida si $x > 0$.

Derivando e igualando a 0:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=0 \text{ si } 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e.$$

Por tanto:

- Si $0 < x < e$, como $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $x > e$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

En $x = e$ se tiene un máximo (crece a su izquierda, decrece a su derecha). Punto $(e,\ 1/e)$.

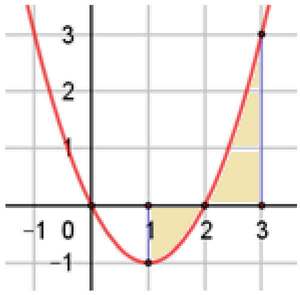
b) La función $f(x)=x^2-2x=x(x-2)$, que es una parábola de convexa (∪), corta al eje OX en las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

Por tanto:

- Si $x < 0 \Rightarrow f(x)>0 \rightarrow$ la función es positiva.
- Si $0 < x < 2$, $f(x)<0 \Rightarrow$ la función es negativa.
- Si $x > 2 \Rightarrow f(x)>0 \rightarrow$ la función es positiva.

Por tanto, en el intervalo [1, 3], se tiene:

- Si $1 < x < 2$, $f(x)<0$.
- Si $x = 2$, $f(x)=0$.
- Si $2 < x < 3$, $f(x)>0$.



Todo lo dicho puede verse haciendo su gráfica, que es la adjunta.

El área pedida viene, S, dada por:

$$S=-\int_1^2\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+\left(\frac{1}{3}-1\right)+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)=2\ \text{u}^2.$$

21. Castilla–La Mancha, ordinaria 2020

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\[2mm] \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\[2mm] \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) [**1,5 puntos**] Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x}}{1+2x-cos(x^2)}$.

Solución:

a) La continuidad presenta dificultades en los puntos $x = 2$ y $x = 3$.

En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{0}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\cos(\pi x)=\cos 2\pi=1.$$

Como no existe límite, en $x = 2$ la función no es continua. La función presenta un salto infinito.

En $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\cos(\pi x)=\cos 3\pi=-1;$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Como coinciden los límites laterales, existe el límite. La función es continua en $x = 3$.

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos\left(x^2\right)}=\left[\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2+2x\sin\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}.$$

22. Castilla–La Mancha, ordinaria 2020

5. *a*) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) La integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} 3 = A \\ -2 = -A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases}.$$

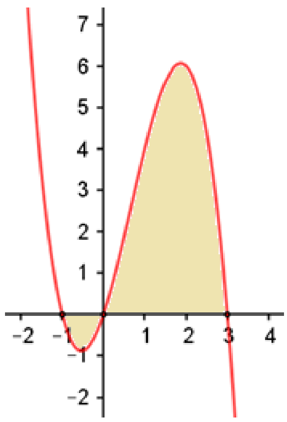
Por tanto:

$$\int \left(\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = 3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + k.$$

b) Cortes de $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ con el eje OX:

$$-x^3 + 2x^2 + 3x = -x\left(x^2 - 2x - 3\right) = -x(x+1)(x-3) \to \text{abscisas } x = -1,\ x = 0,\ x = 3.$$

En el intervalo (–1, 0) la función es negativa:
el signo de los respectivos factores es: (+)(+)(–) = (–).
En el intervalo (0, 3) la función es positiva:
el signo de los respectivos factores es: (–)(+)(–) = (+).
Su gráfica, aunque no se pide, es la adjunta.



Por tanto, su área viene dada por:

$$S = -\int_{-1}^{0}\left(-x^3 + 2x^2 + 3x\right)dx + \int_{0}^{3}\left(-x^3 + 2x^2 + 3x\right)dx =$$

$$= -\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

$$= +\left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2}\right) = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}\ \text{u}^2.$$

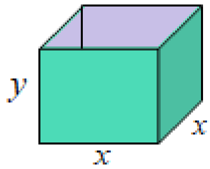
23. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2020

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Si el lado de la base del prisma es x y su altura y, el volumen de la caja viene dado por



$$V = x^2 y \to \text{si vale } 108 \text{ dm}^3 \Rightarrow x^2 y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}.$$

La superficie total de la caja es:

$$S = x^2 + 4xy \to \text{como } y = \frac{108}{x^2} \Rightarrow S = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} \Rightarrow S = x^2 + \frac{432}{x}.$$

El mínimo de S se da en la solución de $S' = 0$ que hace positiva a S''.

$$S' = 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 432 \Rightarrow 2x^3 = 432 \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Como $S'' = 2 + \frac{864}{x^3} \to S''(6) = 2 + \frac{864}{216} = 6 > 0$, entonces, para $x = 6$ dm se da el mínimo.

La altura valdrá $y = \frac{108}{6^2} = 3$ dm.

b) La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

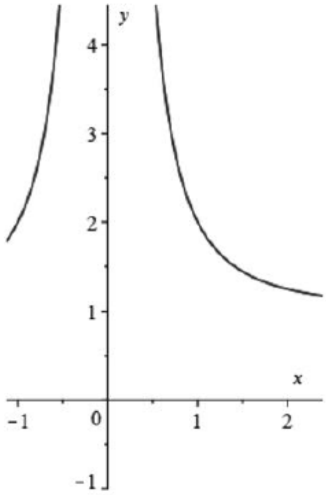
Como $f'(x) = 2x + 1$ se tiene: $f(1) = 1$ y $f'(1) = 3$.

La recta será:

$$y - 1 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x - 2.$$

24. Cataluña, ordinaria 2020

1. Trazamos la recta tangente a la función $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ por un punto $P=(a,f(a))$ del primer cuadrante. Esta recta junto con los ejes de coordenadas forman un triángulo.



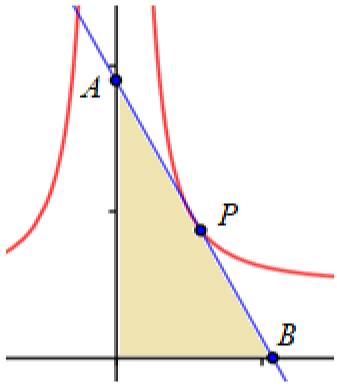
a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de a, viene dada por la función

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 puntos]

b) ¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule ese valor mínimo.
[1,25 puntos]

Solución:
a) La situación aproximada se muestra en la figura adjunta.



- La ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ en el punto de abscisa $x = a$ es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

Como $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$ se tiene: $f(a)=\frac{1}{a^2}+1$ y $f'(a)=\frac{-2}{a^3}$.

La recta tangente será: $y-\left(\frac{1}{a^2}+1\right)=-\frac{2}{a^3}(x-a)$.

- Esta recta corta a los ejes en los puntos A y B:

$A\to$ Si $x = 0$: $y-\left(\frac{1}{a^2}+1\right)=-\frac{2}{a^3}(0-a)\Rightarrow y=\frac{3}{a^2}+1$ $\to$ medida que se corresponde con la altura del triángulo.

$B\to$ Si $y = 0$: $0-\left(\frac{1}{a^2}+1\right)=-\frac{2}{a^3}(x-a)\Rightarrow\frac{2x}{a^3}=\frac{3}{a^2}+1\Rightarrow x=\frac{3a}{2}+\frac{a^3}{2}$ $\to$ medida de la base.

Por tanto, el área del triángulo será:

$$S=\frac{\left(\frac{3a}{2}+\frac{a^3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{a^2}+1\right)}{2}=\frac{\left(\frac{a\left(3+a^2\right)}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+a^2}{a^2}\right)}{2}=\frac{a\left(3+a^2\right)^2}{4a^2}=\frac{\left(3+a^2\right)^2}{4a}.$$

b) El área es mínima en la solución de $S'= 0$ que hace positiva a S''.
Derivando en función de a:

$$S'=\frac{2\left(3+a^2\right)\cdot 2a\cdot 4a-\left(3+a^2\right)^2\cdot 4}{(4a)^2}=\frac{3a^4+6a^2-9}{4a^2}\to S'=0\Rightarrow 3a^4+6a^2-9=0\Rightarrow a=1.$$

En vez de hacer S'' puede estudiarse el crecimiento de S, observando que: a la izquierda de a = 1, se tiene que $S'<0$ $\Rightarrow$ la función área decrece; a la derecha de a = 1, se tiene que $S'>0$ $\Rightarrow$ la función área crece. Por tanto, en a = 1 se da el mínimo buscado.

El área del triángulo será: $S(1)=\dfrac{(3+1)^2}{4}=4$ u^2.

25. Cataluña, ordinaria 2020

4. Considere la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, donde a y b son dos parámetros reales. Calcule los valores de a y b de manera que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x=2$.

[2,5 puntos]

Solución:

Si $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$ $\Rightarrow$ $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ $\to$ la asíntota oblicua es la recta $y=ax$, que tiene pendiente 1 cuando a = 1.

Luego $f(x)=\dfrac{x^2+b}{x}$

Derivando:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+b\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-b}{x^2}.$$

Si en x = 2 se tiene un mínimo, entonces $f'(2)=0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{4-b}{4}=0\Rightarrow b=4$.

Por tanto, la función será: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$

$\to$ Para asegurar que en x = 2 se tiene un mínimo hay que comprobar que $f''(2)>0$.
Derivando otra vez:

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{8}{x^3}$$ $\to$ efectivamente $f''(2)=1>0$.

26. Cataluña, extraordinaria 2020

1. Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = a \cdot x^2$, donde a es un número real positivo.

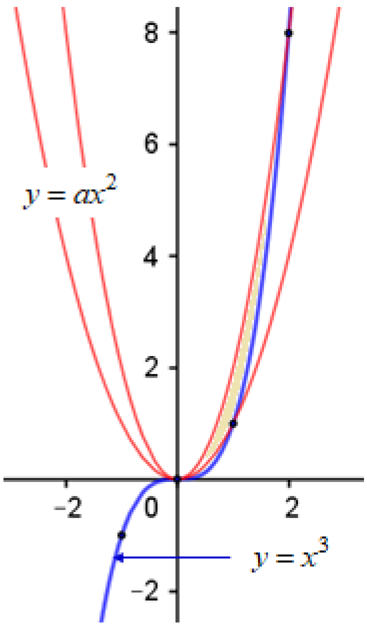
a) Encuentre, en función del parámetro a, los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas.
[1,25 puntos]

b) Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4}$ u^2.
[1,25 puntos]

Solución:

a) Las curvas se cortan cuando $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$x^3 = ax^2 \Rightarrow x^3 - ax^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}.$$



Sus gráficas pueden hacerse hallando algunos de sus puntos.

Para $y = f(x) = x^3$: (−1, −1); (0, 0); 81, 1) (2, 8).

Para $y = g(x) = ax^2$, de la que se sabe que es una parábola convexa (∪), con vértice en el punto (0, 0), se han trazado dos de ellas, para a = 1 y para a = 2.

La región limitada entre ambas curvas se ha sombreado.

b) El área comprendida entre ambas curvas viene dada por:

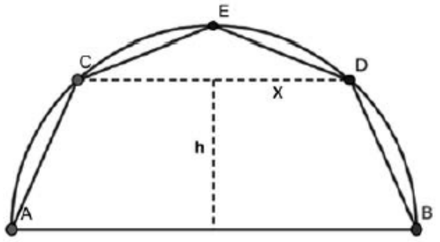
$$S = \int_0^a \left(ax^2 - x^3\right) dx = \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12}.$$

Como se desea que su valor sea $\frac{27}{4} \Rightarrow \frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a = 3$.

<u>27</u>. <u>Cataluña, extraordinaria 2020</u>

5. Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda *CD* paralela al diámetro *AB* e incorporando el punto *E* en el punto medio del arco *CD*. De esta manera queda trazado el pentágono *ACEDB*, tal y como se muestra en la figura.

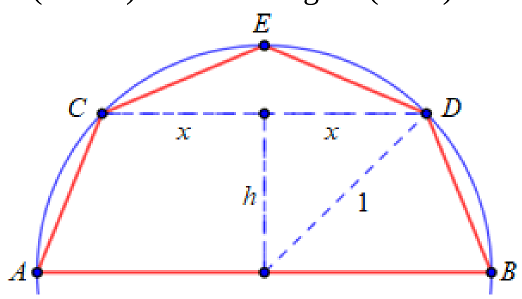


a) Exprese en función de *x* y *h* el área del pentágono *ACEDB*.
[1,25 puntos]

b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por *h*) a la que debe situarse la cuerda *CD* de *AB* para que el área del pentágono *ACEDB* sea máxima?
[1,25 puntos]

<u>Solución</u>:

a) El pentágono *ACEDB* se descompone en un trapecio (*ACDB*) más un triángulo (*CDE*).



Área del trapecio: $S_1 = \dfrac{(2+2x)\cdot h}{2} = h + xh$.

Área del triángulo: $S_2 = \dfrac{2x\cdot(1-h)}{2} = x - xh$.

Área del pentágono:

$$S = S_1 + S_2 = h + xh + x - xh = h + x.$$

Como $h^2 + x^2 = 1 \Rightarrow h = \sqrt{1-x^2}$.

Con esto:

$$S = \sqrt{1-x^2} + x$$

b) El área del pentágono es máxima en la solución de $S´ = 0$ que hace negativa a $S´´$.

Derivando en función de *x*:

$$S = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 1 = \frac{-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \to \text{ se anula cuando } -x+\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En vez de hacer $S´´$ (que resulta engorroso) puede estudiarse el crecimiento de *S*, observando que: a la izquierda de $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene que $S´ > 0 \Rightarrow$ la función área crece; a la derecha de $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene que $S´ < 0 \Rightarrow$ la función área decrece. Por tanto, para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se obtiene la máxima superficie.

En este caso, $h = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

28. Comunidad Valenciana, ordinaria 2020

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0, x=2, x=4$. (3 *puntos*)

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ no está definida cuando $x^2(x-1)=0 \to x=0;\ x=1$.

Por tanto, Dom (f) = **R** – {0, 1}.

En las abscisas x = 0 y x = 1 la función tiene asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty;\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación x = 0 y x = 1

También tiene una asíntota horizontal, tanto hacia –∞ como hacia +∞, pues:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=(L'H)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3x^2-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=(L'H)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{6x-2}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

La asíntota es la recta y = 0.

b) la integral $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$ puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-1)}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$ → como los denominadores son iguales, también deben serlo los numeradores. Luego:

$$x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=(A+C)x^2+(-A+B)x-B\Rightarrow\begin{cases}A+C=1\\-A+B=0\\-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-1\\C=2\end{cases}.$$

Por tanto:

$$F(x)=\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{(x-1)}\right)dx=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+k.$$

Si $F(x)$ pasa por el punto (2, 0), entonces $F(2)=0\Rightarrow$

$$-\ln 2+\frac{1}{2}+2\ln(2-1)+k\Rightarrow k=\ln 2-\frac{1}{2}\to F(x)=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+\ln 2-\frac{1}{2}.$$

c) En el intervalo [2, 4] la función $f(x)>0$. Por tanto, el área pedida, será:

$$S=\int_2^4\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=F(4)-F(2)=F(4)-0=-\ln 4+\frac{1}{4}+2\ln 3+\ln 2-\frac{1}{2}=\ln\frac{9}{2}-\frac{1}{4}\ \text{u}^2.$$

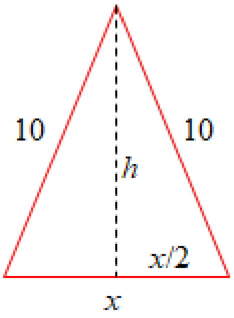
29. Comunidad Valenciana, ordinaria 2020

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*)
c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 *puntos*)

Solución:

a) $A(x) = \dfrac{x \cdot h}{2}$.



Como $10 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - x^2}$.

Por tanto:

$$A(x) = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4} = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{4}.$$

b) La función $A(x)$ crece cuando su derivada es positiva; decrcce en caso contrario.
Derivando:

$$A'(x) = \frac{800x - 4x^3}{4 \cdot 2\sqrt{400x^2 - x^4}} \to A'(x) = 0 \text{ si } 800x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x\left(200 - x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $0 < x < 10\sqrt{2}$, como $A'(x) > 0 \Rightarrow A(x)$ es creciente.
- Si $10\sqrt{2} < x < 20$, como $A'(x) < 0 \Rightarrow A(x)$ es decreciente.

c) De lo anterior se dededuce que para $x = 10\sqrt{2}$ el área es máxima.

Su valor máximo es: $A\left(10\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{400 \cdot 200 - 40000}}{4} = 50$ u^2.

30. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2020

Problema 3. Dada la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obtener razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 +1 *puntos*)

c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ está definida siempre que $\sqrt{x^2-1}>0 \Rightarrow x^2>1$, que se cumple cuando $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Este es su dominio.

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$ la función tiene asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación $x = -1$, que está a la derecha de la curva, y $x = 1$, que se sitúa a la izquierda.

También tiene dos asíntotas horizontales, una hacia $-\infty$, otra hacia $+\infty$, pues:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x}{(-x)}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{(-x)^2}}}=\left[\frac{-1}{1^-}\right]=-1^-;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\left[\frac{1}{1^-}\right]=1^+$$

Las asíntotas son las rectas $y = -1$, que va por encima de la curva, e $y = 1$, que va por debajo.

b) Derivando:

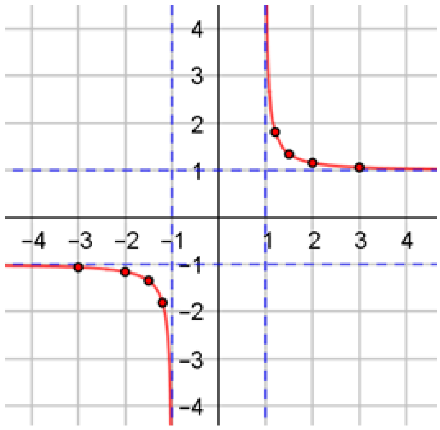
$$f´(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\Rightarrow f´(x)=\frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{3/2}}=\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{3/2}}.$$

La derivada es negativa en todo su dominio. Por tanto, siempre será decreciente.

Teniendo en cuenta las asíntotas, la posición de la curva respeto de ellas y calculando algunos de sus puntos, puede trazarse su gráfica. (Podría apuntarse también que es una función impar).

Algunos puntos:

(–1,2, –1,81); (–1,5, –1,34); (–2, –1,15); (–3, –1,06);
(1,2, 1,81); (1,5, 1,34); (2, 1,15); (3, 1,06) …



c) La integral $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ es inmediata:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1}+k\,.$$

Por tanto,

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left.\sqrt{x^2-1}\right|_2^3 = \sqrt{8}-\sqrt{3}\,.$$

31. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2020

Problema 6. Los vértices de un triángulo son $A(0,12)$, $B(-5,0)$ y $C(5,0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x,0)$, $(x,0)$, siendo $0 \le x \le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

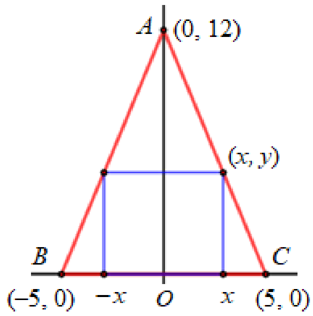
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)
b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)
c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)

Solución:

a) La base del rectágulo es $2x$, su altura y. Su área será

$$f(x)=2xy\,.$$



El punto $(-x, y)$ está en la recta que contiene a los puntos A y C. Su ecuación es: $y=-\frac{12}{5}x+12$.

(Su pendiente es $m=\frac{|OA|}{|OC|}=-\frac{12}{5}$; y su ordenada, $n = 12$).

Por tanto, $f(x)=2x\cdot\left(-\frac{12}{5}x+12\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{24}{5}x^2+24x\,.$

b) El área máxima se da en la solución de $f'(x)=0$ que hace negativa a $f''(x)$.

Derivando:

$$f'(x)=-\frac{48}{5}x+24=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Como $f''(x)=-\frac{48}{5}<0$, luego para ese valor de x se da el máximo buscado.

Para $x=\frac{5}{2} \to y=-\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{2}+12=6\,.$

Las dimensiones del rectángulo serán $5 \times 6 \to$ su área 30 u^2.

c) El área del triángulo es: $S_T=\frac{10\cdot 12}{2}=60$; la del rectángulo $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{24}{5}\cdot\frac{25}{4}+24\cdot\frac{5}{2}=30\,.$

La proporción es 1 a 2.

<u>**32**. Extremadura, ordinaria 2020</u>

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x\,(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Derivando dos veces se tiene:

$$f(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right) \Rightarrow f'(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right) + e^x\left(2x - 1\right) = e^x\left(x^2 + x\right);$$

$$f''(x) = e^x\left(x^2 + x\right) + e^x\left(2x + 1\right) = e^x\left(x^2 + 3x + 1\right).$$

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x\left(x^2 + x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Por tanto:

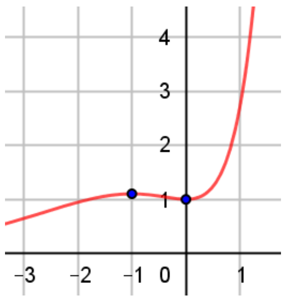
- Si $x < -1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1 < x < 0$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 0$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Como $f''(-1) = -e^{-1} < 0$, entonces, en $x = -1$ se tiene un máximo relativo.

Como $f''(0) = e^0 = 1 > 0$, entonces, en $x = 0$ se tiene un mínimo relativo.

$\rightarrow$ En este caso, los máximos y mínimos pueden deducirse sin necesidad de hacer la derivada segunda.

Aunque no se pide, adjunto su gráfica.



b) Para justificar que existe un valor de x tal que $f(x) = 2$ basta con observar:

1) La función $f(x) = e^x\left(x^2 - x + 1\right)$ es continua en todo **R**;

2) En el intervalo [0, 1] se cumple: $f(0) = 1 < 2$ y $f(1) = e > 2$;

3) Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, se deduce que la función toma el valor 2 en algún punto comprendido entre 0 y 1.

<u>Teorema de los valores intermedios</u>. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor c, $f(a) \le c \le f(b)$, existe un punto $\alpha \in [a, b]$, tal que $f(\alpha) = c$.

33. Extremadura, ordinaria 2020

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

Solución:

a) Como se trata de una parábola y de una recta, su representación gráfica puede hacerse buscando alguno de sus puntos.

Punto de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 1$:

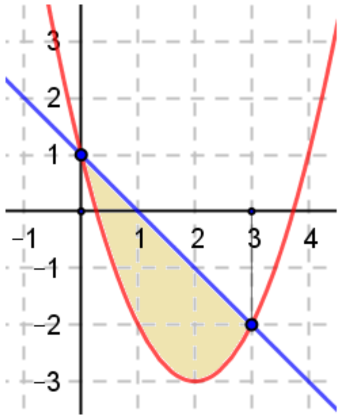
(−1, 6); (0, 1); (1, −2); (2, −3); …

Punto de la recta $g(x) = -x + 1$:

(0, 1); (2, −1)

Sus gráficas se cortan en las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$



La región delimitada por ambas curvas es la sombreada en la figura adjunta.

b) Su área viene dada por la integral definida:

$$\int_0^3 \left(-x + 1 - \left(x^2 - 4x + 1\right)\right) dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \text{ u}^2.$$

34. Extremadura, ordinaria 2020

8. Resuelva la integral (2 puntos)

$$\int \frac{-x + 7}{x^2 + x - 2} dx.$$

Solución:

La integral puede hacerse mediante el método de descomposición en fracciones simples.

Como $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, entonces:

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2+x-2} \to$$

Identificando coeficientes: $\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A - B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = 2; B = -3$.

Por tanto:

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}\right) dx = 2\ln(x-1) - 3\ln(x+2) + k.$$

35. Islas Canarias, ordinaria 2020, grupo A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

   a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$. 1.25 ptos

   b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)\,dx$ 1.25 ptos

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ está definida siempre que $x>0$ (la restricción del neperiano incluye a $x^2=0$).

Derivando:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

La derivada se anula cuando $1-2\ln x=0\Rightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=e^{1/2}\to x=\sqrt{e}$.

Por tanto:

- Si $0<x<\sqrt{e}$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x>\sqrt{e}$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Como la función crece a la izquierda de $x=\sqrt{e}$ y decrece a su derecha, se deduce que ese punto se tiene un máximo relativo.

El punto máximo será: $\left(\sqrt{e}, f\left(\sqrt{e}\right)\right)=\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2e}\right)$.

b) Una primitiva de $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ puede obtenerse por el método de integración por partes.

Tomando:

$$u=\ln x \text{ y } dv=\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \text{ y } v=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}.$$

Por tanto:

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left(-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}.$$

Con esto:

$$F(x)=\int_1^e f(x)dx=\left(-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e=-\frac{1}{e}\ln e-\frac{1}{e}-\left(-\frac{1}{1}\ln 1-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{2}{e}.$$

36. Islas Canarias, ordinaria 2020, grupo B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

   a. Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 ptos
      - Se corten en el punto $P(1,1)$
      - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

      Dar las expresiones de las funciones resultantes.

   b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función: 1 pto

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$

Solución:

a) Si se cortan en el punto (1, 1): $f(1) = g(1) = 1$.

Como:

$$f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \Rightarrow 2 + a + b = 1 \ ; \ \ g(x) = -2x^3 + c \Rightarrow -2 + c = 1 \to c = 3.$$

Si en el punto (1, 1) coinciden las pendientes de las rectas tangentes: $f'(1) = g'(1)$.

Como:

$$f'(x) = 8x^3 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 8 + 2a \ ; \ \ g'(x) = -6x \Rightarrow g'(1) = -6 \ \to$$

$$8 + 2a = -6 \Rightarrow a = -7 \to b = 6.$$

Con esto, las funciones son: $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ y $g(x) = -2x^3 + 3$.

b) Para $a = b = 1$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1} = \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$.

- Esta función puede tener asíntotas verticales en los ceros del denominador: $x^3 - 1 = 0$.

  $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Rightarrow x = 1.$

Como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador.

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x\left(x^3 - 1\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = 2.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(h(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}\right) = 0.$$

La asíntota oblicua es la recta $y = 2x$.

37. Islas Canarias, extraordinaria 2020, grupo B

1. Halle los valores de *a* y *b* para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$

   Escriba las funciones que se obtienen. 2.5 ptos

Solución:

La ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$.

En este caso:

$$f(x) = \frac{bx-1}{bx+1} \Rightarrow f(0) = -1.$$

$$f'(x) = \frac{b(bx+1)-(bx-1)\cdot b}{(bx+1)^2} = \frac{2b}{(bx+1)^2} \Rightarrow f'(0) = 2b.$$

Por tanto, la recta tangente es: $y+1 = 2b\cdot x \Rightarrow y = 2bx-1$.

Como debe ser $y = 6x+a \Rightarrow 6x+a = 2bx-1 \Rightarrow b=3;\ a=-1$.

En definitiva: la función es $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$; la tangente, $y = 6x-1$.

38. Galicia, ordinaria 2020

3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Solución:

a) Es una forma indeterminada. Se resuelve aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}} = \left[\frac{1-1}{1+0-1} = \frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x\cdot\sin x}{2-2e^{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x\cdot\sin x + 2\cos x\cdot\cos x}{-4e^{2x}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

b) La función $f(x) = x(\ln x - 1)$ está definida cuando $x > 0$.

Derivando:

$$f(x) = x(\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = (\ln x - 1) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Igualando a 0: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Con esto:

- Si $0 < x < 1$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un mínimo; punto $(1, -1)$.

→ Que en $x = 1$ se tiene un mínimo también se deduce a partir de la derivada segunda, $f''(x) = \frac{1}{x}$, ya que $f''(1) = 1 > 0$.

39. Galicia, ordinaria 2020

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$.

Los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}\right)=e^0=1;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+bx+c\right)=c.$$

Por tanto, $c = 1$.

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x<0 \\ 2x+b & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2e^{2x}\right)=2e^0=2;\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x+b\right)=b \Rightarrow b=2.$$

Luego, la función $f(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x\le 0 \\ x^2+2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es derivable en todo **R**.

b) Una primitiva de $\int x(\ln x-1)dx=\int (x\ln x)dx-\int xdx$ puede hacerse por el método de integración por partes.

$\to \int x\ln x\, dx \to$ Tomando:

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx;\quad dv=xdx \Rightarrow x=\frac{x^2}{2}.$$

Luego:

$$\int x\ln x\, dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

Por tanto:

$$\int x(\ln x-1)dx=\int (x\ln x)dx-\int xdx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{3x^2}{4}.$$

Con esto:

$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{3x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-3-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln 1-\frac{3}{4}\right)=2\ln 2-\frac{9}{4}.$$

40. Galicia, extraordinaria 2020

4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & \text{si} \quad x<0,\\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x\geq 0.\end{cases}$

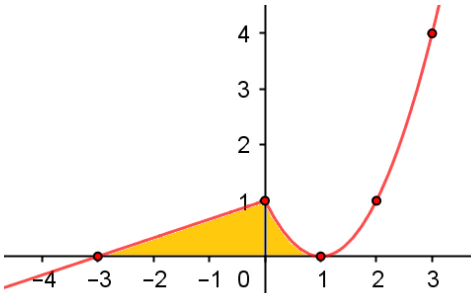
b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución:

a) La función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & \text{si } x<0\\ (x-1)^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ se puede representar gráficamente determinando algunos de sus puntos:

Recta: (–3, 0); (0⁻, 1);

Parábola: (0, 1); (1, 0); (2, 1); (3, 4).



El área encerrada por el eje X y la gráfica de f es la sombreada en la figura adjunta. Su valor viene dado por la suma de dos integrales definidas.

$$S=\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx=\left[\frac{x^2}{6}+x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\left[\frac{9}{6}-3\right]+\left[0-\frac{(-1)^3}{3}\right]=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\ \text{u}^2.$$

b) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Puede hacerse el cambio de variable $t^2=x^2-1$. Se tendrá:

$$2tdt=2xdx\to xdx=tdt\,;\ \sqrt{x^2-1}=t\,.$$

Luego,

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\sqrt{x^2-1}\,(xdx)=\int t\cdot tdt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+k\,.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3}+k\,.$$

41. La Rioja, ordinaria 2020

1.– (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}x\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$.

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}.$$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\left[1^{\infty}\right]$ → Puede resolverse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)}{\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$ → ahora puede aplicarse L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)}{\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(LH)\to$$

Se hace aparte la derivada del numerador:

$$N(x)=\ln\left(\frac{1-\sin x\cos}{1+\sin x\cos x}\right)=\ln\left(1-\sin x\cos x\right)-\ln\left(1+\sin x\cos x\right)$$ → derivando:

$$N'(x)=\frac{-\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{1-\sin x\cos x}-\frac{\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)}{1+\sin x\cos x}\to$$

$$N'(x)=\frac{-\cos^2 x+\sin^2 x}{1-\sin x\cos x}-\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}=\frac{\left(-\cos^2 x+\sin^2 x\right)\cdot 2}{(1-\sin x\cos x)\cdot(1+\sin x\cos x)}.$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)}{\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(LH)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(-\cos^2 x+\sin^2 x\right)\cdot 2}{(1-\sin x\cos x)\cdot(1+\sin x\cos x)}}{\cos x}=\frac{\frac{-2}{1}}{1}=-2.$$

Luego, el límite pedido, $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{-2}$.

Nota: Si se aplica la transformación, $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}-1\right)}$, se obtiene una solución mucho más rápida.

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{-2\sin x\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\cos x}{1+\sin x\cos x}\right)} = e^{-2}.$$

b) Si $\lim_{x\to 4}\dfrac{\tan\left(\left(\dfrac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax} = \dfrac{1}{32}$, entonces, sustituyendo en la expresión:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\tan\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax} \to \frac{\tan\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{4}-2\right)}{16-16+4a} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+2-2\right)}{4a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{32} \Rightarrow a = 8.$$

42. La Rioja, ordinaria 2020

2.– (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$, sean tangentes en el punto de abcisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

Solución:

Si las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$ son tangentes en el punto de abscisa $x = -1$, entonces:

1) $f(-1) = g(-1) \Rightarrow a + b = a \Rightarrow b = 0$.

2) $f'(-1) = g'(-1) \to f'(x) = 2ax;\ g'(x) = 2x + 1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

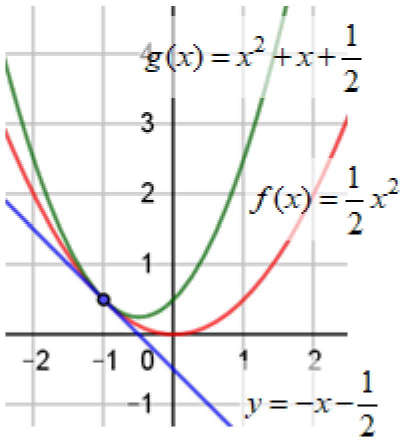
Las rectas tangentes deben coincidir.
En efecto:

Tangente a $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ en $x = -1$:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \quad y - \frac{1}{2} = -1(x+1) \Rightarrow y = -x - \frac{1}{2}.$$

Tangente a $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ en $x = -1$:

$$y - g(-1) = g'(-1)(x+1) \quad y - \frac{1}{2} = -1(x+1) \Rightarrow y = -x - \frac{1}{2}.$$



La situación gráfica es la adjunta.

43. Madrid, ordinaria 2020

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$.

Solución:

a) Si a la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ se le aplica el teorema de Bolzano, que dice: "Si $h(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($h(a) < 0 < h(b)$ o $h(a) > 0 > h(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$".

En este caso, como:

$h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 = -3 < 0$ y $h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 1 = 1239 > 0 \Rightarrow$
existe algún punto $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$".

Esto es, existe un punto $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

Nota: Esta propiedad se cumple en un intervalo más pequeño, en $[1, 2]$; pues $h(2) = 7 > 0$.

b) La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ viene dada por el valor de la derivada en ese punto.

La función derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

Esta función toma su valor mínimo cuando su derivada (que es la derivada segunda) vale 0.

Como $f''(x) = 6x + 6 = 0$ en $x = -1$, y $f'''(x) = 6 > 0$, en $x = -1$ se tiene la pendiente mínima buscada.

En ese punto, en $x = -1$, la ecuación de la recta tangente es $y - f(-1) = f'(-1)\left(x - (-1)\right)$.

Sustituyendo queda:

$y - 1 = (-3)\left(x + 1\right) \Rightarrow y = -3x - 2$.

Nota: La pendiente a una curva, $y = f(x)$, es mínima (o máxima) en sus puntos de inflexión, que se dan en soluciones de $f''(x) = 0$.

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot (\ln x)\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{18} + \frac{4}{4} - \frac{1}{6} \cdot (\ln 2)\right) - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot (\ln 1)\right) = \frac{7}{18} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot (\ln 2) = \frac{41}{36} - \frac{1}{6} \cdot (\ln 2).$$

44. Madrid, ordinaria 2020

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4,4]$.
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$.
c) (1 punto) Determine si la función $g(x)=f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x=1$.

Solución:
a) El único punto que presenta dudas es $x = 1$. Hay que comprobar que los límites laterales coinciden.
En efecto,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=0\,;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^3=0$$

Por tanto, la función es continua en el intervalo [–4, 4].

b) Derivando,

$$f'(x)=\begin{cases}2(x-1) & \text{si } x<1\\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

También coinciden las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=0$ y $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=0$. Por tanto, la función es derivable en (–4, 4).

- Para $x < 1$, $f'(x)=2(x-1)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo [–4, 1).
- Para $x > 1$, $f'(x)=3(x-1)^2>0 \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo (1, 4].
- En el punto $x = 1$ se tendrá un mínimo.

c) $g(x)=f'(x)=\begin{cases}2(x-1) & \text{si } x\le 1\\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<1\\ 6(x-1) & \text{si } x>1\end{cases}.$

La función $g(x)$ es continua en [–4, 4], pues lo es en $x = 1$: se ha visto que,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(g(x)=f'(x)\right)=0 \text{ y } \lim_{x\to 1^+}\left(g(x)=f'(x)\right)=0.$$

En cambio, no es derivable en $x = 1$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x)=\lim_{x\to 1^-}2=2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} g'(x)=\lim_{x\to 1^+}6(x-1)=0.$$

45. Madrid, extraordinaria 20

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1, x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f\circ f)(0)$.

b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

a) En el punto $x = 0$, la función es $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$.

La función compuesta $f\left(f(x)\right)=\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{x+2}$.

Luego:

$$f(0)=1;\ \ f\left(f(0)\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Continuidad en $x = 1$. Hay que comprobar que los límites laterales coinciden. En efecto,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2};\ \ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

Derivando, por separado:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2};\ \ f(x)=\frac{x^2+1}{4x}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^2}$$

Esto es: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x<1,\ x\neq -1\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$.

Las derivadas laterales en $x = 1$ valen:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{4}\ \text{ y }\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^2}\right)=0.$$

Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

Aunque no sea derivable en $x = 1$, se cumple:

- Para $x < 1$, $f´(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0 \to$ la función es decreciente.
- Para $x > 1$, $f´(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4x^2} > 0 \to$ la función es creciente.
- Por tanto, en $x = 1$ la función (que es continua en ese punto) tiene un mínimo.

c) Para $x < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ tiene dos asíntotas: una vertical, en $x = -1$; otra horizontal, la recta $y = 0$, hacia $-\infty$.

En efecto: $\lim_{x\to -1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \infty$; $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

Para $x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x}$ tiene una asíntota oblicua, la recta $y = \dfrac{x}{4}$.

Se deduce de que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4x}$. Esto significa que, cuando $x \to +\infty$, la curva $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x} \to y = \dfrac{x}{4}$, pues el término $\dfrac{1}{4x} \to 0$.

<u>**46**. Madrid, extraordinaria 2020</u>

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25\,t\,e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

<u>Solución</u>:

a) Tiende al límite, $\lim_{t\to +\infty} \left(25te^{-t^2/4}\right)$.

$$\lim_{t\to +\infty} \left(25te^{-t^2/4}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{t\to +\infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \text{Este límite se hace por L´Hôpital} \to$$

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{t\to +\infty} \frac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = \left[\frac{25}{\infty}\right] = 0.$$

b) El máximo de $P(t) = 25te^{-t^2/4}$ se da en la solución de $P´(t) = 0$ que hace negativa a $P´´(t)$.
Derivando e igualando a 0:

$$P´(t) = 25e^{-t^2/4} + 25t\cdot\left(-\frac{2t}{4}\right)e^{-t^2/4} = 25\left(1-\frac{t^2}{2}\right)e^{-t^2/4} = 25\left(\frac{2-t^2}{2}\right)e^{-t^2/4} \to$$

$$P´(t) = 0 \Rightarrow 2 - t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}.$$

La derivada segunda vale,

$$P´´(t)=25(-t)e^{-t^2/4}+25\left(\frac{2-t^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2t}{4}\right)e^{-t^2/4}=25\left(\frac{-6t+t^3}{4}\right)e^{-t^2/4}.$$

Como $P´´\left(\sqrt{2}\right)=25\left(\frac{-2\sqrt{2}}{4}\right)e^{-1/2}<0$, cuando $t=\sqrt{2}$ se genera la máxima potencia; su valor es $P\left(\sqrt{2}\right)=25\sqrt{2}e^{-1/2}\approx 21,44$.

c) Si $E´(t)=P(t)\Rightarrow E(t)=\int P(t)dt$.

$E(t)=\int 25te^{-t^2/4}dt$ $\to$ es inmediata, si se escribe:

$$E(t)=\int 25te^{-t^2/4}dt=25\cdot\left(-\frac{4}{2}\right)\int\left(-\frac{2t}{4}\right)e^{-t^2/4}dt=-50e^{-t^2/4}+k$$

Como $E(0)=0\Rightarrow -50e^0+k=0\Rightarrow k=50$.

Por tanto, $E(t)=-50e^{-t^2/4}+50$.

Luego, la energía producida por la pila entre los instantes t = 0 y t = 2 será:

$$\int_0^2\left(25te^{-t^2/4}\right)dt=\left[-50e^{-t^2/4}+50\right]_0^2=-50e^{-1}+50-\left(-50e^0+50\right)=50-\frac{50}{e}.$$

<u>47. Murcia, ordinaria 2020</u>

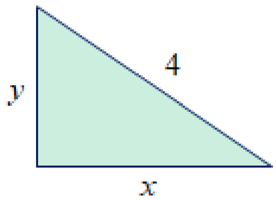
3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

<u>Solución</u>:

a) Sea el triángulo rectángulo de catetos x e y e hipotenusa 4. (Naturalmente ambos catetos tienen longitudes entre 0 y 4 m).

Se cumple (Pitágoras) que:

$x^2+y^2=16\Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$, siendo



El área el triángulo viene dada por la expresión:

$$S(x)=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\cdot\sqrt{16-x^2}}{2}\Rightarrow S(x)=\frac{\sqrt{16x^2-x^4}}{2}.$$

La función S será mínima en la solución de $S´=0$ que haga positiva a $S´´$.

Derivando e igualando a 0:

$$S´(x)=\frac{32x-4x^3}{\sqrt{16x^2-x^4}}\to \text{se hace 0 cuando } 32x-4x^3=0\Rightarrow 4x\left(8-x^2\right)=0\Rightarrow x=0;\ x=\sqrt{8}.$$

(La solución x = 0 no determina un triángulo; se descarta).

En vez de hacer la derivada segunda (que resulta demasiado engorroso) puede estudiarse el crecimiento y de decrecimiento de S a la izquierda y derecha de $x=\sqrt{8}$.

- Si $0<x<\sqrt{8}$, como $S´(x)>0\Rightarrow S$ es creciente.
- Si $\sqrt{8}<x<4$, como $S´(x)>0\Rightarrow S$ es decreciente.
- Por tanto, para $x=\sqrt{8}$ m se obtiene el área máxima. Para ese valor de $x\Rightarrow y=\sqrt{8}$.

El valor del área máxima será: $S(x)=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{2}=4$ m^2.

48. Murcia, ordinaria 2020

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x=1$.

Solución:

a) Haciendo el cambio de variable $\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \Rightarrow dx=2\sqrt{x}dt=2tdt$.

Con esto:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{t}{1+t}\cdot 2tdt=\int \frac{2t^2}{1+t}dt \quad \to \text{dividiendo: } \frac{2t^2}{1+t}=2t-2+\frac{2}{1+t}.$$

Luego,

$$\int \frac{2t^2}{1+t}dt=\int\left(2t-2+\frac{2}{1+t}\right)dt=t^2-2t+2\ln(1+t)+k.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=x-2\sqrt{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+k.$$

b) La función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ corta al eje OX en x = 0, y nunca toma valores negativos. Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\left[x-2\sqrt{x}+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]_0^1=1-2+2\ln 2=-1+2\ln 2\approx 0,39.$$

49. Murcia, extraordinaria 2020

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$.

b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$.

Solución:

Ambos límites son indeterminados.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \to$ aplicando L´Hôpital $\to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3+x}+\dfrac{1}{3-x}}{2} = \dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = [\infty-\infty] \to$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada

$$\to \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-(x+2)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} = \left[-\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

50. Murcia, extraordinaria 2020

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Solución:

a) Esta integral puede hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx$; y $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego,

$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx \;=\; x\ln\left(1+x^2\right) - \int\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx.$$

La expresión $\dfrac{2x^2}{1+x^2} = \dfrac{2+2x^2-2}{1+x^2} = 2-\dfrac{2}{1+x^2}$ (También puede hacerse la división).

Por tanto:

$$\int \ln(1+x^2)dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + k.$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan x\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\ln 2 - 4 + \pi}{2}$.

51. Navarra, ordinaria 2020

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

Solución:

6) $\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} = \left[(2-1)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\right] \to$ Puede resolverse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}\ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)}{x^2-x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$ $\to$ ahora puede aplicarse L´Hôpital $\to$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{2+\sin\frac{3\pi x}{2}}}{2x-1}\right) = \left[\frac{\frac{0}{1}}{1}\right] = 0\,.$$

Por tanto, el límite pedido vale $\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} = e^0 = 1$.

Nota: también puede aplicarse la transformación

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} = \left[(2-1)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\right] = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}} = e^0 = 1 \to$$

Puede verse que $\lim_{x\to 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{2x-1} = \frac{0}{1} = 0$.

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) = [\infty-\infty] \to$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada $\to$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)}{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^4-x^2+1\right)-\left(x^4-7\right)}{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+6}{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)}$$ → ahora puede dividirse

el numerador y el denominador por x^2 → $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^2+6}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^4-7}{x^4}}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

<u>**52**. Navarra, ordinaria 2020</u>

P4) Sea la función $f(x) = \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,2]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1,2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.75 puntos)

<u>Solución</u>:

a) La función, potencial–exponencial, $f(x) = \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$ está definida para todo $x \in [1, 2]$, pues la base nunca es negativa: varía entre 1 y 2.

→ Podría plantearse alguna duda en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, siendo:

$$f(1) = \left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^1 = 2^1 = 2;\ \ f(2) = \left(1+\sin\pi\right)^2 = 1^2 = 1$$ → dudas resueltas.

En esos puntos:

- por la derecha de $x = 1$, cuando $x \to 1^+$, $\lim_{x\to1^+}\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x = \left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^1 = 2^1 = 2$.
- por la izquierda $x = 2$, cuando $x \to 2^-$, $\lim_{x\to2^-}\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x = \left(1+\sin\pi\right)^2 = 1^2 = 1$.

Por tanto, la función es continua en todo el intervalo [1, 2].

b) También es derivable en el intervalo (1, 2), pues la función derivada siempre está definida. La derivada se hace como sigue:

$$f(x) = \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x = x\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right) + x\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow f'(x) = \left(\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{x\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\right)\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x.$$

Por tanto, la función dada, $f(x) = \left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$, cumple las hipótesis del teorema de Cauchy: es continua en el intervalo [1, 2] y derivable en (1, 2).

Como cumple el <u>teorema del valor medio</u> en el intervalo [1, 2], entonces:

- existe un punto $\alpha_1 \in (1,\ 2)$ tal que

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\alpha_1) \rightarrow \frac{0-2}{2-1} = f'(\alpha_1) \Rightarrow f'(\alpha_1) = -2 < 0$$

- existe un punto $\alpha_2 \in \left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ tal que

$$\frac{f(3/2)-f(1)}{\frac{3}{2}-1} = f'(\alpha_2) \rightarrow \frac{2,23-1}{0,5} = f'(\alpha_2) \Rightarrow f'(\alpha_2) \approx 0,62 > 0 .$$

Por tanto, existen dos puntos α_1 y α_2 del intervalo (1, 2), en los que la función continua $f'(x)$ toma distinto signo: $f'(\alpha_1) < 0$; $f'(\alpha_2) > 0$. Luego, por el <u>teorema de Bolzano</u> aplicado a $f'(x)$, existirá un punto α, comprendido entre ellos, tal que $f'(\alpha) = 0$.

→ El <u>teorema del valor medio</u> (incrementos finitos; de Lagrange) dice:
Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$.

→ El <u>teorema de Bolzano</u> dice:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

<u>Observación</u>: Como la función derivada es continua en el intervalo [1, 2], aplicando el teorema de Bolzano a $f'(x)$, pues $f'(1) = (\ln(2)+0)\cdot(2)^1 = 2\ln 2 > 0$ y $f'(2) = (\ln(1)-2)\cdot 1^2 = -2 < 0$ ⇒ existirá un punto $\alpha \in (1, 2)$, tal que $f'(\alpha) = 0$.

<u>**53**. Navarra, ordinaria 2020</u>

P7) Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) La función, potencial–exponencial–logarítmica, $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln\left(x^2 - x + 2\right)$ está definida para todo $x \in [-1, 0]$, pues:

- la base $(x+3)$ es positiva:
- el exponente $\sin(\pi x)$ está definido;
- y, como $x^2 - x + 2 > 0$ siempre, $\ln\left(x^2 - x + 2\right)$ también está definido en [–1, 0].

Por tanto, es continua en el intervalo [–1, 0].

b) También es derivable en el intervalo (–1, 0), pues la función derivada siempre está definida: la función derivada no estaría definida si $x^2 - x + 2 \le 0$, pero se ha descartado anteriormente.

Por tanto, la función dada cumple las hipótesis del teorema de los valores intermedios (Lagrange): es continua en el intervalo [1, 2] y derivable en (1, 2), luego existe un punto $\alpha \in (-1,\ 0)$ tal que

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1-0} = f'(\alpha).$$

Como

$$f(-1) = (-1+3)^{\sin(-\pi)} \ln\left((-1)^2 - (-1) + 2\right) = 2^0 \ln 4 = \ln 4 \text{ y}$$

$$f(0) = (0+3)^{\sin(0)} \ln(2) = 3^0 \ln 2 = \ln 2,$$

entonces:

$$\frac{\ln 4 - \ln 2}{-1-0} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\ln \frac{4}{2}}{-1} = f'(\alpha) \Rightarrow -\ln 2 = f'(\alpha).$$

54. Navarra, ordinaria 2020

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ y } g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Solución:

Las gráficas se cortan en las soluciones de $f(x) = g(x) \to \sin(\pi x) = |x^2 - x|$.

La función $f(x) = \sin(\pi x)$ es periódica de periodo 2 y toma valores no negativos entre 0 y 1, pero nunca mayores que 1.

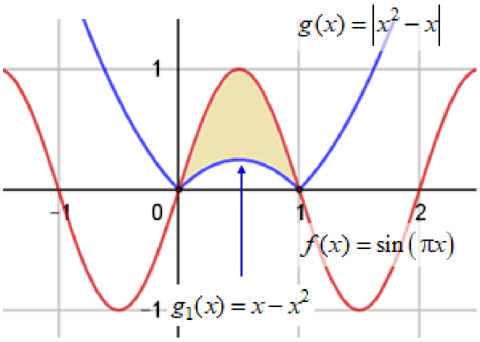
La función $g(x) = |x^2 - x|$ nunca toma valores negativos y toma valores mayores que 1 a partir de $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Por tanto, las soluciones de $\sin(\pi x) = |x^2 - x|$ hay que buscarlas en el intervalo $0 \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esas soluciones, que se obtienen probando, son $x = 0$ y $x = 1$.

Sus gráficas pueden trazarse con cierta facilidad:

$f(x) = \sin(\pi x)$ es una contracción de la función $y = \sin x$, la primera de periodo 2, la segunda de periodo 2π; $g(x) = |x^2 - x|$ se traza dando algunos valores.



La región comprendida entre ellas se ha sombreado.

Su área viene dada por la integral definida:

$$\int_0^1 \left(\sin(\pi x) - (x - x^2)\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot(-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] - \left[-\frac{1}{\pi}\cdot 1\right] = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}.$$

55. País Vasco, ordinaria 2020

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0, 2)$ y tenga un extremo en $(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos ?

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f´(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f´´(x) = 6ax + 2b.$$

Por pasar por (0, 2), $f(0) = 2$ $\Rightarrow$ $2 = c$.
Por pasar por (1, –1), $f(1) = -1$ $\Rightarrow$ $-1 = a + b + c$.
Por extremo en (1, –1), $f´(1) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 3a + 2b$.
Resolviendo el sistema (por Gauss):

$$\begin{cases} 2 = c \\ -1 = a + b + c \\ 0 = 3a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = c \\ -1 = a + b + 2 \\ 0 = 3a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - 3E2 \end{matrix} \begin{cases} 2 = c \\ -1 = a + b + 2 \\ 3 = -b - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 6 \\ b = -9 \end{cases}.$$

Por tanto, la función es $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$.

Como $f´(x) = 18x^2 - 18x = 18x(x-1) = 0$ si $x = 0$ o $x = 1$, en ambos puntos pueden darse extremos.
Aplicando el criterio de la derivada segunda, $f´´(x) = 36x - 18$,

- como $f´´(0) = -18 < 0 \Rightarrow$ en x = 0 se tiene un máximo relativo, punto (0, 2);
- como $f´´(1) = 18 > 0 \Rightarrow$ en x = 1 se tiene un mínimo relativo, punto (1, –1).

56. País Vasco, extraordinaria 2020

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

Solución:

Derivando e igualando a 0 se tiene:

$$f(x) = x^2e^{2x} \Rightarrow f´(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}\left(x + x^2\right) \Rightarrow 2e^{2x}\left(x + x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

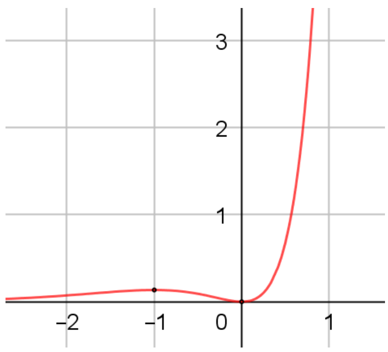
Por tanto:

- si $x < -1$, como $f´(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente;
- si $-1 < x < 0$, como $f´(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;
- si $x > 0$, como $f´(x) > 0 \Rightarrow$ la función vuelve a ser creciente.

Luego:

- En $x = -1$ se tiene un máximo (la función crece a su izquierda y decrece a su derecha). Punto $(-1, e^{-2})$.
- En $x = -1$ se tiene un mínimo (la función decrece a su izquierda y crece a su derecha). Punto (0, 0).

Su gráfica (que no se pide) es la adjunta.



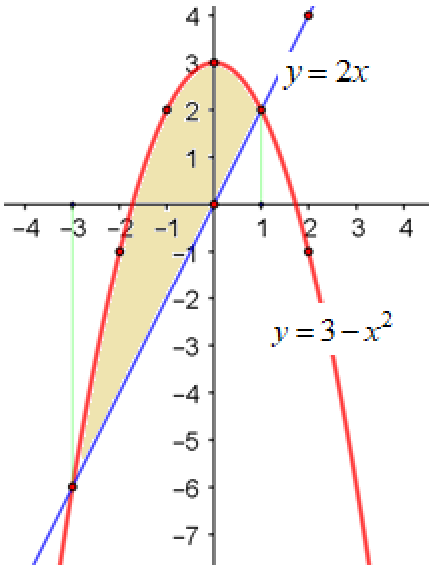
57. País Vasco, extraordinaria 2020

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

Solución:

Las curvas dadas son una parábola y una recta; pueden dibujarse calculando algunos de sus puntos.



Parábola, $y = 3 - x^2$:

(−2, −1); (−1, 2); (0, 3); (1, 2); (2, −1).

Recta, $y = 2x$:

(0, 0); (2, 4).

Las gráficas se cortan en las soluciones de la ecuación

$$3 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases} \to \text{puntos } (-3, -6) \text{ y } (1, 2).$$

El área de la región sombreada viene dada por la integral definida:

$$\int_{-3}^{1} \left(\left(3 - x^2\right) - 2x \right) dx = \int_{-3}^{1} \left(3 - 2x - x^2\right) dx =$$

$$= \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{1} = 3 - 1 - \frac{1}{3} - \left(-9 - 9 + 9\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$