ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2019

1. Andalucía, junio 19, opción A

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

(a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

(b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

La recta r es:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+3t \\ z = 1+t \end{cases};\ \vec{v}_r = (-1, 3, 1);\ R = (2, 2, 1).$$

a) Un punto genérico de la recta es $P = (2-t, 2+3t, 1+t)$.

Se desea que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

$$d(P, \pi_1) = \frac{2-t}{\sqrt{1}} = \frac{2+3t}{\pm\sqrt{1}} = d(P, \pi_2) \Rightarrow \begin{cases} 2-t = 2+3t \\ -2+t = 2+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = (2,\ 2,\ 1) \\ P_2 = (4,\ -4,\ -1) \end{cases}.$$

b) La recta intersección de los planos π_1 y π_2 es: $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h \end{cases};\ \vec{v}_s = (0, 0, 1);\ S = (0, 0, 0).$

Para determinar la posición relativa de las rectas r y s hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r = (-1, 3, 1)$, $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{SR} = (2, 2, 1) - (0, 0, 0) = (2, 2, 1)$.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

2. Andalucía, septiembre 19

Ejercicio 4.- Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

(a) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(b) [0,75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

(c) [1 punto] Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

- $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ $\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u} = 0$: $(2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 2\alpha + 3\beta = 0$.
- $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ $\Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = 0$: $(2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2\alpha - \beta = 0$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 2 + 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 2 - 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2; \alpha = 2$.

b) Dos vectores tiene la misma dirección cuando sus coordenadas son proporcionales.

En este caso debe cumplirse que: $\frac{2}{1}=\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3} \Rightarrow \alpha=4; \beta=6$.

c) Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces el determinante asociado debe valer 0.

En este caso, y para α = 8, debe cumplirse que $\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8+32-4\beta=0 \Rightarrow \beta=10$.

Nota: Puede observarse que así, $\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}$.

3. Andalucía, septiembre 19

Ejercicio 4.- Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-k}{2}=\frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

(a) [1,5 puntos] Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) [1 punto] Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=k+2t \\ z=2t \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x=-1-h \\ y=1+h \\ z=3+h \end{cases}.$$

Si se cortan, hay algún punto en el que las coordenadas valen lo mismo; esto es:

$$r \equiv s \to \begin{cases} 2+t=-1+h \\ k+2t=1+h \\ 2t=3+h \end{cases}.$$

Este sistema debe ser compatible, luego, la solución de $\begin{cases} 2+t=-1+h \\ 2t=3+h \end{cases}$, que es t = 6 y h = 9, debe valer en la tercera ecuación, $k+2t=1+h \Rightarrow k+12=1+9 \Rightarrow k=-2$.

b) Para k = 1, $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=2t \end{cases}$.

El plano pedido queda determinado por el punto A = (2, 1, 0) ∈ r y por los vectores $\vec{v}_r$ = (1, 2, 2) y $\vec{v}_s$ = (–1, 1, 1).

Su ecuación será: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0\cdot(x-2)-3\cdot(y-1)+3z=0 \Rightarrow y-z-1=0$.

4. Aragón, junio 19, opción A

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A:(1,1,2)$, $B:(2,2,2)$ y $C:(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

Solución:

a) La recta que pasa por los puntos *A* y *B* es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2 \end{cases} \to A = (1,\ 1,\ 2);\ \vec{v}_r = \mathbf{AB} = (1,\ 1,\ 0).$$

El punto *C* estará alineado con *A* y *B* si es de la recta *AB*. Para ello debe cumplir su ecuación, luego:

$$C \in r \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1+t \\ a = 1+t \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ a = 1-2 \to a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

b) Para dos vectores cualquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el valor del módulo de su producto vectorial vale:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\operatorname{sen}(\vec{a},\vec{b})\right|.$$

Por tanto, el producto vectorial de un vector por sí mismo vale 0: $\sin(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}-\vec{v}) = \sin 0^{\circ} = 0$.

5. Aragón, septiembre 19, opción A

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo × representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta.

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $V = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$.

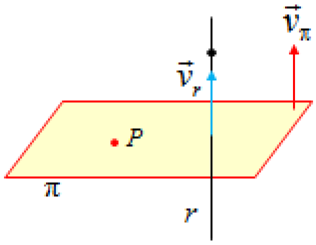
El producto vectorial $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (-1,\ 2,\ -1)$.

Por tanto,

$$V = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}\right\| = |-1+2+5| = 6\ \text{u}^3.$$

b) El vector característico del plano buscado debe ser el de dirección de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x = -1 + 2y \\ 3z = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$



$\to \vec{v}_r = (2, 3, -2)$.

El plano pedido será: $\pi \equiv 2x + 3y - 2z = d$.

Como debe pasar por el punto P (1, 3, 2), entonces:

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = d \Rightarrow d = 7$, luego:

$$\pi \equiv 2x + 3y - 2z = 7$$

6. Asturias, junio 19, opción A

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z = 0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

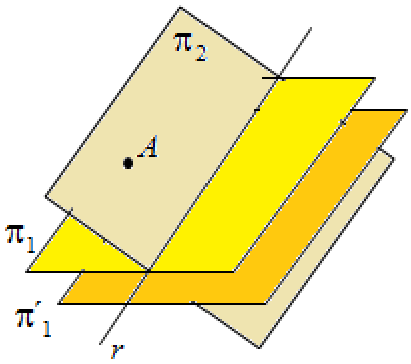
Solución:

a) La recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ genera el haz de planos: $x + y + z + \lambda(x + z) = 0$.

El plano π_1 es el correspondiente a $\lambda = 0$.

El plano π_2, que contiene al punto $A(1, 1, 1)$, se obtiene sustituyendo:

$$1 + 1 + 1 + \lambda(1 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}.$$



Por tanto, $\pi_2 \equiv x + y + z - \dfrac{3}{2}(x + z) = 0 \Rightarrow$

$\pi_2 \equiv -x + 2y - z = 0$.

b) El plano $\pi'_1 \equiv x + y + z = m$.

Por ser el plano y la recta paralelos, la distancia entre el plano y la recta r es independiente del punto de la recta que se tome. Si se elige $P(0, 0, 0)$, que es de la recta, entonces:

$$d(r, \pi'_1) = d(P(0,0,0), \pi'_1) = \left| \frac{0 - m}{\sqrt{1+1+1}} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow m = \pm 3.$$

El plano pedido será $\pi'_1 \equiv x + y + z = 3$ o $\pi'_1 \equiv x + y + z = -3$.

7. Asturias, junio 19, opción B

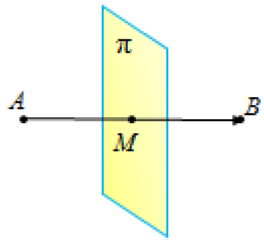
3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

Solución:

a) El plano π es el plano mediador de los puntos *A* y *B*. Este plano tiene por vector característico ***AB*** y pasa por el punto medio de *A*–*B*.



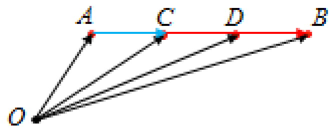
AB = (1, –1, –1) – (1, 1, 1) = (0, –2, –2);

punto medio: $M\left(\frac{1+1}{2},\frac{1-1}{2},\frac{1-1}{2}\right)$ = (1,0, 0).

Su ecuación es:

$$\pi \equiv 0\cdot(x-1)-2(y-0)-2(z-0)=0 \Rightarrow \pi \equiv y+z=0.$$

b) Si *C* y *D* dividen el segmento *AB* en tres partes iguales, entonces, los vectores ***AC***, ***CD*** y ***DB*** son iguales: su módulo es la tercera parte de ***AB***, siendo su sentido el mismo.



Por tanto:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(1,1,1)+\frac{1}{3}(0,-2,-2)=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow C=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right);$$

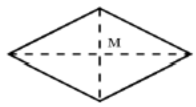
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1,1)+\frac{2}{3}(0,-2,-2)=\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow D=\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

8. Asturias, julio 19, opción A

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi:\ z=0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)

b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

Solución:

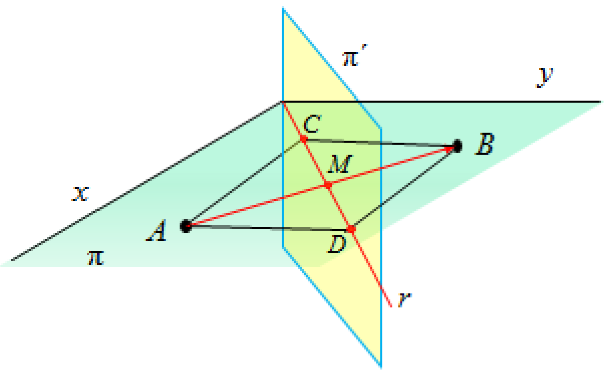
a) La recta *r* viene dada por el corte de los planos $\pi \equiv z=0$ y π´, siendo π´el plano mediador de los puntos *A* y *B*.

→ Plano mediador:

Vector característico,

AB = (1, 3, 0) – (3, 1, 0) = (–2, 2, 0);

Punto medio: $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{1+3}{2},\frac{0}{2}\right)$ = (2, 2, 0).



Su ecuación es:

$$\pi' \equiv -2\cdot(x-2)+2(y-2)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y=0.$$

→ Recta r: $r \equiv \begin{cases} z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. Su vector director es $\vec{v}_r$ = (1, 1, 0).

Los vértices C y D están sobre esa recta: sus coordenadas son de la forma $C(t,t,0)$ y $D(t',t',0)$. Ambos están a la misma distancia del punto M.

b) Si están a una distancia $\sqrt{2}$ del punto M, entonces:

$$d(M,C)=\sqrt{(2-t)^2+(2-t)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow t^2-4t+3=0 \Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\begin{cases}1\\3\end{cases}.$$

Con esto, los puntos pedidos son: C(1, 1, 0) y D(3, 3, 0).

9. Baleares, junio 19, opción A

3. Determinau la posició relativa del pla $x+y+z=1$ amb la recta d'equacions $x-1=y-1=\frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

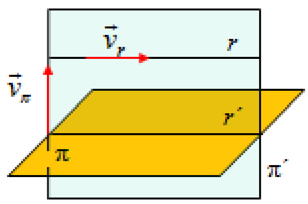
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano $\pi \equiv x+y+z=1$:

$\pi \equiv 1+t+1+t+1-2t=1 \Rightarrow 3=1$ (?) → Esto indica que la recta es paralela al plano.
También se podría haber visto que $\vec{v}_r$ = (1, 1, –2) y $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1) son perpendiculares.

La proyección ortogonal de r sobre π viene dada por el corte del plano π con el plano π´, perpendicular a π que contiene a r.
El plano π´ viene determinado por r y por $\vec{v}_\pi$. Su ecuación es:



$$\pi' \equiv \begin{cases} x=1+t+h \\ y=1+t+h \\ z=1-2t+h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y=0$$

Por tanto, la proyección es la recta $r' \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$.

10. Baleares, junio 19, opción B

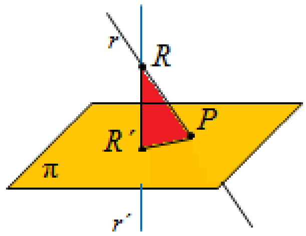
3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ i el pla $x-y=0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano $\pi \equiv x-y=0$:

$\pi \equiv 1+2t-(-1+t)=0 \Rightarrow t=-2 \rightarrow$ Punto $P(-3, -3, 3)$.



Proyección de $R(1, -1, 1)$ sobre el plano: es el corte de la recta perpendicular al plano π por el punto R con dicho plano.

$$r' \equiv \begin{cases} x = 1+h \\ y = -1-h \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{r'} = \vec{v}_{\pi} = (1, -1, 0).$$

Sustituyendo en π: $1+h-(-1-h)=0 \Rightarrow h=-1 \Rightarrow R'(0, 0, 1)$.

El área del triángulo RPR' viene dada por la mitad el módulo del vector $\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RR'}$.

$\overrightarrow{RP} = (-3, -3, 3) - (1, -1, 1) = (-4, -2, 2)$; $\overrightarrow{RR'} = (0, 0, 1) - (1, -1, 1) = (-1, 1, 0)$;

$$\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RR'} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,\ -2,\ -6) \rightarrow S_{RPR'} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{11} \text{ u}^2.$$

11. Canarias, junio 19 (Opción A)

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x-y+3=0$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z=0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$ (1,5 ptos)

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

Solución:

a) La recta s vendrá dada por el corte de los planos π'_1 y π'_2, paralelos a π_1 y π_2, respectivamente, y que pasan por el punto B.

Esos planos son:

$\pi'_1 \equiv (x-2)-(y-2)=0 \Rightarrow \pi'_1 \equiv x-y=0$;

$\pi'_2 \equiv 2(x-2)+(y-2)-(z-3)=0 \Rightarrow \pi'_2 \equiv 2x+y-z-3=0$.

Luego,

$$s \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3+3t \end{cases}.$$

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el determinado por sus vectores normales, $\vec{v}_{\pi 1} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (2, 1, -1)$.

Aplicando el producto escalar:

$$\cos\left(\vec{v}_{\pi1},\ \vec{v}_{\pi2}\right) = \frac{(1,\ -1,\ 0)\cdot(2,\ 1,\ -1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$$

ángulo $(\pi_1, \pi_2) = 77{,}22^{\circ}$.

12. Canarias, junio 19 (Opción B)

3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$ (1,25 ptos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 ptos)

Solución:

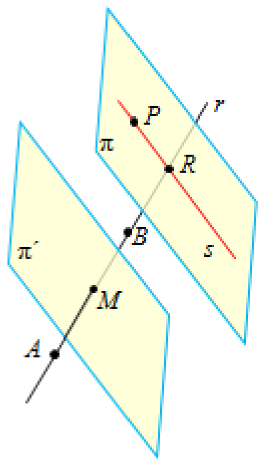
a) La recta pedida está en el plano π, perpendicular a la recta determinada por los puntos *A* y *B* y que pasa por *P*.

El vector característico de ese plano es $\vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB}$ = (–2, 3, 1) – (2, –1, 1) = (–4, 4, 0).

Como debe pasar por el punto *P*(–4, 17, 0), su ecuación será:

$$\pi \equiv -4(x+4)+4(y-17)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-y+21=0 .$$

Recta determinada por *A* y *B*: $r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases} \to$



$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$ = (–4, 4, 0) ≡ (–1, 1, 0).

Corte de *r* con π → se sustituye *r* en π:

$$\pi \equiv (2-t)-(-1+t)+21=0 \Rightarrow t=12 \to \text{punto } R(-10,\ 11,\ 1) .$$

La recta buscada es la determinada por *P* y *R*, cuya ecuación es:

$$s \equiv \begin{cases} x = -4+6h \\ y = 17+6h \\ z = -h \end{cases}$$

El vector $\overrightarrow{RP} = (-4,\ 17,\ 0)-(-10,\ 11,\ 1) = (6,\ 6,\ -1)$.

b) Se trata del plano mediador de los puntos *A* y *B*. Este plano pasa por el punto medio del segmento *AB* y es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

Como $M = \left(\frac{2-2}{2},\ \frac{-1+3}{2},\ \frac{1+1}{2}\right) = (0,\ 1,\ 1)$, la ecuación del plano mediador será:

$$\pi' \equiv x-(y-1)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y+1=0 .$$

13. Cantabria, junio 19 (EXAMEN N.º 1)

Ejercicio 3

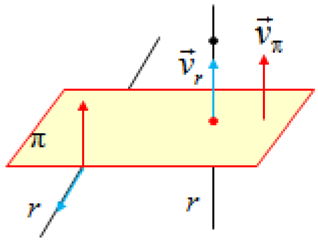
Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Solución:

1) Si una recta y un plano son ortogonales, entonces sus vectores característicos, el de dirección de la recta y el normal al plano, son proporcionales: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_\pi$.



$\vec{v}_\pi$ = (2, a, 1); $\vec{v}_r$ = (2, 1, 1) → Si $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_\pi \Rightarrow a = 1$.

2) Si una recta y un plano son paralelos, entonces sus vectores característicos, el de dirección de la recta y el normal al plano, son perpendiculares: $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$.

(2, a, 1) · (2, 1, 1) = 4 + a + 1 = 0 $\Rightarrow a = -5$. Por tanto: $\Pi \equiv 2x - 5y + z - 2 = 0$.

Por ser r y Π paralelos, la distancia entre el plano y la recta r es independiente del punto de la recta que se tome. Si se elige O(0, 0, 0), entonces:

$$d(r, \Pi) = d((0,0,0), \Pi) = \left| \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{30}}.$$

14. Cantabria, julio 19 (EXAMEN N.º 1)

Ejercicio 3

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2,1,3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Solución:

1) Obtención de la ecuación general del plano:

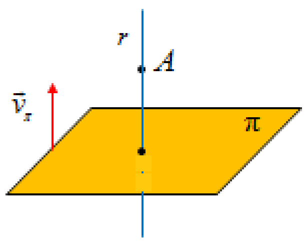
$$\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)} \Rightarrow \Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t + s \\ z = -s \end{cases} \Rightarrow \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Pi \equiv -(x-2) + 2(y-1) + 2z = 0 \Rightarrow \Pi \equiv -x + 2y + 2z = 0.$$

$$\to d(A(2,1,3), \Pi) = \left| \frac{-2+2+6}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2.$$

2) El vector de dirección de la recta ortogonal a Π es $\vec{v}_\pi$ = (–1, 2, 2); como debe pasar por A(2, 1, 3), entonces:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}.$$



15. Castilla La Mancha, junio 19

4A. Dados los puntos $A(1,2,0), B(0,-1,2), C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

Solución:
a) El plano buscado está determinado por los vectores ***AB*** y ***CD***; además, debe contener a A (o a B).
AB = (0, –1, 2) – (1, 2, 0) = (–1, –3, 2); ***CD*** = (1, 0, 1) – (2, –1, 3) = (–1, 1, –2).
Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-2 & -3 & 1 \\ z-0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4(x-1) - 4(y-2) - 4z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 1 = 0 .$$

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de tres vectores que lo determinan. En este caso, por ejemplo, los vectores: ***AB***, ***AC*** y ***CD***.
AB = (–1, –3, 2); ***AC*** = (2, –1, 3) – (1, 2, 0) = (1, –3, 3); ***CD*** = (–1, 1, –2).
En consecuencia:

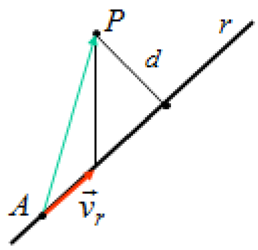
$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|-3+3-4\right| = \frac{2}{3}.$$

16. Castilla La Mancha, junio 19, opción B

4B. Sean la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \quad t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.



La distancia del punto P a la recta r es: $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$.

Como A = (1, 0, –1) y P = (3, 1, –1), $\overrightarrow{AP}$ = (2, 1, 0) y $\vec{v}_r$ = (3, 1, 2), el producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2,\ -4,\ -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

Luego, $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ u.

b) El plano paralelo a π que contiene a $P(3, 1, –1)$ es:

$$\pi': 2(x-3)+(y-1)-(z+1)=0 \Rightarrow \pi': 2x+y-z-8=0.$$

Corte de r con π´: se sustituye r en π´.

$$\pi': 2(1+3t)+t-(-1+2t)-8=0 \Rightarrow 5t-5=0 \Rightarrow t=1 \rightarrow Q(4, 1, 1).$$

Por tanto, la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$s: \begin{cases} x=3+h \\ y=1 \\ z=-1+2h \end{cases} \rightarrow \text{su vector de dirección es } \mathbf{PQ} = (4, 1, 1) – (3, 1, –1) = (1, 0, 2).$$

17. Castilla La Mancha, julio 19, opción B

4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(-1,0,-2)$, $\vec{v}=(a,b,1)$ y $\vec{w}=(2,5,c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+2z-3=0$. Comprueba si los puntos $Q(1,5,5)$ y $R(0,4,2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales si su producto escalar vale 0: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

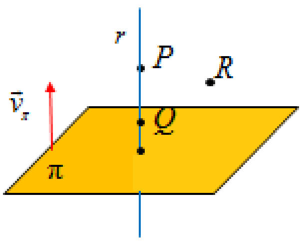
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,\ 0,\ -2)\cdot(a,\ b,\ 1)=-a-2=0 \Rightarrow a=-2.$$

Si se desea que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$, entonces:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix}=(2b,\ 5,\ -b)=(2,\ 5,\ c)=\vec{w} \Rightarrow b=1;\ c=-1.$$

b) El vector de dirección de la recta ortogonal a π es $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 2); como debe pasar por $P(–1, 3, 1)$, entonces:

$$r: \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=1+2t \end{cases}.$$



Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.

→ Para $t = 2$, se obtiene $Q(1, 5, 5)$. Luego Q pertenece a la recta.

→ $R(0, 4, 2)$ no cumple, a la vez, las tres ecuaciones de la recta: la componente $x = 0$ se obtiene para $t = 1$; pero para ese valor, la componente $z = 3 \neq 2$. Luego R no es de la recta.

18. Castilla y León, junio 19, opción A

E2.- **a)** Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1,\ 2,\ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2,\ 1,\ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

Solución:

a) El plano pedido viene determinado por el punto $A = (1, 2, 1)$ y por los vectores $\vec{v}_r = (2, 3, 2)$ y $\boldsymbol{AR} = (1, 1, 1) - (1, 2, 1) = (0, -1, 0)$, siendo $R = (1, 1, 1)$ un punto de r.

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 3 & -1 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z = 0.$$

b) El vector de dirección de la recta pedida (perpendicular común a s_1 y s_2) debe ser perpendicular a los vectores de dirección de esas rectas. Ese vector se obtiene multiplicando vectorialmente dichos vectores, luego:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{s1} \times \vec{v}_{s2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2,\ -6,\ 8) \to (1, 3, -4).$$

Luego, como debe pasar por el punto $B = (2, 1, 2)$, la recta pedida será: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 - 4\lambda \end{cases}$.

19. Castilla y León, julio 19, opción A

E2.- **a)** Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,1,a)$ y $\vec{v} = (1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1,2,3)$ y $\vec{q} = (1,-2,-3)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar vale 0: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,\ 1,\ a) \cdot (1,\ -1,\ a) = 1 - 1 + a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

b) Un vector perpendicular a dos dados se obtiene multiplicando vectorialmente dichos vectores, luego:

$$\vec{w} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (0,\ 6,\ -4).$$

El vector unitario es:

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} \cdot (0,\ 6,\ -4) = \frac{1}{2\sqrt{13}} \cdot (0,\ 6,\ -4) = \left(0,\ \frac{3}{\sqrt{13}},\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

20. Cataluña, junio 19

3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Solución:

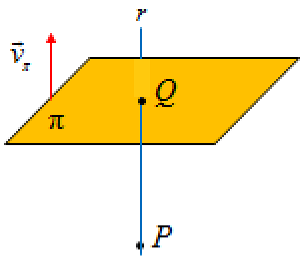
a) El punto del plano $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$ más cercano a P es la proyección de P sobre π. Es el punto de corte del plano con la recta perpendicular a él y que pasa por P.

La dirección de la recta viene dada por el vector característico del plano, $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$ = (3, 0, 4); como debe pasar por P(2, –3, 1), su ecuación será:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 \\ z = 1 + 4t \end{cases}.$$

La distancia que debe recorrer es:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + 15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5.$$



b) Es el punto de corte de la recta con el plano. Sustituyendo las ecuaciones la recta en la del plano:

$$\pi: 3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 15 = 0 \Rightarrow 25t + 25 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Para $t = -1$ se tiene el punto $Q(-1, -3, -3)$.

21. Cataluña, septiembre 19

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.

a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.

[1 punt]

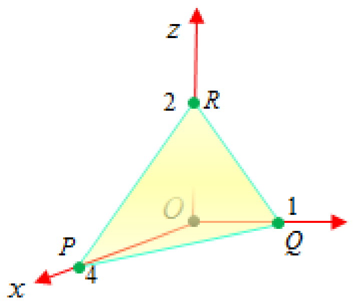
b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.

[1 punt]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$, en què $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$.

Solución:

a) Los puntos de corte se obtienen haciendo 0 dos de las tres coordenadas.



Se obtienen: $P = (4, 0, 0)$; $Q = (0, 1, 0)$; $R = (0, 0, 2)$.

El perímetro viene dado por la suma de los módulos de los vectores:

PQ = (–4, 1, 0); **QR** = (0, –1, 2); **RP** = (4, 0, –2).

Luego:

$$p = d(P,Q) + d(Q,R) + d(R,P) \Rightarrow$$

$$p = \sqrt{16+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{16+4} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5}\,.$$

b) El producto vectorial de dos de los vectores que determinan el triángulo es:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RP} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,\ -8,\ -4).$$

El área del triángulo es $S = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} = \sqrt{21}$ u^2.

22. Comunidad Valenciana, junio 19

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de *r* y *s* son:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1,1,2);\ R \in r \text{ es } R = (0, 3, 3).$$

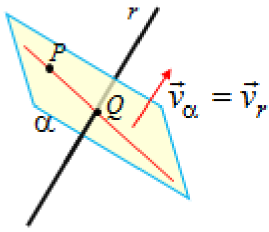
$$s: \begin{cases} x = h \\ y = -1 + h \\ z = 2 + 2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1,1,2);\ S \in s \text{ es } S = (0, -1, 2).$$

Resulta evidente que las dos rectas son paralelas: $\vec{v}_r = \vec{v}_s$. Por tanto, el plano que las contiene queda determinado por el punto R y los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{RS} = (0, -1, 2) - (0, 3, 3) = (0, -4, -1)$.

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-3 & 1 & -4 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + y - 4z + 9 = 0.$$

b) La recta pedida queda determinada por los puntos $P = (0, -1, 2)$ y Q, punto de corte de la recta r con el plano α, perpendicular a r por P.



El plano perpendicular es:

$$\alpha \equiv x + y + 2z + d = 0$$

Por pasar por P: $\alpha \equiv 0 - 1 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -3 \Rightarrow$

$$\alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0$$

Corte de α con r:

$$t + 3 + t + 2\cdot(3 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Luego: $Q = (-1, 2, 1)$; $\boldsymbol{PQ} = (-1, 2, 1) - (0, -1, 2) = (-1, 3, -1)$.

La recta pedida es: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$.

c) La recta s está contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$ cuando dos de sus puntos son de π.

Sean $P = (0, -1, 2)$ y $C = (1, 0, 4)$ puntos de s; entonces:

$$P \in \pi \Rightarrow 2 + 2a = b;\quad C \in \pi \Rightarrow 1 + 4a = b \to a = \frac{1}{2},\ b = 3.$$

23. Comunidad Valenciana, junio 19

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 *puntos*)

Solución:

a) Todos los planos paralelos tienen el mismo vector característico. Por tanto, los planos paralelos a $\pi \equiv 9x+12y+20z=180$ son de la forma $\pi' \equiv 9x+12y+20z+d=0$.

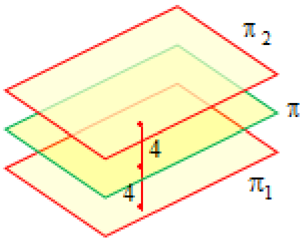
Como se pide que disten 4 unidades de π debe cumplirse, para cualquier punto $P \in \pi$, que:

$$d(P,\pi')=4.$$

Para $P = (0, 0, 9) \in \pi$:

$$d(P(0,0,9),\pi')=\frac{9\cdot 0+12\cdot 0+20\cdot 9+d}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}=4 \Rightarrow \frac{180+d}{\sqrt{625}}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{180+d}{\pm 25}=4 \Rightarrow \begin{cases} 180+d=100 \to d=-80 \\ 180+d=-100 \to d=-280 \end{cases}.$$

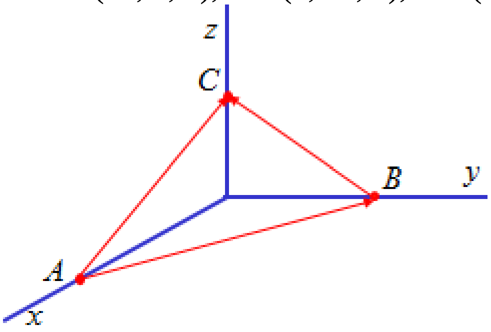


Los planos son:

$$\pi_1 \equiv 9x+12y+20z-80=0 \text{ y } \pi_2 \equiv 9x+12y+20z-280=0.$$

b) Los puntos A, B y C son:

$A = (20, 0, 0)$; $B = (0, 15, 0)$; $C = (0, 0, 9)$.



Los vectores son:

$\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-20, 0, 9)$

Como $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ se tiene:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-20\cdot(-20)}{\sqrt{400+225}\cdot\sqrt{400+81}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{16}{\sqrt{481}}\approx 0,7295...$$

Luego $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arccos(0,7295...)=43,15^\circ$.

c) El volumen del tetraedro viene dado por $V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right|$.

En consecuencia:

$$V_t=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot 2700=450 \text{ u}^3.$$

24. Extremadura, julio 19, opción B

2. Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$, y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.

(a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r. **(1 punto)**

(b) Calcule la distancia entre las rectas r y s. **(1 punto)**

Solución:

a) El plano pedido está determinado por un punto de *s*, por ejemplo, *C*, y por vectores de dirección de las rectas *r* y *s*.

Ecuaciones paramétricas de las rectas *r* y *s*.

Recta *r*:

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=-2t \\ z=-1 \end{cases} \to \vec{v}_r = \mathbf{AB} = (0, -2, -1) - (0, 0, -1) = (0, -2, 0).$$

Recta *s*:

$$s:\begin{cases} x=-1+2h \\ y=2-2h \\ z=-h \end{cases} \to \vec{v}_s = (1, 0, -1) - (-1, 2, 0) = (2, -2, -1).$$

Plano Π:

$$\Pi:\begin{cases} x=-1+2h \\ y=2-2h-2t \\ z=-h \end{cases} \Rightarrow \Pi:\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 0 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2(x+1)-4z=0 \Rightarrow x+2z+1=0.$$

b) La distancia ente dos rectas viene dada por la fórmula $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ los vectores de dirección respectivos, y $\overrightarrow{RS}$ un vector que va de *r* a *s*: $R \in r$ y $S \in s$.

En este caso: $\vec{v}_r = (0, -2, 0)$; $\vec{v}_s = (2, -2, -1)$; $\overrightarrow{RS} = \left(\overrightarrow{AC}\right) = (-1, 2, 0) - (0, 0, -1) = (-1, 2, 1)$

Luego,

$$\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{RS}\right]=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2;$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(2,\ 0,\ 4) \Rightarrow \left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}.$$

Por tanto: $d(r,s)=\dfrac{2}{\sqrt{20}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

<u>**25**. Galicia, junio 19, opción A</u>

3. Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo [0º, 90º] que forman los vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ y $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, –3, 0)$ y es perpendicular a la recta: $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$.

c) Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

<u>Solución</u>:

a) El ángulo que forman dos vectores se obtiene aplicando el producto escalar:

$$\cos(\vec{u},\ \vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\to$$

(El detalle de las operaciones se deja al lector) → ángulo $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})=\arccos\frac{1}{2}$ = 60º.

b) Ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r:\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} x+z=1 \\ y=z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

. Su vector de dirección es $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 1).

El vector característico de cualquier plano perpendicular a r es $\vec{v}_\pi=\vec{v}_r$. Por tanto, su ecuación será:

$$\pi: -x+y+z=m.$$

Como se pide que pase por el punto $P(1, –3, 0)$ ⇒ $\pi: -1-3+0=m \Rightarrow m=-4$.

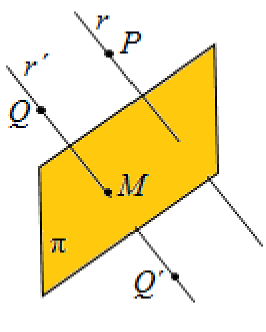
El plano pedido es:

$$\pi: -x+y+z=-4.$$

c) $d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi: ax+by+cz+d=0\right)=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

En nuestro caso:

$$d\left(Q(1,1,1), \pi: -x+y+z+4=0\right)=\left|\frac{-1+1+1+4}{\sqrt{3}}\right|=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$



→ Sea $Q´$ el simétrico de Q respecto de π. Ambos puntos, Q y $Q´$, estarán en la recta $r´$, perpendicular a π por Q. Esa recta es paralela a r; luego, por pasar por Q, su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \to \text{El punto } Q' = (1 - t,\ 1 + t,\ 1 + t).$$

La distancia de ambos puntos al plano π debe ser la misma: *d*(*Q*, π) = *d*(*Q*', π).
Luego,

$$d(Q',\pi) = \left|\frac{-(1-t)+(1+t)+(1+t)+4}{\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3t+5| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 3t+5 = 5 \Rightarrow t = 0 \\ -3t-5 = 5 \Rightarrow t = -10/3 \end{cases}.$$

Para *t* = 0 se obtiene *Q*´ = (1, 1, 1), que es el mismo *Q*. Naturalmente esta solución no es válida.

Para *t* = −10/3 se obtiene $Q' = \left(1+\frac{10}{3},\ 1-\frac{10}{3},\ 1-\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{13}{3},\ -\frac{7}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$. Es el punto buscado.

<u>**26**. Galicia, junio 19, opción B</u>

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro *m*.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos *A*(0, 0, 0), *B*(12, 0, 1) y *C*(0, 1, 0).

c) Calcula el punto simétrico del punto *P*(1, 2, 3) con respecto al plano $\pi : -x + z = 0$.

<u>Solución</u>:

a) Hay que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} mx - y + 0z = -2 \\ 2x + 3y + 0z = 0 \end{cases}$.

El menor de la matriz de coeficientes, $|A_1| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 \to$ se anula si $m = -\frac{2}{3}$.

El rango de matriz de coeficientes es 1 si $m = -\frac{2}{3}$; será 2, si $m \neq -\frac{2}{3}$.

El menor de la matriz ampliada, $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \to$ su rango siempre es 2.

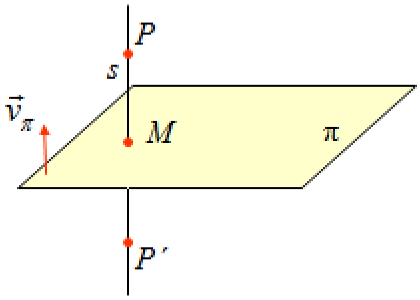
Por tanto:

- si $m = -\frac{2}{3}$, el sistema será incompatible. Esto significa que los planos serán paralelos.
- si $m \neq -\frac{2}{3}$, el sistema será compatible indeterminado. Esto significa que los planos se cortarán, determinando una recta.

b) El plano pedido viene determinado por el punto *A* y los vectores ***AB*** y ***AC***.
AB = (1, 0, 1) – (0, 0, 0) = (1, 0, 1); ***AC*** = (0, 1, 0) – (0, 0, 0) = (0, 1, 0).
Su ecuación implícita será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + z = 0.$$

c) Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi: -x + z = 0$.
Ambos puntos, P y P' estarán en la recta s, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.



Como $\vec{v}_\pi$ = (–1, 0, 1), se deduce que $s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta s con plano π:
$-(1 - \lambda) + 0 \cdot 2 + (3 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.
Luego, $M = (2, 2, 2)$.

Punto medio de P y P': $\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{2+y_0}{2}, \dfrac{3+z_0}{2}\right)$.

Como $M = (2, 2, 2) = \left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{2+y_0}{2}, \dfrac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$2 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 3;\ 2 = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 2;\ 2 = \frac{3+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 1.$$

Por tanto, $P' = (3, 2, 1)$.

27. La Rioja, junio 19, propuesta B

1.– (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

Solución:

i) El vector de dirección de la recta s debe ser perpendicular, a la vez, al de dirección de r, $\vec{v}_r$ = (–1, 1, –3), y al característico del plano, $\vec{v}_\pi$ = (2, 1, –1).
Un vector perpendicular a dos dados se obtiene haciendo su producto vectorial.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{v}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -7, -3).$$

Como s debe pasar por $P = (1, 2, -1)$, su ecuación será: $s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 7\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$.

ii) Si la reta s es paralela al plano π, la distancia de s a π es la de cualquier punto de s al plano.

$$d(s, \pi) = d\left(P(1, 2, -1), \pi: 2x + y - z - 3 = 0\right) = \left|\frac{2+2+1-3}{\sqrt{4+1+1}}\right| = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

28. La Rioja, julio 19, propuesta A

1.–(2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1+e_2$ y $v = e_1-e_2+e_3$

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

Solución:

I) Hay que saber que: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Como los vectores $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ son unitarios y forman ángulos de 45º entre sí:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1;\ \cos(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \cos(\vec{e}_1,\vec{e}_3) = \cos(\vec{e}_3,\vec{e}_3) = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 = 1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2) = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2+\sqrt{2}$.

Por tanto:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Si $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \Rightarrow$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 - \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 - \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 3 - \sqrt{2}.$$

Por tanto:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{3-\sqrt{2}}.$$

II) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 =$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Luego,

$$\cos(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}.$$

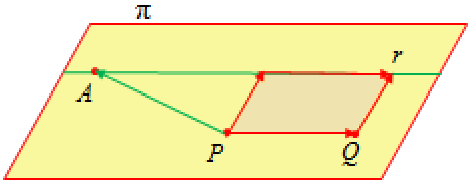
29. La Rioja, julio 19, propuesta B

2.– (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5, 4, 3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución:



I) Si los otros dos vértices están en la recta *r*, entonces la dirección de *r* debe ser paralela a la determinada por el lado *PQ*.

PQ = (0, 0, –1) – (2, 2, 1) = (–2, –2, –2).

Como *r* debe pasar por *A* = (5, 4, 3), su ecuación será:

$$r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}.$$

II) El plano π queda determinado por *r* y por el vector **PA** = (5, 4, 3) – (2, 2, 1) = (3, 2, 2).

Sus ecuaciones son:

$$\pi: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 4 - 2\lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & -2 & 3 \\ y-4 & -2 & 2 \\ z-3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -2(y-4) + 2(z-3) = 0 \Rightarrow y - z - 1 = 0.$$

30. Madrid, junio 19, opción A

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases};\ s \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = -5 \\ z = 1-t \end{cases}.$$

a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, estarán en el mismo plano.

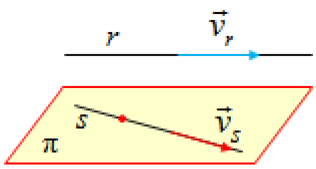
Como $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$, $\vec{v}_s = (-1, 0, -1)$; $R = (1, 3, 0)$, $S = (2, -5, 1) \to \boldsymbol{RS} = (1, -8, 1)$, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -16+8 = -8 \neq 0.$$

Luego, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

b) El plano pedido viene determinado por la recta s y por el vector $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$.

Sus ecuaciones serán.

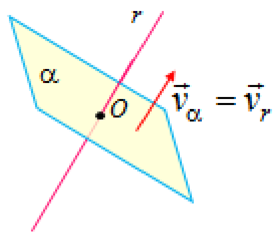


$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2-t+2h \\ y = -5-2h \\ z = 1-t+h \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 2 \\ y+5 & 0 & -2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv -2(x-2)-(y+5)+2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-2z+3 = 0.$$

c) El vector característico del plano pedido viene dado por $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$; como debe pasar por $O = (0, 0, 0)$, su ecuación será:

$$\alpha \equiv 2x-2y+z = 0.$$



31. Madrid, junio 19, opción B

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

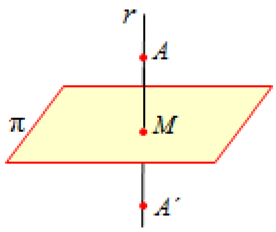
a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $d\left(A(2,1,0), \pi \equiv 2x+3y+4z=36\right)=\left|\dfrac{2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\right|=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$.

b) El punto del plano más próximo a A es el proyectado de A sobre π: es el punto de corte de la perpenpendicular a π por A con π.
La recta perpendicular a π que pasa por A es:

$$r \equiv \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=0+4t \end{cases}.$$



Corte de r con π:

$$2\left(2+2t\right)+3\left(1+3t\right)+4\cdot 4t=36 \Rightarrow 29t=29 \Rightarrow t=1.$$

Por tanto, M = (4, 4, 4).

c) Si $A´ = (x_0, y_0, z_0)$ es el simétrico de A respecto de π, entonces, M será el punto medio de ambos.

Punto medio de A y $A´$: $\left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{z_0}{2}\right)$.

Como $M = (4, 4, 4) = \left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$4=\frac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0=6;\ 4=\frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=7;\ 4=\frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0=8.$$

Por tanto, $A´$ = (6, 7, 8).

32. Madrid, julio 19, opción A

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución:

a) El plano queda determinado por el punto A(1, 1, 1) y por los vectores ***AB*** y ***AC***.
AB = (1, 3, –3) – (1, 1, 1) = (0, 2, –4); ***AC*** = (–3, –1, 1) – (1, 1, 1) = (–4, –2, 0).
Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -4 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z-1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -8(x-1)+16(y-1)+8(z-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-2y-z+2=0.$$

b) El punto D debe ser cualquiera de los del plano π; por ejemplo, $D(-2, 0, 0)$.

c) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: ***AB***, ***AC*** y ***AP***. Si $P(a, 0, 0)$, estos vectores son:

AB = (0, 2, –4); ***AC*** = (–4, –2, 0); ***AP*** = (a, 0, 0) – (1, 1, 1) = (a –1, –1, –1).

En consecuencia:

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-24-8a+8\right| = \frac{1}{6}\left|-16-8a\right|.$$

Si se desea que ese volumen sea igual a 1, entonces:

$$\frac{1}{6}\left|-16-8a\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -16-8a=6 \to a=-11/4 \\ 16+8a=6 \to a=-5/4 \end{cases} \Rightarrow P_1\left(-\frac{11}{4},\ 0,\ 0\right) \text{ o } P_2\left(-\frac{5}{4},\ 0,\ 0\right).$$

33. Madrid, julio 19, opción B

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

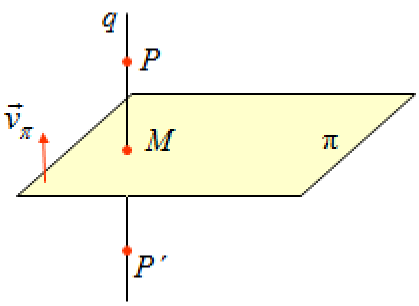
c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución:

a) Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi \equiv 2x+3y-z=4$.

Ambos puntos, P y P' estarán en la recta q, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.

Como $\vec{v}_\pi$ = (2, 3, –1), se deduce que $q: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$.



Corte de la recta q con plano π:

$$2(1+2\lambda)+3(2+3\lambda)-(3-\lambda)=4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{14}.$$

Por tanto, $M = \left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$.

Punto medio de P y P': $\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right)$.

Como deben ser iguales: $M = \left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{12}{14} = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{10}{14};\ \frac{25}{14} = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{22}{14};\ \frac{43}{14} = \frac{3+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{44}{14}.$$

Por tanto, $P' = \left(\frac{5}{7}, \ \frac{11}{7}, \ \frac{22}{7}\right)$.

b) Ecuaciones paramétricas de las rectas dadas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \text{(restando ambas ecuaciones)} \to r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases} ; \ s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}.$$

Como se sabe que se corta, el sistema $(r \cap s) \to \begin{cases} 1-t=1+\lambda \\ t=2 \\ 1=3+\lambda \end{cases}$ tiene solución, que es $t = 2$, λ = –2. El punto de corte de ambas rectas es C(–1, 2, 1).

La recta perpendicular a π por C es: $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$.

c) El ángulo que forman las rectas r y s es el determinado por sus vectores de dirección, $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 0) y $\vec{v}_s$ = (1, 0, 1).
Aplicando el producto escalar:

$$\cos(\vec{v}_r, \ \vec{v}_s) = \frac{(-1, \ 1, \ 0)\cdot(1, \ 0, \ 1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ángulo } (r, s) = 120^{\circ} \to \text{o } 60^{\circ}$$

<u>**34**. Murcia, junio 19</u>

A.3: Los puntos $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$ y $C=(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

<u>Solución</u>:
a) El plano queda determinado por el punto A(3, 0, 0) y por los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$.
$\boldsymbol{AB}$ = (0, 3, 0) – (3, 0, 0) = (–3, 3, 0); $\boldsymbol{AC}$ = (0, 0, 3) – (3, 0, 0) = (–3, 0, 3).
Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 3 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 9(x-3)+9y+9z=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y+z-3=0.$$

b) El vector característico del plano, $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1), determina la dirección de la recta pedida; como, además, debe pasar por P = (1, 1, 1), su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}.$$

c) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: ***AB***, ***AC*** y ***AD***. Como *D* es de la recta, $D = (1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)$, estos vectores son:

AB = (–3, 3, 0); ***AC*** = (–3, 0, 3);

AD = $(1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)-(3,\ 0,\ 0)=(-2+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)$.

En consecuencia:

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|9(1+\lambda)+9(1+\lambda)+9(-2+\lambda)\right| = \frac{3}{2}|3\lambda|.$$

Si este volumen vale 18, entonces:

$$\frac{3}{2}|3\lambda| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 12 \to \lambda = 4 \\ -3\lambda = 12 \to \lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow D_1(5,\ 5,\ 5) \text{ o } D_2(-3,\ -3,\ -3).$$

<u>35. Murcia, junio 19</u>

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \qquad\qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

<u>Solución</u>:

a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y ***RS***, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

Los vectores son:

$\vec{v}_r$ = (1, 1, 1), $\vec{v}_s$ = (1, 1, –1) y ***RS*** = (1, 0,–1) – (5, 6, –1) = (–4, –6, 0)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -6-4-2 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) Como se cruzan hay que calcular la perpendicular común.

Para hallar la recta perpendicular común a las retas *r* y *s*, de ecuaciones:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \to r \equiv \begin{cases} x = 5+t \\ y = 6+t \\ z = -1+t \end{cases};\ \vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1);$$

$$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1} \to s \equiv \begin{cases} x=1+h \\ y=h \\ z=-1-h \end{cases} ;\ \vec{v}_s = (1,1,-1).$$

1) Se toman puntos genéricos de r y s:

$R = (5 + t, 6 + t, -1 + t)$, $S = (1 + h, h, -1 - h)$

El vector ***SR*** $= (4 + t - h, 6 + t - h, t + h)$, que indica la dirección de la recta perpendicular común a r y s, debe ser perpendicular a los de dirección de r y s:

2) Se multiplica escalarmente (***SR*** $\cdot \vec{v}_r = 0$, ***SR*** $\cdot \vec{v}_s = 0$), y se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 10+3t-h=0 \\ 10+t-3h=0 \end{array}\right\} \Rightarrow t=-\frac{5}{2} \text{ y } h=\frac{5}{2}$$

Con esto:

$$R=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{-7}{2}\right),\ S=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{-7}{2}\right) \text{ y } \boldsymbol{SR} = (-1,\ 1,\ 0).$$

3) La recta perpendicular común, que pasa por R y lleva la dirección de ***SR*** es:

$$p:\begin{cases} x=5/2-\lambda \\ y=7/2+\lambda \\ z=-7/2 \end{cases}.$$

36. Murcia, septiembre 19

A.3: Considere la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) **[1,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

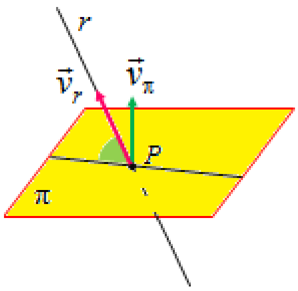
Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=-3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Se hace la intersección de r y π. (Si no hubiese solución, la recta sería paralela al plano).
Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\pi: x-2y-z=-1 \Rightarrow (-1-\lambda)-2(-3+2\lambda)-\lambda=-1 \Rightarrow -6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=1.$$

Como hay solución, la recta corta al plano.



b) El punto de corte, para $\lambda = 1$, es $P = (-2, -1, 1)$.
El ángulo que forman es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v}_\pi = (1, -2, -1)$.

$$\text{sen}\,(r,\ \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} =$$

$$= \frac{(-1,\ 2,\ 1)\cdot(1,\ -2,\ -1)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \text{ángulo}(r,\ \pi) = 90^\circ.$$

La recta y el plano son perpendiculares.

37. Murcia, septiembre 19

B.3: Los puntos $A = (0,-1,1)$ y $B = (1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

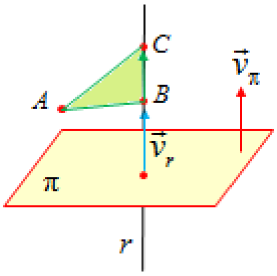
a) El vector de dirección de la recta r es el característico el plano π, $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, 1).

Como pasa por B = (1, 1, 1), su ecuación será $r:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$.

b) El área de un triángulo de vértices A, B, C, viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|$.

En este caso, $\overrightarrow{AB}$ = (1, 1, 1) – (0, –1, 1) = (1, 2, 0); y como C es de la recta r, entonces $\overrightarrow{BC} = k\cdot\vec{v}_r = k\cdot(2,-1,1) = (2k,-k,k)$

Por tanto,



$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2k & -k & k \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left|(2k,\ -k,\ -5k)\right|.$$

Debe cumplirse que:

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4k^2+k^2+25k^2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{30k^2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow k = \pm 6.$$

Si $k = -6$, $\overrightarrow{BC} = (-12,6,-6)$. Como $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (1,1,1) + (-12,6,-6) = (-11,7,-5)$.

Si $k = 6$, $\overrightarrow{BC} = (12,-6,6)$; siendo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (1,1,1) + (12,-6,6) = (13,-5,7)$.

38. Navarra, junio 19

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

(2 puntos)

Solución:

El plano π debe ser paralelo a las dos rectas. Por tanto, dos vectores de ese plano son los de dirección de ellas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$; quedará determinado de manera única al imponer que diste 3 unidades de la recta *s*.

Ecuaciones paramétricas de las rectas dadas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} 2x+(-1-t)-2t-1=0 \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x=1+\frac{3}{2}t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \to$$

$$\vec{v}_r = (3, -2, 2);\ s \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \to \vec{v}_s = (1, 2, 2).$$

El vector normal del plano π es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8,\ -4,\ 8) \to \vec{v}_\pi = (2,\ 1,\ -2).$$

Luego, el plano buscado es de la forma $\pi \equiv 2x+y-2z+d=0$

La distancia de *s* al plano π es la distancia entre cualquier punto $P \in s$ al plano.

Si *P* = (–2, 1, 1), entonces se desea que

$$d\left(P(-2,1,1), \pi \equiv 2x+y-2z+d=0\right) = \left| \frac{2\cdot(-2)+1-2\cdot 1+d}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \right| = 3 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{-5+d}{3} \right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} -5+d=9 \to d=14 \\ 5-d=9 \to d=-4 \end{cases} \to \text{hay dos planos: } \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+y-2z+14=0 \\ \pi_2 \equiv 2x+y-2z-4=0 \end{cases}.$$

39. Navarra, junio 19

B2) $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$ y $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

Solución:

Plano que contiene a la cara P–Q–R (determinado por P y los vectores: $\boldsymbol{PQ}$ y $\boldsymbol{PR}$).

$\boldsymbol{PQ}$ = (4, –2, 4); $\boldsymbol{PR}$ = (6, –6, 0);

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 6 \\ y+1 & -2 & -6 \\ z-1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x+2y-z+1=0.$$

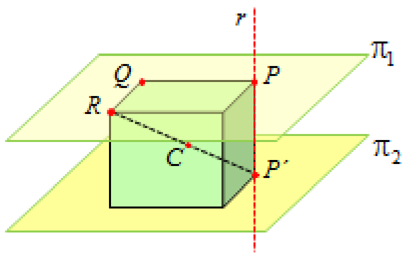
El lado del prisma mide $l = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{16+4+16} = 6$.

Otra cara del prisma se encuentra en un plano paralelo a π_1 que esté a 6 unidades de distancia (elegiré uno de los dos posibles): $\pi_2 \equiv 2x+2y-z+d=0$.

$$d\left(P(1,-1,1),\pi_2\right)=6 \to \frac{2-2-1+d}{\sqrt{4+4+1}}=6 \Rightarrow \frac{-1+d}{3}=6 \Rightarrow d=19 \Rightarrow$$

$\pi_2 \equiv 2x+2y-z+19=0$.

Vértice P': corte de π_2 con la perpendicular a él por P.



$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases} \to \text{sustituyendo en } \pi_2 \to$$

$\pi_2 \equiv 2(1+2t)+2(-1+2t)-(1-t)+19=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -2$; P'= (–3, –5, 3).

El centro del prisma es el punto medio de los vértices P' y R.

Ese punto es $C = \left(\frac{7-3}{2}, \frac{-7-5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ = (2, –6, 2).

40. País Vasco, junio 19

Ejercicio B2

Se consideran los puntos A(0, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(–1, –1, 2). ¿Están alineados? En caso afirmativo, hallar la ecuación de la recta que los contienen. En caso negativo, calcular el plano que los contiene.

Solución:

Los puntos A(0, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(–1, –1, 2) estarán alineados cuando los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$ tengan la misma dirección: sus coordenadas serán proporcionales.

$\boldsymbol{AB}$ = (1, 1, 1) – (0, 0, 1) = (1, 1, 0); $\boldsymbol{AC}$ = (–1, –1, 2) – (0, 0, 1) = (–1, –1, 1).

No son proporcionales, pues: $\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$.

El plano que contiene a los tres puntos viene determinado por el punto A y por los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$. Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-y=0.$$