# Solución de los Problemas Propuestos

**1**. Para cada una de las siguientes funciones halla su derivada y, después, da respuesta a la pregunta que se hace:

a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. ¿Para qué valores de $x$ la derivada es negativa?

d) $f(x) = xe^{x^2-1}$. ¿Decrece en algún punto?

Solución:

a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f´(x) = 3x^2 - x - 2$.

$$f´(x) = 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{1 \pm 7}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -1 \end{cases}.$$

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} \Rightarrow f´(x) = \frac{2\cdot\left(x^2+4\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2}$.

$$f´(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \Rightarrow j´(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$.

La derivada es negativa cuando $2x - 4 < 0 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$.

Puede verse que la función siempre está definida, pues $x^2 - 4x + 5 > 0$ para todo $x \in$ **R**.

d) $f(x) = xe^{x^2-1} \Rightarrow f´(x) = e^{x^2-1} + x\cdot 2xe^{x^2-1} = \left(1+2x^2\right)e^{x^2-1}$.

Como $f´(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2-1}$ siempre es positiva (es producto de dos factores positivos), la función es creciente en todo su dominio, que es **R**. Nunca es decreciente.

**2**. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 2$. Comprueba que tiene un mínimo en el vértice de la parábola. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

$$f(x) = 0,5x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f´(x) = x - 3.$$

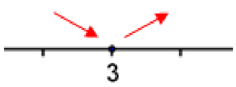
La derivada vale 0 si $x$ = 3.

Por tanto:

Si $x$ < 3, como $f´(x) < 0$, la función será decreciente.

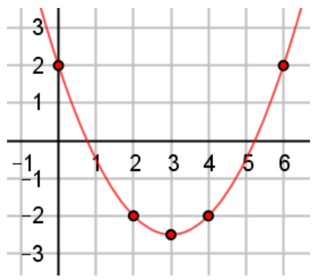
Si $x$ > 3, como $f´(x) > 0$, la función será creciente.

Luego, en $x$ = 3 se tiene un mínimo.




El vértice de la parábola se da en la abscisa $x = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{-3}{2\cdot 0,5} = 3$.

Dando algunos valores puede trazarse la gráfica adjunta.



**3**. Aplicando derivadas comprueba que el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se da en el punto de abscisa $x = -b/2a$.

Solución:

El vértice de una parábola es su punto máximo (si es cóncava ∩) o mínimo (si es convexa ∪).

El máximo o mínimo de una función se da cuando su derivada es 0.

Derivando e igualando a 0:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Para $a > 0$, si $x < -\frac{b}{2a}$, como $y' < 2a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + b \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ la función decrece; mientras que si $x > -\frac{b}{2a}$, se tendrá que $y' > 2a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + b \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ la función crece. Por tanto, en $x = -\frac{b}{2a}$ se tiene el mínimo.

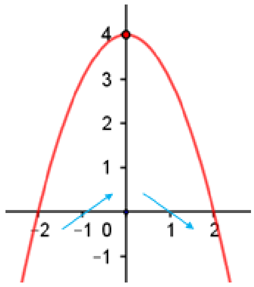
Para $a < 0$, sucede al revés; en $x = -\frac{b}{2a}$ se tendrá un máximo.

**4**. Aplicando derivadas calcula los vértices de las parábolas:

a) $y = -x^2 + 4$;  b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$;  c) $y = -2x^2 + 5x + 3$;  d) $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.

Solución:

El vértice se da en el punto en el que la derivada vale 0.

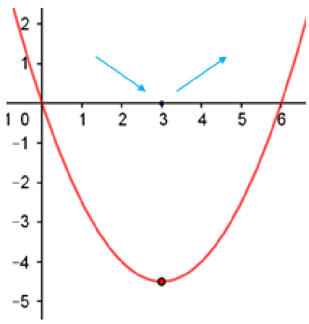


a) $y = -x^2 + 4 \Rightarrow y' = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \to$ el vértice es el punto $V(0, 4)$: es máximo.

En efecto:

- Si $x < 0$, $y' = -2x > 0 \to$ la función crece.
- Si $x > 0$, $y' = -2x < 0 \to$ la función decrece.

Luego, en $x = 0$ se tiene el máximo.



b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x \Rightarrow y' = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \to$

el vértice es el punto $V(3, -9/2)$: mínimo.

En efecto:

- Si $x < 3$, $y' = x - 3 < 0 \to$ la función decrece.
- Si $x > 3$, $y' = x - 3 > 0 \to$ la función crece.

Luego, en $x = 3$ se tiene el mínimo.

c) $y = -2x^2 + 5x + 3 \Rightarrow y' = -4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \to$ el vértice es el punto $V\left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right)$, máximo. (Compruébalo estudiando el signo de las derivadas laterales).

d) $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = -1 \to$ el vértice es el punto $V\left(-1, \frac{4}{3}\right)$, máximo.

**5**. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-6x$.

Solución:

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=6x^2-6=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

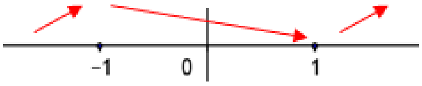
Si $x < -1$, (por ej. $x = -2$) $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $-1 < x < 1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

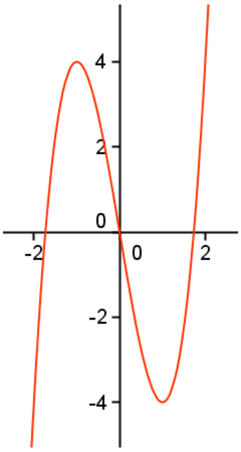
De lo anterior se deduce que en $x = -1$ se tiene un máximo.

Si $x > 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Se deduce que en $x = 1$ se tiene un mínimo.




Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.




**6**. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3+3x+1$. ¿Tiene la función algún máximo o mínimo? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3+3x+1=0$?

Solución:

Como su derivada $f'(x)=3x^2+3>0$ para todo $x$, la función es creciente en todo **R**.

No tiene máximos ni mínimos, pues la derivada nunca vale 0.

Como siempre es creciente solo puede tomar una vez el valor 0. Por tanto, la ecuación $x^3+3x+1=0$ solo tiene una solución.

(Podría indicarse, por ejemplo, que como $f(-1)=-3$ y $f(0)=1$, al ser creciente y continua, en algún punto del intervalo (–1, 0) tomará el valor 0. Esto está relacionado con una propiedad de las funciones continuas).

**7**. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^2-2x^3$. Da algunos de sus puntos, entre ellos los de corte de la gráfica con los ejes y haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

La función está definida para todo número real $x$.

1. Puntos de corte de la curva con los ejes de coordenadas.

Corte con el eje $OY$: se hace $x = 0 \to$ punto (0, 0).

Corte con el eje $OY$: se hace $y = 0 \to 0=3x^2-2x^3 \Rightarrow$

$$x^2(3-2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3/2 \end{cases}.$$

2. Puntos singulares.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=6x-6x^2 \to 6x-6x^2=0 \Rightarrow 6x(1-x)=0 \Rightarrow x=0; x=1.$$

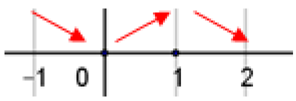
3. Crecimiento y decrecimiento

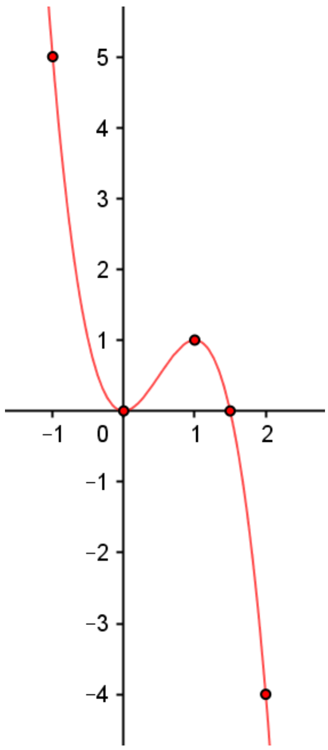
- Si $x < 0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un mínimo.

- Si $x > 1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un máximo.




4. Algunos puntos de su gráfica:

(–1, 5); (0, 0), mínimo; (1, 1), máximo; (3/2, 0); (2, –4).

**8**. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

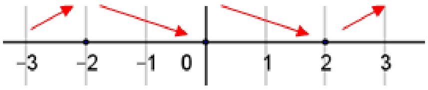
Derivando e igualando a 0:

$$f'(x) = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

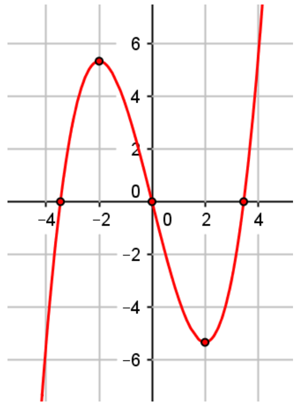
Si $x < -2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $-2 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

De lo anterior se deduce que en $x = -1$ se tiene un máximo.




Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente. Además, en $x = 2$ se tiene un mínimo.




Para hacer un esbozo de su gráfica, además de lo ya visto, conviene determinar (siempre que sea posible) los puntos de corte de la función con los ejes.

Corte con el eje $OY$: se hace $x = 0 \to$ punto (0, 0).

Corte con el eje $OY$: se hace $y = 0 \to 0 = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Rightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow$

$$x\left(x^2 - 12\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{12} \end{cases}.$$

Por tanto, algunos puntos de su gráfica son:

(–4, –16/3); $\left(-\sqrt{12},\ 0\right)$; (–2, 16/3), máximo; (0, 0); (2, –16/3), mínimo; $\left(\sqrt{12},\ 0\right)$; (4, 16/3).

La gráfica de la función es la adjunta.

**9**. Dada la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$, determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus puntos máximos y mínimos relativos.

Solución:

1. Se calculan los puntos singulares.

Se hace la derivada y se iguala a 0: $f'(x) = 4x^3 - 4x \to$

$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x = -1;\ x = 0;\ x = 1.$$

2. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

- Para $x < -1$, (por ej. $x = -2$) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-1 < x < 0$, (por ej. $x = -0{,}5$) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

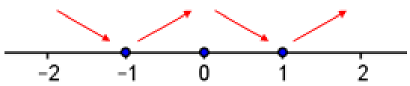
$\to$ En $x = -1$ se tiene un mínimo. Punto (–1, –2).

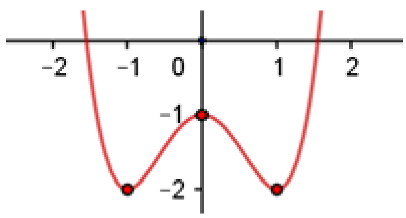
- Si $0 < x < 1$, (por ej. $x = 0{,}5$) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

$\to$ En $x = 0$ se tiene un máximo. Punto (0, –1).

- Si $x > 1$, (por ej. $x = 2$) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

$\to$ En $x = 1$ se tiene un mínimo. Punto (–1, –2).




Aunque no se pide, se da la gráfica. (Intenta dibujarla por tu cuenta).

**10**. Haz un esbozo de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, determinando sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.

Solución:

La función está definida siempre que $x\neq 3$.

En $x$ = 3 tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0}=\pm\infty$.

A la izquierda de $x$ = 3 toma valores grandes y negativos: $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$.

A la derecha de $x$ = 3 toma valores grandes y positivos: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$.

También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x-3}=2$ → recta $y$ = 2.

Para determinar el crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de su derivada.

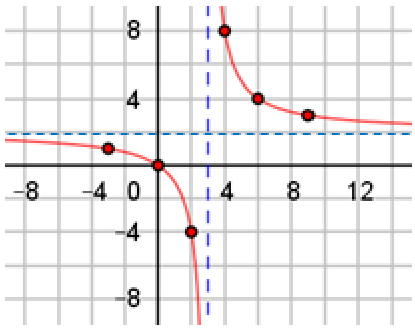
$$f(x)=\frac{2x}{x-3}\Rightarrow f´(x)=\frac{2(x-3)-2x\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{-6}{(x-3)^2}\rightarrow$$

$f´(x)<0$ en todo su dominio.

Por tanto, siempre es decreciente.

→ Algunos puntos:

(–3, 1); (0, 0); (2, –4); (4, 8); (6, 4); (9, 3).




**11**. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$. ¿Tiene máximos o mínimos?

Solución:

Derivando:

$$f(x)=\frac{3x}{x^2+1}\Rightarrow f´(x)=\frac{3\cdot(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}\rightarrow f´(x)=0 \text{ si } 3-3x^2=0\Rightarrow x=\pm 1.$$

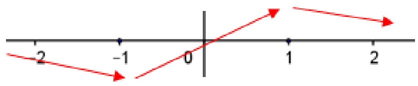
Por tanto:

- Si $x$ < –1 (por ejemplo –2), $f´(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si –1 < $x$ < 1 (por ejemplo 0), $f´(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.

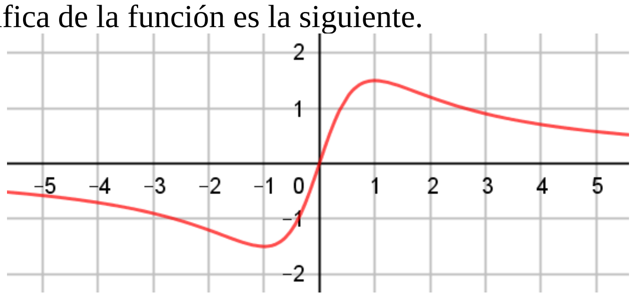
→ De lo anterior se deduce que en $x$ = –1 hay un mínimo.

- Si $x$ > 1 (por ejemplo 2), $f´(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente.

→ Se deduce que en $x$ = 1 se tiene un máximo.




Aunque no se pide, la gráfica de la función es la siguiente.



**12**. Representa gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$. Para ello:

a) Determina el dominio y las asíntotas, si existen.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

Solución:

a) La función no está definida cuando $2x-6=0 \Rightarrow x=3$. Luego, Dom($f$) = **R** – {3}.

En $x = 3$ la función tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{2x-6}=\left[\dfrac{9}{0}\right]=\infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues es una función racional que cumple que el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

La recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2x-6)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}=\frac{1}{2}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-6}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+3x}{2x-6}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{2x-6}\right)=\frac{3}{2}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

b) Crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos.

Derivando:

$$f'(x)=\frac{2x(2x-6)-x^2\cdot 2}{(2x-6)^2}=\frac{2x^2-12x}{(2x-6)^2}=\frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}\to$$

$f'(x)=0$ cuando $2x(x-6)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=6$.

Para determinar los intervalos de crecimiento debe tenerse en cuenta también el punto $x = 3$, donde $f$ no está definida. Estos intervalos son: $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$; $(3, 6)$; $(6, +\infty)$.

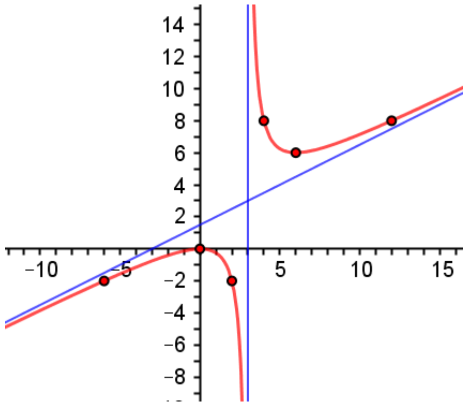
Con esto:

- Si $x < 0$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0 < x < 3$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

→ Como la función crece a la izquierda del 0 y decrece a su derecha, en $x = 0$ se da un máximo.

- Si $3 < x < 6$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x > 6$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

→ Se deduce que en $x = 6$ se da un mínimo.




Con la información anterior y hallando algunos puntos se puede trazar su gráfica.

Algunos puntos:

(–6, –2); (0, 0), máximo; (2, –2); (4, 8); (6, 6), mínimo; (12, 8).

**13**. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

<u>Solución</u>:

1. <u>Dominio</u>. La función no está definida en $x = 0$: Dom ($f$) = **R** – {0}.

2. <u>Asíntotas</u>. En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty$.

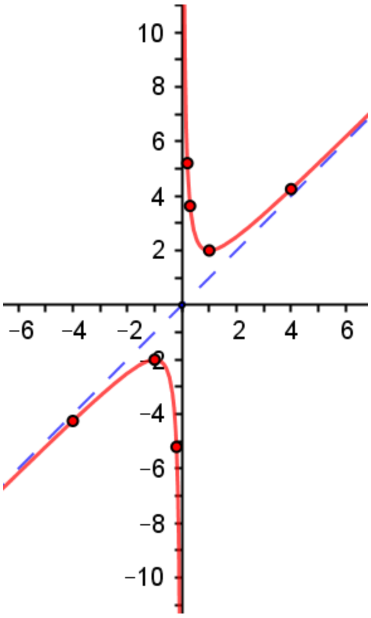
A la izquierda $x = 0$, cuando $x \to 0^-$, la función tiende hacia –∞; por la derecha, si $x \to 0^+$, la función tiende hacia +∞.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador.

Y como $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, se deduce que la recta $y = x$ es la asíntota.

3. <u>Crecimiento y decrecimiento</u>. Derivando:

$$f´(x) = \frac{2x\cdot x - \left(x^2+1\right)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$ → se anula en $x = -1$ y $x = 1$.



Para determinar los intervalos de crecimiento debe tenerse en cuenta también el punto $x = 0$, donde $f$ no está definida.

Con esto:

- Si $x < -1$, como $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-1 < x < 0$, como $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

→ Como la función crece a la izquierda de –1 y decrece a su derecha, en $x = -1$ se da un máximo.

- Si $0 < x < 1$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x > 1$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

→ Se deduce que en $x = 1$ se tiene el mínimo.

4. Con la información obtenida y dando algunos valores se puede trazar su gráfica. Algunos puntos:

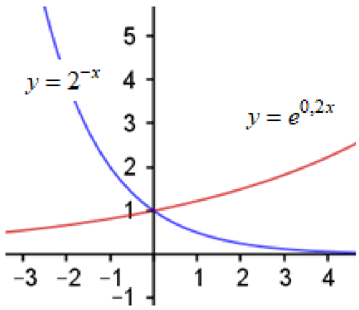
(–4, –17/4); (–1, –2), máximo; (–0,2, –5,2); (0,2, 5,2); (0,3, 3,63); (1, 2), mínimo; (4, 17/4).

**14**. Comprueba que las funciones exponenciales del tipo $f(x) = a^{kx}$ cumplen:

son crecientes si $k > 0$; son decreciente si $k < 0$. Verifícalo para los casos $f(x) = e^{0,2x}$ y $f(x) = 2^{-x}$.

<u>Solución</u>:

La derivada de $f(x) = a^{kx}$ es $f´(x) = k\cdot a^{kx}$.




Como $a^{kx} > 0$, se tendrá:

- Si $k > 0$, $f´(x) = k\cdot a^{kx} = (+)\cdot(+) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $k < 0$, $f´(x) = k\cdot a^{kx} = (-)\cdot(+) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Para el caso $f(x) = e^{0,2x}$, su derivada es $f´(x) = 0,2\cdot e^{0,2x} > 0$ para todo $x \in$ **R**. Por tanto, es creciente siempre.

Y para $f(x) = 2^{-x}$, como su derivada es $f´(x) = -2^{-x}\cdot \ln 2 < 0$ para todo $x \in$ **R**, la función decrece en todo **R**.

<u>Observación</u>. La recta $y = 0$, el eje $OX$, es asíntota horizontal de ambas funciones. En el primer caso, hacia –∞; en el segundo, hacia +∞.

**15**. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{-x^2}$. ¿Tiene algún extremo relativo?

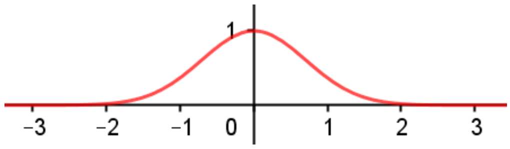
Solución:

Derivando e igualando a 0:

$$f(x)=e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xe^{-x^2} \to -2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow x=0.$$

Con esto:

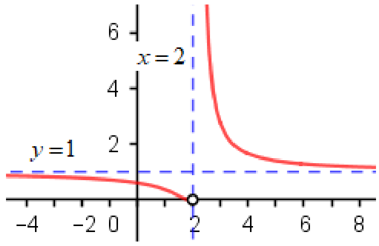
- Si $x<0$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x>0$, como, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Se deduce que en $x = 0$ la función tiene un máximo.




Su gráfica es una campana de Gauss.

Observación: Esta función tiene como asíntota horizontal el eje *OX*.

**16**. La gráfica de la función $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ es la adjunta. (En el Tema 15 se vio que las rectas $x = 2$ e $y = 1$ son asíntotas).
Comprueba que la función es decreciente en todo su dominio.




Solución:

Repito lo escrito en el Tema 15.
Es continua para todo $x \neq 2$, punto en el que no está definida.
Es fácil ver que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

En efecto: $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0\right]=1$; y $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[e^{\frac{1}{-\infty}}=e^0\right]=1$.

También puede verse que tiene una asíntota vertical, la recta $x = 2$, situada a la izquierda de la curva, cuando $x \to 2^+$, pues:

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[e^{\frac{1}{2^+-2}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}\right]=+\infty \text{; en cambio, } \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[e^{\frac{1}{2^--2}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}\right]=0.$$

Para ver que es decreciente hay que comprobar que su derivada es negativa en todo su dominio.
En efecto,

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'\cdot e^{\frac{1}{x-2}}=-\frac{1}{(x-2)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-2}} \equiv (-)\cdot(+)\cdot(+) \equiv (<0).$$

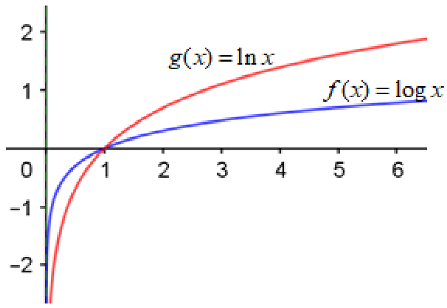
**17**. Comprueba que las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=\ln x$ son crecientes en todo su dominio.

Solución:

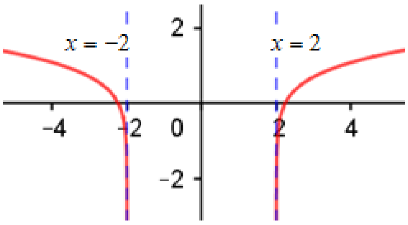
Ambas funciones están definidas para $x > 0$.
Sus derivadas son:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log e \text{ y } g'(x)=\frac{1}{x},$$

que son positivas si $x > 0$.




La recta $x = 0$ es asíntota vertical por la izquierda.




**18**. La gráfica de la función $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ es la adjunta.

Comprueba que su crecimiento y decrecimiento se ajusta a esta gráfica.

Solución:

La función está definida cuando $x^2-4>0$; esto es, cuando $x\in(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la curva.

Derivando:

$$f(x)=\log\left(x^2-4\right)\ \to\ f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}\log e.$$

Con esto, y tal como se ve en la gráfica dada:

Si $x < -2$, como $f'(x)<0\ \Rightarrow\ f(x)$ decrece.

Si $x > 2$, como $f'(x)>0\ \Rightarrow\ f(x)$ crece.

**19**. La suma de los cuadrados de dos números positivos $x$ e $y$ vale 128. Calcula dichos números para que su producto $x\cdot y$ sea máximo.

Nota: Si se decide retrasar el estudio de Optimización de funciones para el siguiente curso, todos estos problemas, del n. 19 hasta el final, podrían utilizarse en ese momento.

Solución:

Se sabe que $x^2+y^2=128\Rightarrow\ y=\sqrt{128-x^2}$.

Por tanto, su producto: $x\cdot y=x\cdot\sqrt{128-x^2}=\sqrt{128x^2-x^4}$.

La función que hay que optimizar es $P(x)=\sqrt{128x^2-x^4}$. Su máximo, si existe, se dará en una solución de $P'(x)=0$.

Derivando respecto a $x$:

$$P'(x)=\frac{256x-4x^3}{2\sqrt{128x^2-x^4}}\ \Rightarrow\ P'(x)=0\ \text{cuando}\ 256x-4x^3=0\Rightarrow 4x\left(64-x^2\right)=0.$$

Se obtienen tres soluciones: $x = 0$, $x = -8$ y $x = 8$. (Las dos primeras se descartan, pues deben ser números positivos).

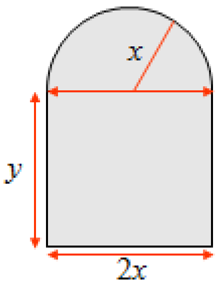
Para determinar si en $x = 8$ se da el máximo buscado, se estudia el crecimiento y decrecimiento en un entorno de ese valor.

- Para $x < 8$, (por ejemplo, $x = 7$) $P'(x)>0\ \to$ el producto crece.
- Para $x > 8$, (por ejemplo, $x = 9$) $P'(x)<0\ \to$ el producto decrece.

Luego el máximo buscado se da cuando $x = 8$; lo que implica que $y$ también vale 8.

**20**. Una ventana con arco de medio punto tiene un perímetro de 5 metros. ¿Cuánto debe medir de ancha para que deje pasar el máximo de luz?

Solución:




La ventana, formada por un rectángulo y por un semicírculo, dejará pasar más luz cuando su superficie sea máxima.

Si la base del rectángulo es $2x$ y la altura $y$, la suma de las áreas del semicírculo y del rectángulo será: $S=\frac{1}{2}\cdot\pi x^2+2xy$

El perímetro es la suma: ancho de la ventana + altura de las dos jambas + longitud del arco. Si vale 5 m $\Rightarrow\ 2x+2y+\pi x=5$

Despejando la incógnita *y*, $y = \dfrac{5-2x-\pi x}{2}$; y sustituyendo en la función área se tiene:

$$S(x) = \frac{\pi x^2}{2} + x(5-2x-\pi x) = \frac{10x-4x^2-\pi x^2}{2}.$$

El máximo de *S*, si existe, se obtiene en la solución de $S´ = 0$.

$$S´(x) = \frac{10-x(8+2\pi)}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{8+2\pi} \approx 0,7 \text{ m.}$$

Para $x < \dfrac{10}{8+2\pi}$, (por ejemplo, $x$ = 0,1), $S´(x) > 0$, luego *S* crece; y para $x > \dfrac{10}{8+2\pi}$, (por ej., $x$ = 1), $S´(x) < 0 \Rightarrow S$ decrece. Por tanto, para ese valor de *x* se tiene la superficie máxima.

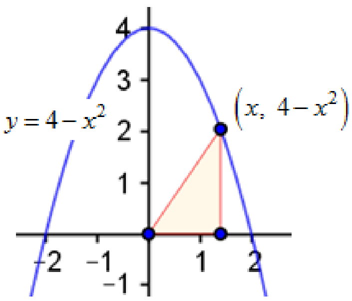
El ancho de la ventana será $2x \approx$ 1,4 m. El radio del arco será de 0,7 m.

La longitud de las jambas debe ser $y \approx \dfrac{5-2\cdot 0,7-\pi\cdot 0,7}{2} = 0,7$ m.

**21**. En un triángulo rectángulo contenido en el primer cuadrante, los vértices que determinan la hipotenusa están, uno en el origen de coordenadas y el otro sobre la parábola de ecuación $y = 4-x^2$. Uno de sus catetos se apoya en el eje *OX* y el otro es paralelo al eje *OY*. Determina la longitud de sus lados si se desea que tenga área máxima. ¿Cuánto mide esa área?

<u>Solución</u>:

El triángulo es el que se muestra en la figura.




Tiene de base *x*; y de altura *y*, siendo $y = 4-x^2$.

Su área será: $S = \dfrac{x\cdot(4-x^2)}{2} = \dfrac{4x-x^3}{2}$.

El máximo de *S*, si existe, se obtiene en alguna de las soluciones de $S´ = 0$.

$$S´ = \frac{4-3x^2}{2} \to S´ = 0 \text{ si } 4-3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Como debe ser del primer cuadrante solo se acepta $x = +\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Para comprobar que la solución es máxima se estudia el signo de las derivadas laterales en ese punto.

Para $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, (por ej. $x$ = 1), $S´ > 0 \to$ la superficie crece.

Para $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < 2$, (por ej. $x$ = 1,5), $S´ < 0 \to$ la superficie decrece.

Por tanto, cuando $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ se tendrá el máximo buscado.

Los catetos valen: $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $y = 4-\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{8}{3}$.

La hipotenusa: $\sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{64}{9}} = \sqrt{\dfrac{76}{9}} = \dfrac{2\sqrt{19}}{3}$.

El área valdrá: $S = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$ u$^2$.

**22**. Dada la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$, halla los valores de *b* y *c* para que su vértice sea el punto (2, 1).

Solución:

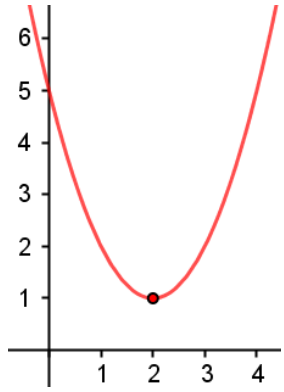
Como el coeficiente de $x^2$ es positivo (*a* = 1), el vértice es el mínimo de la función $y = f(x) = x^2 + bx + c$.

Por tanto, el punto (2, 1) debe cumplir:

- $f(2) = 1 \Rightarrow 4 + 2b + c = 1$
- $f'(2) = 0 \Rightarrow (f'(x) = 2x + b) \Rightarrow 4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $4 - 8 + c = 1 \Rightarrow c = 5$.

La ecuación buscada es $y = x^2 - 4x + 5$.




Observación: Si se traza su gráfica se ve que, efectivamente, en el punto (2, 1) tiene el mínimo; el vértice.

**23**. El número de personas, en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por:

$N(x) = \dfrac{15x}{x^2 + 25}$, siendo *x* el tiempo transcurrido en días desde que se inició el contagio.

a) Halla el día con el máximo número de enfermos y su número.

b) ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá extinguiendo con el transcurso del tiempo?

Solución:

a) El máximo, si existe, se da en algún punto en el que la derivada valga 0.

Derivando:

$$N(x) = \frac{15x}{x^2 + 25} \Rightarrow N'(x) = \frac{15\cdot\left(x^2 + 25\right) - 15x\cdot 2x}{\left(x^2 + 25\right)^2} = \frac{-15x^2 + 375}{\left(x^2 + 25\right)^2}.$$

La derivada se anula en las soluciones de $-15x^2 + 375 = 0 \Rightarrow x^2 = 25$, que son: *x* = –5 y *x* = 5.

(La solución *x* = –5 no se puede tomar en consideración, pues $x \geq 0$).

Con esto:

- Si $0 < x < 5$, como $N'(x) > 0 \Rightarrow N$ es creciente: el número de enfermos aumenta.
- Si $x > 5$, como $N'(x) < 0 \Rightarrow N$ es decreciente: el número de enfermos disminuye.

Ese día, el número de enfermos fue de $N(5) = \dfrac{15\cdot 5}{25 + 25} = 1,5 \to$ 1500 enfermos.

b) Con el transcurso del tiempo (cuando *x* se hace cada vez mayor), el número de enfermos tiende a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{15x}{x^2 + 25} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15}{x} = 0 \to \text{la enfermedad se extinguirá.}$$

**24**. Sea $C(x) = 180x + 12000$ la función que da los costes (mensuales) de producción de un número *x* de patinetes eléctricos. La empresa vende todos los patinetes que fabrica; y sus ingresos mensuales vienen dados por la función $I(x) = 500x - \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Halla la función que da los beneficios de la empresa.

b) ¿En qué intervalo debe situarse la producción para no perder dinero?

c) ¿Cuántos patinetes tiene que producir mensualmente la empresa para obtener el máximo beneficio? En ese caso, ¿cuánto gana por cada patinete?

Solución:

a) La función de beneficios (ingresos – gastos) es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2 - 180x - 12000 \Rightarrow B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000$$

b) No se pierde dinero cuando los beneficios no son negativos: $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000 \geq 0$ .

Resolviendo la ecuación asociada: $-\frac{1}{2}x^2 + 320x - 12000 = 0 \rightarrow x = 40$ y $x = 600$.

Luego $B(x) = -\frac{1}{2}(x-40)(x-600) \geq 0$ cuando $x \in [40, 600]$.

Para no perder dinero, deben fabricarse entre 40 y 600 patinetes.

c) Derivando e igualando a 0:

$B'(x) = -x + 320 = 0 \Rightarrow x = 320$.

Para $x < 320$, $B'(x) > 0$, luego los beneficios crecen.

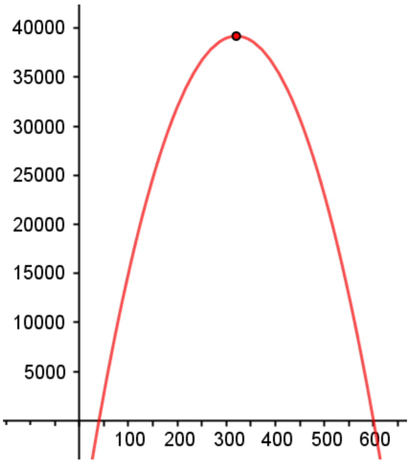
Para $x > 320$, $B'(x) < 0$, luego los beneficios decrecen.

Por tanto, para $x = 320$ los beneficios serán máximos.

Esos beneficios máximos serán:

$$B(320) = -\frac{1}{2} \cdot 320^2 + 320 \cdot 320 - 12000 = 39200 \text{ euros.}$$

La ganancia por unidad será: 39200/320 = 122,5 €.




Observación: La función de beneficios es una parábola. Los beneficios no serán negativos cuando su gráfica esté por encima del eje *OX*; serán máximos en el vértice: punto (320, 39200).

**25**. Los costes de fabricación de un tipo de ordenador vienen dados por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$ , siendo $x$ el número de ordenadores fabricados y vendidos.

Si cada ordenador se vende a un precio de 490 €, determina:

a) La función de beneficios.

b) ¿Cuántos ordenadores se deben vender para que los beneficios sean máximos? ¿A cuánto ascienden esos beneficios máximos?

Solución:

a) Si se venden $x$ ordenadores a 490 € cada uno, los ingresos serán: $I(x) = 490x$ .

Y la función de beneficios:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 490x - \left(x^2 + 40x + 30000\right) \Rightarrow B(x) = -x^2 + 450x - 30000.$$

b) Derivando e igualando a 0:

$B'(x) = -2x + 450 = 0 \Rightarrow x = 225$.

Para $x < 225$, $B'(x) > 0$, luego los beneficios crecen.

Para $x > 225$, $B'(x) < 0$, luego los beneficios decrecen.

Por tanto, para $x = 225$ los beneficios serán máximos.

Esos beneficios máximos ascienden a:

$$B(225) = -225^2 + 450 \cdot 225 - 30000 = 20625 \text{ euros.}$$