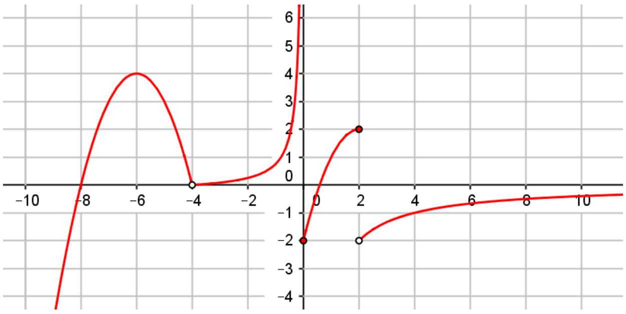
Solución de los Problemas Propuestos

1. La gráfica de la función $f(x)$ es la adjunta. Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:



a) $\lim_{x\to -4} f(x)$; b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

¿En qué puntos es discontinua? ¿Es evitable la discontinuidad en alguno de esos puntos?

¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, indícalas.

Solución:

a) $\lim_{x\to -4} f(x) = 0$. Aunque la función no está definida en $x = -4$, el valor de la función se acerca a 0 por ambos lados: por la izquierda y por la derecha.

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Cuando $x \to 0^-$, la función toma valores cada vez mayores.

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$.

Es obvio que en $x = 0$ la función no tiene límite: los límites laterales deben existir y ser iguales.

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe (no coinciden los límites laterales): $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2$.

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. La función toma cada vez valores más grandes y negativos.

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. La función se acerca cada vez más al eje OX.

- La función es discontinua en los puntos $x = -4$, $x = 0$ y $x = 2$.

En $x = -4$, por no estar definida; en $x = 0$ y en $x = 2$, por no existir límite.
La discontinuidad puede evitarse en $x = -4$, definiendo $f(-4) = 0$.

- La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$: a la izquierda de $x = 0$, cuando $x \to 0^-$, la curva se va al infinito, pegándose cada vez más a la recta.

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$: cuando $x \to +\infty$, la curva se acerca cada vez más a la recta.

2. Halla, por sustitución (si se puede), el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3}\left(4x^2-7x+2\right)$; b) $\lim_{x\to -1}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; d) $\lim_{x\to -1}\frac{4x+4}{x^2-1}$.

Si en algún caso no se puede determinar el límite directamente, intenta hallarlo con la calculadora.

Solución:

Sustituyendo se obtiene:

a) $\lim_{x\to -3}\left(4x^2-7x+2\right) = 4\cdot(-3)^2-7\cdot(-3)+2 = 36+21+2 = 59$.

b) $\lim_{x\to -1}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{-3\cdot(-1)+2}{2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1} = \frac{5}{0} = \pm\infty$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{2}{1} = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x+4}{x^2-1}=\dfrac{4\cdot(-1)+4}{(-1)^2-1}=\dfrac{0}{0}=¿?$

En ese caso, dando valores próximos a −1, por la izquierda y derecha, se tiene:

	$x\to -1^-$				$-1^+ \leftarrow x$		
x:	−1,1	−1,01	−1,001	… …	−0,999	−0,99	−0,9
$f(x)$:	−1,9048	−1,9900	−1,9990	$\to -2 \leftarrow$	−2,0001	−2,0101	−2,1053

Por ambos lados la función se acerca cada vez más a −2; por tanto, puede concluirse que $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x+4}{x^2-1}=-2$.

3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}e^{2x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2+xe^{x-2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log\dfrac{20}{3x-1}\right)$; g) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\cos(2x+\pi)\right)$; h) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\cdot 6-3}=\sqrt{9}=3$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3x-1}=\sqrt{-3-1}$. Este límite no existe: la función no está definida para los puntos próximos a $x=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=0$. Este límite solo existe por la derecha de $x = 2$; esto es $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}$. Para valores de x próximos a 2, pero menores que 2, la función no está definida.

d) $\lim\limits_{x\to -1}e^{2x+2}=e^{2\cdot(-1)+2}=e^0=1$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2+xe^{x-2}\right)=2+3e^{3-2}=2+3e$.

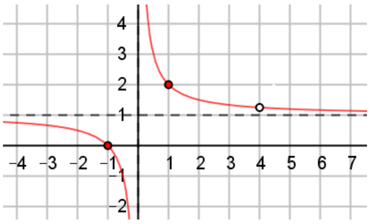
f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log\dfrac{20}{3x-1}\right)=\log\dfrac{20}{3\cdot 1-1}=\log 10=1$.

g) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\cos(2x+\pi)\right)=\cos(2\pi+\pi)=\cos(3\pi)=-1$.

h) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{2}=\infty$. En este caso puede convenir distinguir el comportamiento de $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}$ cuando $x\to\pi^-$ y cuando $x\to\pi^+$. Esta distinción puede hacer con la calculadora, observándose que:

- para $x < \pi$, por ejemplo, $x = 3,1$, $f(3,1)=\tan\dfrac{3,1}{2}\approx 48,08$ $\to$ la función toma valores muy grandes y positivos. Se cumple que $\lim\limits_{x\to \pi^-}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi^-}{2}=+\infty$.

- para $x > \pi$, por ejemplo, $x = 3,2$, $f(3,2)=\tan\dfrac{3,2}{2}\approx -34,23$ $\to$ la función toma valores muy grandes y negativos. Se cumple que $\lim\limits_{x\to \pi^+}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi^+}{2}=-\infty$.



4. a) Halla el límite de $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}$ en los puntos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$. ¿A cuánto tiende la función cuando $x \to \pm\infty$?
Confirma tus resultados sabiendo que su gráfica de es la adjunta.
b) Indica los puntos de discontinuidad de la función. Si alguna de sus discontinuidades es evitable, ¿cómo se evitaría?

Solución:

a) Como es una función racional pueden presentarse dificultades cuando el denominador se hace 0.

- Si $x \to -1$: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{1+3-4}{1+4}=\dfrac{0}{5}=0$.

Gráficamente se ve que cuando $x \to -1$, la función se acerca a 0.

- Si $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{-4}{0}=\pm\infty$.

Como se observa en la gráfica, la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

- Si $x \to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{1-3-4}{1-4}=\dfrac{-6}{-3}=2$. Efectivamente, en la gráfica se ve que $f(1)=2$.

- Si $x \to 4$: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\left[\dfrac{16-12-4}{16-16}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+1)}{x(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{5}{4}$.

Aunque la función no está definida en $x = 4$, gráficamente se ve que por ambos lados se acerca a 5/4.

- Si $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. (La recta $y = 1$ es asíntota horizontal).

b) La función es discontinua en los ceros del denominador: $x = 0$ y $x = 4$.

La discontinuidad puede evitarse en $x = 4$, pues existe el límite; se evitaría definiendo $f(4)=\dfrac{5}{4}$.

En $x = 0$ no puede evitarse, pues en ese punto no existe límite.

5. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$. Halla, justificando el resultado, el valor del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, 1, –4 e ∞. ¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, da su ecuación o ecuaciones.

Solución:

Sustituyendo en cada caso:

- Si $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\dfrac{0-16}{0+0-4}=4$.

- Si $x \to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\dfrac{1-16}{1+3-4}=\dfrac{-15}{0}=\pm\infty$.

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ la función tiene una asíntota vertical: la recta $x = 1$.

- Si $x \to -4$: $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{-8}{-5}=\dfrac{8}{5}$.

- Si $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to \infty}(1)=1$.

Como $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=1 \Rightarrow$ la función tiene una asíntota horizontal: la recta $y = 1$.

6. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}$; b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$; c) $\lim_{x\to 5}\frac{4x-20}{x^2-5x}$; d) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$;

e) $\lim_{x\to 6}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}$; f) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x+1}$; g) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2}{x^2-5x}$; h) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+2x^2-10x}{x^2-5x}$.

Solución:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}=\frac{3-3}{1+5-6}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ descomponiendo en factores: $\begin{cases}3x-3=3(x-1)\\ x^2+5x-6=(x-1)(x+6)\end{cases}\to$

$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{x+6}=\frac{3}{7}$.

b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}=\frac{-8+6+2}{4-6+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{9}{-1}=-9$.

La igualdad $x^3-3x+2=(x+2)(x^2-2x+1)$ se obtiene dividiendo por Ruffini.

Lo mismo puede hacerse con el denominador: $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

c) $\lim_{x\to 5}\frac{4x-20}{x^2-5x}=\frac{20-20}{25-25}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ (Sacando factor común) $=\lim_{x\to 5}\frac{4\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x-5)}}=\lim_{x\to 5}\frac{4}{x}=\frac{4}{5}$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-1}=\frac{3-4+1}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x+1}=\frac{2}{2}=1$.

e) $\lim_{x\to 6}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}=\frac{18-3}{36+30-6}=\frac{15}{0}\to\infty$;

f) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{1-3}{-1+1}=\frac{-2}{0}=\pm\infty$. Puede verse que $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x}{x+1}=\frac{1-3^-}{-1^-+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$; mientras que $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3x}{x+1}=-\infty$.

g) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2}{x^2-5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x^2-2x)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-2x}{x-5}=\frac{0}{-5}=0$.

h) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+2x^2-10x}{x^2-5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x^2+2x-10)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+2x-10}{x-5}=\frac{-10}{-5}=2$.

7. Justifica que $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$, en los casos:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+4x}{2x^2+3}$; b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3+4x}{5-2x}$; c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x}{5x^2+1}$; d) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x}{2x^4-3x^2+1}$.

Solución:

Un procedimiento para justificar el resultado indicado consiste en dividir el numerador y el denominador de la función dada por la mayor potencia de *x* presente en la expresión. Además, en todos los casos se tendrán en cuenta los signos.

a) Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+4x}{2x^2+3}$ pueden dividirse el numerador y el denominador por x^2. Así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+4x}{2x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=(\text{simplificando})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x^2}}=-\frac{3}{2}\text{, pues }\frac{4}{x}\text{ y }\frac{3}{x^2}\to 0\,.$$

b) Para calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3+4x}{5-2x}$, dividiendo numerador y de nominador por *x*, se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+4x}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3+4x}{x}}{\frac{5-2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+4}{\frac{5}{x}-2}=\frac{4}{-2}=-2\text{, pues }\frac{3}{x}\text{ y }\frac{5}{x}\to 0\,.$$

c) Igualmente, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x}{5x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1+0}{0^-+0^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\,.$

d) Dividiendo cada término de la expresión por x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x}{2x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{5x}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0-0}{2-0+0}=\frac{0}{2}=0\,.$$

8. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

<u>Solución</u>:

Recuerda:

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, entonces la recta *x* = *a* es una <u>asíntota vertical</u> de la curva $y=f(x)$.

(Las funciones racionales *pueden* tener asíntotas en los puntos que anulan el denominador).

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ se concluye que la recta *y* = *l* es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$.

(Las funciones racionales tienen asíntotas horizontales cuando el grado del denominador es igual o mayor que el grado del numerador).

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ → Dom (*f*) = **R** – {3}. En *x* = 3 tiene una asíntota vertical.

En efecto:

$$\lim_{x\to3}\frac{2x}{x-3}=\frac{6}{3-3}=\frac{6}{0}=\pm\infty\,.$$

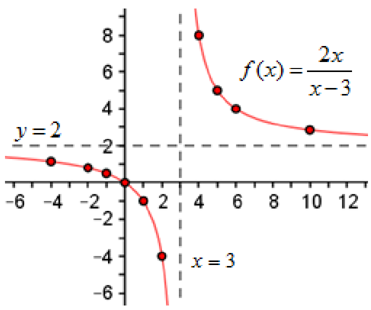
La asíntota es la recta *x* = 3.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

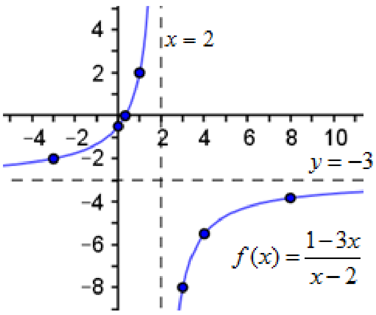
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\infty}2=2\,.$$

La asíntota es la recta *y* = 2.

Su gráfica es la adjunta.



b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ → Dom (*f*) = **R** – {2}. En $x = 2$ tiene una asíntota vertical.



En efecto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-3x}{x-2}=\frac{1-6}{2-3}=\frac{-5}{0}=\pm\infty\ .$$

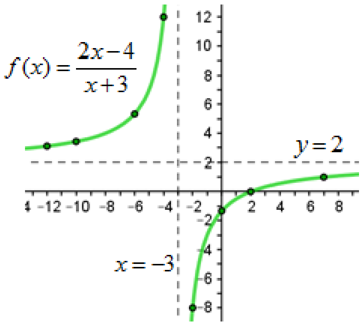
La asíntota es la recta $x = 2$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x}=\lim_{x\to\infty}(-3)=-3.$$

La asíntota es la recta $y = –3$.

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$ → Dom (*f*) = **R** – {–3}. En $x = –3$ tiene una asíntota vertical.



En efecto: $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{2x-4}{x+3}=\frac{-6-4}{-3+3}=\frac{-10}{0}=\pm\infty$.

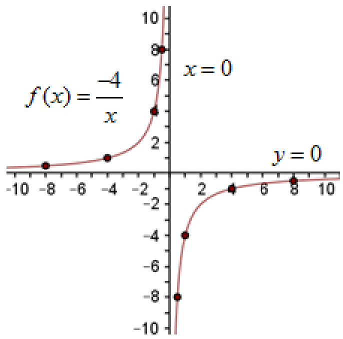
La asíntota es la recta $x = –3$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\infty}2=2\ .$$

La asíntota es la recta $y = 2$.

d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$ → Dom (*f*) = **R** – {0}.



En $x = 0$ tiene una asíntota vertical.

En efecto:

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-4}{x}=\frac{-4}{0}=\pm\infty$. La asíntota es la recta $x = 0$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x}=\frac{-4}{\infty}=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

Su gráfica es la adjunta.

9. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$; b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x(x-4)}$; d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$;

<u>Solución</u>:

En el problema anterior se recordó el criterio para hallar las asíntotas de una función racional.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$ → Dom (*f*) = **R** – {–3, 3}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = –3$: $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{2x}{x^2-9}=\frac{-6}{9-9}=\frac{-6}{0}=\pm\infty\ \Rightarrow$ la recta $x = –3$ es asíntota vertical.

En $x = 3$: $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x^2-9}=\frac{6}{9-9}=\frac{6}{0}=\pm\infty\ \Rightarrow$ la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x+2}\to$ Como $x^2+3x+2=0$ si $x = -2$ o $x = -1 \Rightarrow$ Dom (f) = **R** – {–2, –1}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = -2$: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\left[\frac{-2+2}{4-6+2}=\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-2}\frac{\cancel{x+2}}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$.

Como existe límite (no vale ∞), en este punto no hay asíntota vertical. (Se trata de una discontinuidad evitable).

En $x = -1$: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\frac{-1+2}{1-3+2}=\frac{1}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = -1$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow$ La asíntota es la recta $y = 0$.

c) $f(x)=\frac{2x^2}{x(x-4)}$ no está definida en los puntos $x = 0$ y $x = 4$. En esos puntos puede tener una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{x(x-4)}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{(x-4)}=\frac{0}{-4}=0 \Rightarrow$ En $x = 0$ no hay asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2}{x(x-4)}=\frac{32}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 4$ es asíntota vertical.

También tiene una asíntota horizontal, pues

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(x-4)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}2=2 \Rightarrow$ la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}\to$ Dom (f) = **R** – {1, 2}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1+1}{(-1)\cdot0}=\frac{2}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\frac{4+1}{0\cdot1}=\frac{5}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}1=1 \Rightarrow$ La asíntota es la recta $y = 1$.

10. Halla la asíntota oblicua de la función $f(x)=\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+2}$.

<u>Solución</u>:
Como el grado del numerador es igual a (1 + el grado del denominador) , la función tiene una asíntota oblicua.
Puede determinarse de dos formas.

1) Mediante límites.

Si su ecuación es la recta $y = mx + n$, entonces: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right)$, con $m \neq 0$ e ∞, y $n \neq \infty$.

Esto es:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 + 2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 1 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2} \right) \Rightarrow$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2} \right) = -2.$$

La asíntota es la recta $y = x - 2$.

2) Haciendo la división $\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

$$\begin{array}{rrrl|l} x^3 & -2x^2 & & +1 & x^2+2 \\ \hline -x^3 & & -2x & & x-2 \\ & -2x^2 & -2x & & \\ & 2x^2 & & +4 & \\ \hline & & -4x & +5 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = \boxed{x-2} + \frac{-4x+5}{x^2+2}.$$

Como para valores grandes de x, cuando $x \to \infty$, el sumando $\frac{-4x+5}{x^2+2} \to 0$, se deduce que la función se acerca cada vez más al valor $y = x - 2$, que es la ecuación de una recta:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \left(x - 2 + \frac{-4x+5}{x^2+2} \right) = \lim_{x\to\infty} (x-2) + \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-4x+5}{x^2+2} \right).$$

Esto es, $f(x) \to y = x - 2$, luego la recta $\boxed{y = x - 2}$ es asíntota oblicua de $f(x)$.

Además, este procedimiento permite determinar fácilmente la posición de la curva respecto de la su asíntota, pues:

Si $x \to -\infty$, el término $\frac{-4x+5}{x^2+2} \to 0^+$ (compruébalo) $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = x - 2 + 0^+$,

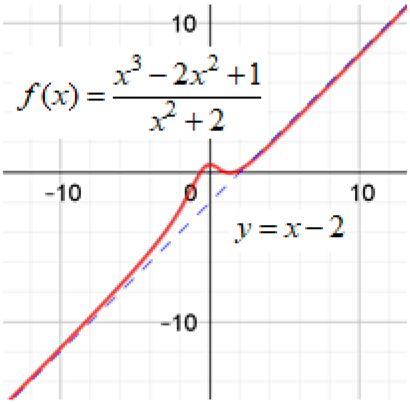
que indica que la función es algo mayor que la recta: luego, hacia $-\infty$, la curva va por encima de la recta.

Si $x \to +\infty$, el término $\frac{-4x+5}{x^2+2} \to 0^-$ (compruébalo) $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = x - 2 + 0^-,$$

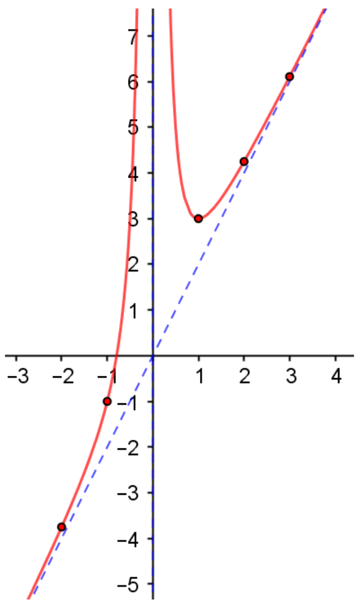
que indica que la función es algo menor que la recta: luego, hacia $+\infty$, la curva va por debajo de la recta.

Su gráfica es la adjunta.



11. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Solución:
La función no está definida en $x = 0$: Dom (f) = **R** – {0}.



En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+1}{x^2}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0 la función tiende hacia +∞; luego, la curva se pega, por ambos lados, al semieje positivo *OY*.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador. Su ecuación es la recta $y=mx+n$, siendo

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$, con m y $n\neq\infty$.

Esto es: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+1}{x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)=2$;

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

La asíntota es la recta $y=2x$.

Como $f(x)-y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}-2x=\dfrac{1}{x^2}$, se deduce que la función siempre va por encima de la asíntota.

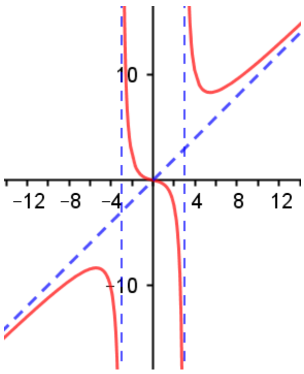
Se hace un esbozo de su gráfica dando algunos valores y teniendo en cuenta la posición de la curva respecto a sus asíntotas.
Algunos valores:
(–2, –15/4); (–1, –1); (1, 3); (2, 17/4); (3, 55/9); …

12. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-9}$; b) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+6}{x-2}$.

Solución:
a) La función no está definida en $x = \pm 3$: Dom (f) = **R** – {–3, 3}.
En $x = –3$ y en $x = 3$ tiene sendas asíntotas verticales, pues:

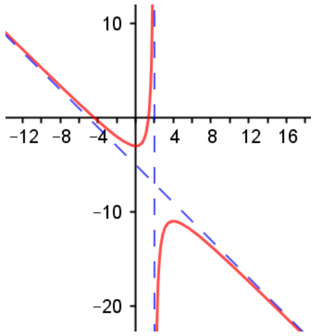
$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x}{x^2-9}=\frac{-33}{0}=\pm\infty \text{ y } \lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x}{x^2-9}=\frac{33}{0}=\pm\infty.$$



También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador. Su ecuación puede obtenerse haciendo la división $\dfrac{x^3+2x}{x^2-9}$.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & +2x & x^2-9 \\ \cline{3-3} -x^3 & +9x & \boxed{x} \\ \hline & 11x & \end{array} \Rightarrow f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-9}=x+\frac{11x}{x^2-9}.$$

Luego, la asíntota oblicua es la recta $\boxed{y=x}$.



b) La función $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+6}{x-2}$ no está definida en $x = 2$.

En $x = 2$ tiene una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-3x+6}{x-2}=\frac{-4}{0}=\pm\infty .$$

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es 1 + el grado del denominador. Su ecuación puede obtenerse haciendo la división $\dfrac{-x^2-3x+6}{x-2}$.

Por Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & -3 & 6 \\ 2 & & -2 & -10 \\ \hline & -1 & -5 & -4 \end{array} \quad \Rightarrow f(x)=\frac{-x^2-3x+6}{x-2}=\boxed{-x-5}-\frac{4}{x-2}.$$

Luego, la asíntota oblicua es la recta $\boxed{y=-x-5}$.

13. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{x/2}}{1+x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

<u>Solución</u>:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^0}{1}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{-1/2}}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=\dfrac{0}{-\infty}=0 \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{+\infty}}{+\infty}=+\infty$. $\to$ Aunque a este nivel no se tienen instrumentos para afirmarlo, este límite es $+\infty$. Con la calculadora se puede ver fácilmente: basta con dar a x un valor grande. Por ejemplo, si $x = 100$, $f(100)=\dfrac{e^{50}}{101}=5{,}13\cdot 10^{19}$.

14. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}$.

<u>Solución</u>:

Si apareciese la indeterminación 0/0 (y así va a suceder) habrá que multiplicar y dividir cada función por la expresión conjugada del término que lleva raíz, ya que el producto de las expresiones conjugadas permite eliminar la raíz cuadrada: $\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)=A-B^2$.

El producto del otro término no suele convenir hacerlo; así, en el límite que sigue, el producto en el numerador, $(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)$, no se realiza, lo que facilitará la simplificación posterior.

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}=\left[\dfrac{-1+1}{\sqrt{4}-2}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{5+x-4}=$

$=\lim_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{5+x}+2\right)=\sqrt{4}+2=4$.

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left[\dfrac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

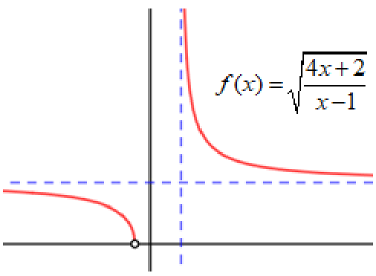
c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$.

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}=\left[\dfrac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(x+2-x^2\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{-\cancel{(x-2)}(x+1)}{2\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{-x-1}{2\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\dfrac{-3}{2\cdot 4}=-\dfrac{3}{8}$.

$\to$ La expresión $x+2-x^2=-\left(x^2-x-2\right)$, siendo su descomposición factorial la que se indica en el numerador.

15. La función $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+2}{x-1}}$ es la representada en la figura.



Teniendo en cuenta su gráfica y los conceptos de límite halla:

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$; b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; c) $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

d) Indica su dominio de definición.

e) Halla la ecuación de sus asíntotas.

<u>Solución</u>:

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. La función no está definida en los alrededores de $x = 0$.

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{4x+2}{x-1}}=\sqrt{\dfrac{6}{0^+}}=+\infty$.

c) $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\sqrt{\dfrac{4x+2}{x-1}}=\sqrt{\lim_{x\to \infty}\dfrac{4x+2}{x-1}}=\sqrt{4}=2$.

d) La función está definida cuando $\dfrac{4x+2}{x-1}>0$, que se cumple cuando los términos de la fracción tienen signos iguales: $\begin{cases}4x+2<0\\ x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1/2\\ x<1\end{cases}\Rightarrow x<-1/2$; $\begin{cases}4x+2>0\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1/2\\ x>1\end{cases}\Rightarrow x>1$.

Luego, Dom (f) = **R** – [–1/2, 1].

e) Sus asíntotas son las rectas: $x = 1$, vertical; $y = 2$, horizontal.

16. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{4-x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(0,5^{3x-5}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4}{e^{x}+x}\right)$.

Solución:

En todos los casos el límite puede hacerse sustituyendo y teniendo en cuenta que: si $a>1$, $a^{+\infty}\to\infty$; $a^{-\infty}\equiv\dfrac{1}{a^{+\infty}}\to 0$; si $0<a<1$, $a^{+\infty}\to 0$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{4-x}\right)=3^{4-\infty}=3^{-\infty}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(0,5^{3x-5}\right)=0,5^{+\infty-5}=0,5^{+\infty}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{x}\right)=-\infty+e^{-\infty}=-\infty+0=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{e^{x}+x}\right)=\dfrac{4}{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{e^{x}+x}\right)=\dfrac{4}{+\infty+\infty}=0$.

17. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log(3-x)\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log(3-x)\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{3}{x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log(3-x)\right)=\log(-\infty)$: no existe. El logaritmo de los números negativos no está definido.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\log(3-x)\right)=\log(+\infty)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{3}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{3}{+\infty}\right)=\ln\left(0^{+}\right)=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=\dfrac{+\infty}{+\infty}=$ ¿? En este curso no se está en condiciones de calcularlo; no obstante, si representas la función (puedes utilizar Google) verás que ese límite vale 0.

18. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\sin x}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos(3x)\right)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x-1}{4x+2}\right)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\sin x}{x}\right)=\dfrac{1+\sin(\infty)}{\infty}=0$: el seno nunca es mayor que 1; ni menor que −1.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cos(3x)\right)=\infty\cdot\cos(\infty)\to$ no existe: oscila permanentemente.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)=\cos\dfrac{1}{\infty}=\cos 0=1$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x-1}{4x+2}\right)=\tan\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi x-1}{4x+2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.

19. Halla los puntos en los que no son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x}$; c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15}$.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ no es continua en x = 1, pues no está definida en ese punto. En los demás puntos sí es continua.

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x}$ no es continua en los puntos en los que no está definida, que son las soluciones de $x^2+3x=0$ $\Rightarrow x = 0$ y $x = -3$. Por tanto, es continua en **R** – {–3, 0}.

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ está definida siempre: el denominador no se anula en ningún punto. Por tanto, es continua siempre.

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15}$ no es continua en los puntos en los que no está definida, que son las soluciones de $x^2-2x-15=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\dfrac{2\pm 8}{2}=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$.

Por tanto, es continua en **R** – {–3, 5}.

20. Aplicando límites laterales comprueba si son continuas o no las siguientes funciones definidas a trozos.

a) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\ge 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x+2, & \text{si } x<0\\ e^{-x}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$.

Solución:

a) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}$.

Por separado, cada una de las funciones es continua en su intervalo de definición (la primera función es una recta; la segunda, una parábola). Habrá que ver si también es continua en el punto x = 2, el de unión/separación; para ello los límites laterales deben valer lo mismo, y ser iguales a $f(2)=2-2=0$.

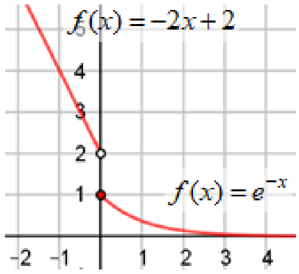
Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=2-2=0$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-2x\right)=2^2-2\cdot 2=0$,

se deduce que la función también es continua en ese punto.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\ge 1\end{cases}$. El único punto que presenta dudas es x = 1. Será continua en ese punto si los límites laterales son iguales a $f(1)=\ln 1=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)=1-1=0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=\ln 1=0$ son iguales, se deduce que la función también es continua en ese punto.

c) $f(x)=\begin{cases}-2x+2, & \text{si } x<0\\ e^{-x}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$. El único punto dudoso es x = 0. Será continua si los límites laterales son iguales a $f(0)=e^{0}=1$.



Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x+2)=0+2=2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}=e^{0}=1$ son distintos, se deduce que la función no es continua en ese punto.

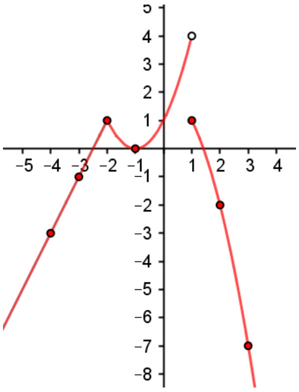
21. Estudia mediante límites la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x<-2\\ x^2+2x+1 & -2\leq x<1\\ -x^2+2 & x\geq 1\end{cases}$.

Justifica el resultado gráficamente.

<u>Solución</u>:

La función dada está definida mediante tres funciones continuas. Por tanto, los únicos puntos dudosos son x = –2 y x = 1. En esos puntos, la continuidad exige que exista límite (los límites laterales deben ser iguales).

- En x = –2: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(2x+5)=1$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+2x+1\right)=1 \Rightarrow$ es continua.
- En x = 1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2x+1\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x^2+2\right)=1 \Rightarrow$ no es continua.



Como se trata de una función lineal y de dos parábolas, pueden dibujarse dando valores.

Puntos de $f(x)=2x+5 \to$ (–4, –3) y (–3, –1).

Puntos de $f(x)=x^2+2x+1 \to$ (–2, 1), (–1, 0) y (1^-, 4^-).

Puntos de $f(x)=-x^2+2 \to$ (1, 1), (2, –2) y (3, –7).

Como puede verse, la función es continua en x = –2; no lo es en x = 1.

22. Para qué valor de a es continua cada una de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}a-x & \text{si } x<4\\ x^2-16 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2+x-3, & \text{si } x\leq 1\\ x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$.

<u>Solución</u>:

a) Por separado, cada una de las funciones dadas es continua en su dominio de definición.

La única duda se presenta en x = 4. Será continua si los límites laterales coinciden con su valor de definición, que es $f(4)=4^2-16=0$.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(a-x)=a-4$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(x^2-16\right)=16-16=0$.

Será continua si $a-4=0 \Rightarrow a$ = 4.

b) Para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2+x-3, & \text{si } x\leq 1\\ x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$ sea continua en x = 1, que es el único punto dudoso, deben coincidir los límites laterales con su valor de definición.

Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+x-3\right)=1+1-3=-1;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+a)=1+a.$$

Luego, debe cumplirse que $-1=1+a \Rightarrow a=-2$.

23. El precio (en cientos de euros) de un nuevo modelo de teléfono móvil viene determinado por la función $P(t)=\dfrac{7+2t^2}{(t+2)^2}$, donde t mide el número de meses transcurridos desde su lanzamiento al mercado.
a) ¿Cuál fue su precio inicial? Comprueba que su precio baja en los dos primeros meses. ¿A cuánto tiende al cabo de 10 meses?
b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué precio tiende?
Solución:
a) En el momento inicial, t = 0: $P(0)=\dfrac{7+0^2}{(0+2)^2}=1,75$ cientos de euros = 175 €.

Para t = 1 y t = 2: $P(1)=\dfrac{7+2\cdot 1^2}{(1+2)^2}=\dfrac{9}{9}=1 \to$ 100 €; $P(2)=\dfrac{7+2\cdot 2^2}{(2+2)^2}=\dfrac{15}{16}=0,9375 \to 93,75$ €

Cuando $t\to 10$, $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{7+2t^2}{(t+2)^2}=\dfrac{7+200}{12^2}\approx 1,4375 \to 143,75$ €.

b) Con el paso del tiempo (a largo plazo; cuando $t\to\infty$) el precio tenderá a 200 €, pues:

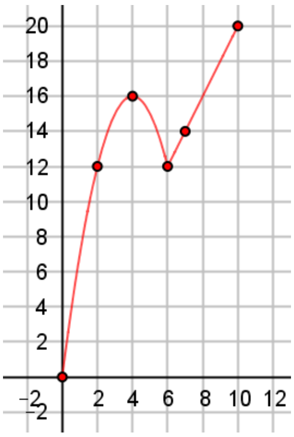
$$\lim_{t\to\infty}\left(P(t)\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{7+2t^2}{(t+2)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{7+2t^2}{t^2+4t+4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{t^2}=2.$$

24. Supongamos que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $f(x)=\begin{cases} ax-x^2, & \text{si } 0\le x\le 6\\ 2x, & \text{si } 6<x\le 10\end{cases}$, siendo x el tiempo transcurrido en años.
a) Halla el valor del parámetro a para que $f(x)$ sea una función continua.
b) Para a = 8 representa su gráfica e indica en qué períodos de tiempo los beneficios crecen o decrecen.
Solución:
a) Para que la función sea continua es necesario que en el punto x = 6, único que presenta dudas, coincidan los límites laterales.

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left(ax-x^2\right)=6a-36;\quad \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(2x)=12$$

Será continua cuando $6a-36=12\Rightarrow 6a=48\Rightarrow a=8$.

b) Si a = 8, $f(x)=\begin{cases} 8x-x^2, & \text{si } 0\le x\le 6\\ 2x, & \text{si } 6<x\le 10\end{cases}$.



Puede representarse dando valores.
- Intervalo [0, 6], $f(x)=8x-x^2 \to$ es una parábola.

Puntos: (0, 0); (2, 12); (4, 16), vértice; (6, 12).
- Intervalo (6, 10], $f(x)=2x \to$ es una recta.

Puntos: (7, 14); (10, 20).
Los beneficios crecen los cuatro primeros años y los 4 últimos; decrecen en el periodo (4, 6): años 5º y 6º.

25. Debido a la contaminación, el número de peces $P(x)$ (en miles) de un acuario se ajusta a la función $P(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, siendo *x* el número de años transcurridos desde comienzos de 2015.
a) ¿Cuántos peces había a comienzos de 2015? ¿Cuántos habrá a finales de 2035?
b) ¿Cómo evolucionará la población de peces a largo plazo?
c) Haz un esbozo de la gráfica de $P(x)$.

Solución:

a) El 1 de enero de 2015, $t = 0$, luego $P(t)=\sqrt{0+1}-\sqrt{0}=1$: había 1000 peces.
A finales del año 2035, $t = 20$, luego habrá $P(20)=\sqrt{21}-\sqrt{20}\approx 0{,}1104$; unos 110 peces.

b) A largo plazo, cuando $t \to \infty$, la población tiende a $\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)$.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Esto significa que el eje *OX* es una asíntota horizontal de la función.

c) Dando algunos valores a *t* se obtienen los puntos:
(0, 1); (1, 0,4142); (2, 0,3178); (4, 0,23619); (8, 0,1716); (20, 0,1104), …
Su gráfica es la adjunta.