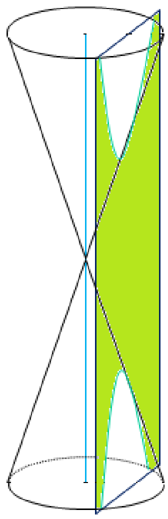
TEMA 11. CÓNICAS

1. SECCIONES CÓNICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

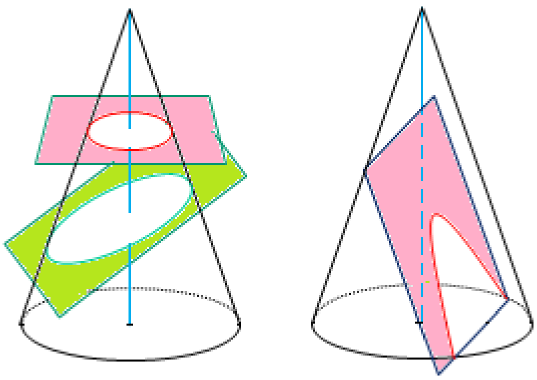
Las secciones cónicas son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica por un plano.
Si el plano es perpendicular al eje de rotación del cono se obtiene una circunferencia.
Si corta oblicuamente, se obtiene una elipse.
Si el plano corta paralelamente a la generatriz del cono, la curva será una parábola.
Por último, si el plano es paralelo al eje de simetría del cono la curva obtenida es una hipérbola.



Estas cuatro curvas también pueden describirse como lugares geométricos: conjuntos de puntos que cumplen una determinada propiedad; en este caso, definida en términos de distancias.

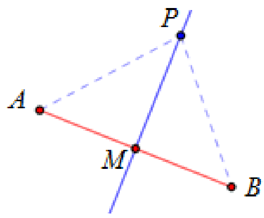
- Una vez descrita la *propiedad*, se puede optar por:

1) representar la curva asociada;
2) encontrar su expresión algebraica.

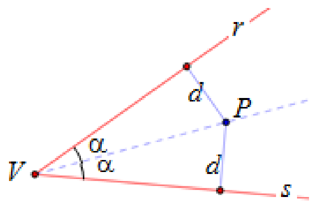


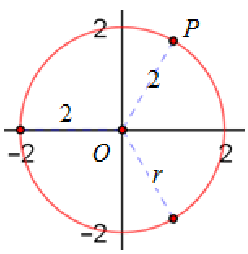
Ejemplos:

a) En el tema anterior se han estudiado dos lugares geométricos, la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.



- La mediatriz de un segmento de extremos A y B es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B. Esto es, si P es un punto de la mediatriz verificará que $d(P, A) = d(P, B)$. (Como sabes, la mediatriz es la recta perpendicular al segmento por su punto medio).
- La bisectriz del ángulo determinado por dos rectas es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dichas rectas. Esto es, si P es un punto de la bisectriz verificará que $d(P, r) = d(P, s)$. (Como sabes, la bisectriz de un ángulo es la recta que pasando por el vértice divide al ángulo en dos partes iguales).



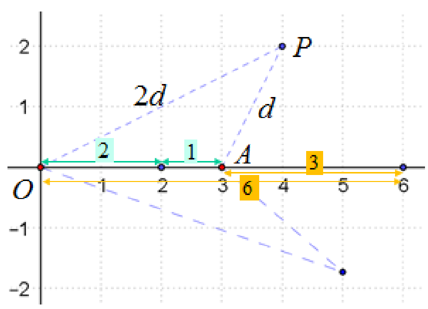


b) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan 2 unidades del punto $O(0, 0)$ es una circunferencia de radio 2.
Un punto $P(x, y)$ es de la circunferencia si cumple que $d(O, P) = 2$.

c) El lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que "su distancia al punto $O(0, 0)$ es doble que su distancia al punto $A(3, 0)$", deben cumplir la relación:

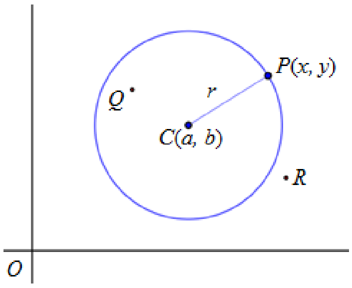
$$d(O, P) = 2 \cdot d(A, P).$$

Dos de esos puntos son (2, 0) y (6, 0) → compruébalo.
Más adelante, en el Problema 2, se verá que este lugar geométrico es una circunferencia.



2. LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro".
La distancia del centro a un punto de la circunferencia se llama radio.



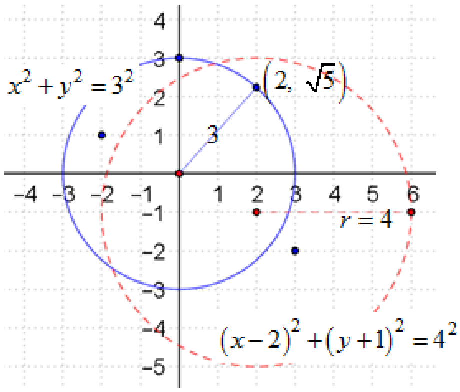
Ecuación de la circunferencia

Si $P(x,\ y)$ es un punto de la circunferencia con centro en $C(a, b)$ y radio r, entonces $d(C,\ P)=r$.

Como $d(C,\ P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, haciendo el cuadrado, se deduce: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$.

→ Si la distancia de C a Q es menor que r, el punto es interior a la circunferencia: $d(C,\ Q)<r$.
Si $d(C,\ R)>r$ el punto es exterior a ella.

Ejemplos:



a) La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 3 es: $x^2+y^2=3^2 \to x^2+y^2=9$.

Los puntos (0, 3) y $(2,\ \sqrt{5})$ pertenecen a la circunferencia.

En efecto, para $(2,\ \sqrt{5}) \to 2^2+(\sqrt{5})^2=4+5=9$.

El punto (–2, 1) es interior → $(-2)^2+1^2=4+1<9$;

El punto (3, –2) es exterior → $3^2+(-2)^2=9+4>9$.

b) La ecuación de la circunferencia con centro en $C(2, -1)$ y $r = 4$ es: $(x-2)^2+(y+1)^2=4^2$.
Si se desarrollan los cuadrados se obtiene:

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=16 \Rightarrow x^2+y^2-4x+2y-11=0.$$

- La expresión $\underline{x^2+y^2+mx+ny+p=0}$ es la ecuación general de una circunferencia. Su centro y radio pueden deducirse completando cuadrados.

→ Completar cuadrados es pasar de $x^2 \pm mx$ a otra expresión de la forma $(x\pm a)^2+m'$, en la que aparece el cuadrado de un binomio más un número. El valor de a es $a=\pm\dfrac{m}{2}$; el de m' hay que ajustarlo con el propósito de que $(x\pm a)^2+m'=x^2+m$.

Ejemplo:

La expresión $x^2-6x=(x-3)^2-9$. Observa que $\underline{(x-3)^2}-9=\underline{x^2-6x+9}-9=x^2-6x$.

Igualmente, $y^2+4y=(y+2)^2-4$.

Por consiguiente, la ecuación $\underline{x^2}+\underline{y^2}-\underline{6x}+\underline{4y}-3=0 \Leftrightarrow \underline{(x-3)^2-9}+\underline{(y+2)^2-4}-3=0 \to$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=4^2,$$

que es la ecuación de la circunferencia con centro en (3, –2) y radio 4.

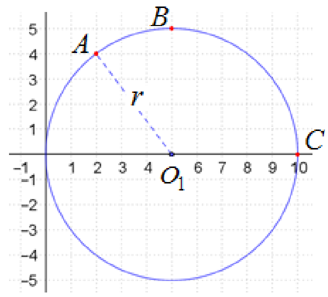
Distintas formas de determinar una circunferencia

Por definición, una circunferencia queda determinada dando su centro y su radio; pero hay más formas de determinar una circunferencia. A continuación se indican algunas.

- Una circunferencia queda determinada por tres puntos no alineados. Su ecuación puede obtenerse de dos maneras:

1) Sustituyendo las coordenadas de los puntos en la ecuación general, $x^2+y^2+mx+ny+p=0$. Se obtiene así un sistema de tres ecuaciones, con incógnitas *m*, *n* y *p*. Resolviendo el sistema se determina la ecuación.
2) Hallando el circuncentro del triángulo determinado por los tres puntos.

Ejemplos:
a) Por los puntos *A*(2, 4), *B*(5, 5) y *C*(10, 0), que no están alineados, pasa una circunferencia.
Si su ecuación es $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, entonces:
→ Como *A*(2, 4) pertenece a ella: $2^2+4^2+m\cdot 2+n\cdot 4+p=0 \Rightarrow 2m+4n+p=-20$.
→ Como *B*(5, 5) pertenece a ella: $5^2+5^2+m\cdot 5+n\cdot 5+p=0 \Rightarrow 5m+5n+p=-50$.
→ Como *C*(10, 0) pertenece a ella: $10^2+0^2+m\cdot 10+n\cdot 0+p=0 \Rightarrow 10m+p=-100$.
El sistema puede resolverse por el método de Gauss:

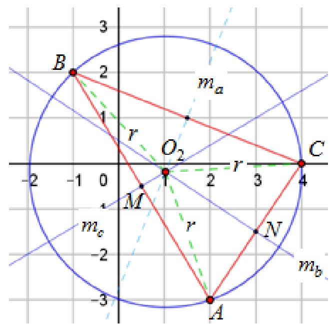


$$\begin{cases} 2m+4n+p=-20 \\ 5m+5n+p=-50 \\ 10m+p=-100 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E3 \\ E2-E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} -8m+4n=80 \\ -5m+5n=50 \\ 10m+p=-100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 5E1-4E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -20m=200 \\ -5m+5n=50 \\ 10m+p=-100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-10 \\ n=0 \\ p=0 \end{cases}.$$

La circunferencia es: $x^2+y^2-10x=0 \Leftrightarrow (x-5)^2-25+y^2=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=25$.
Es la circunferencia con centro en O_1(5, 0) y radio *r* = 5.

b) En el Ejercicio 3 del tema anterior se encontró el circuncentro del triángulo de vértices *A*(2, −3), *B*(−1, 2) y *C*(4, 0), cuyas coordenadas eran $O_2\left(\frac{39}{38},\ -\frac{7}{38}\right)$.



El radio de la circunferencia correspondiente será:

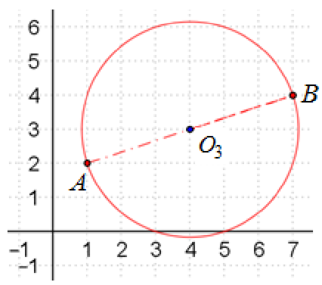
$$d(C,\ O_2)=\sqrt{\left(4-\frac{39}{38}\right)^2+\left(0+\frac{7}{38}\right)^2}=\sqrt{\frac{6407}{722}}.$$

Luego, su ecuación es: $\left(x-\frac{39}{38}\right)^2+\left(y+\frac{7}{38}\right)^2=\frac{6407}{722}$.

- Una circunferencia queda determinada dando dos puntos de ella diametralmente opuestos.

El centro es el punto medio de los puntos dados; el radio, la mitad de la distancia entre ellos.

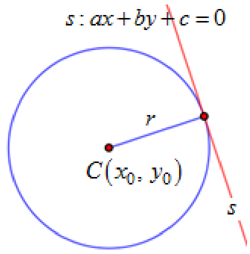
Ejemplo:
Si los puntos diametralmente opuestos son *A*(1, 2) y *B*(7, 4), entonces:



→ el centro será: $O_3\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)=(4,\ 3)$;
→ el radio: $r=\frac{1}{2}d(A,\ B)=d(A,\ O_3)=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$.
→ Su ecuación: $(x-4)^2+(y-3)^2=10$.

- Una circunferencia queda determinada dando su centro y la ecuación de una recta tangente a ella.

Para conocer el radio hay que hallar la distancia del punto a la recta, pues "toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia".

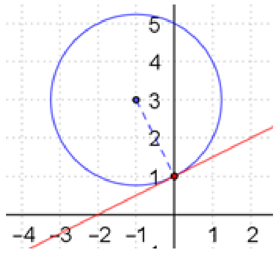


$\rightarrow$ El radio será: $r = d\left(C\left(x_0, y_0\right),\ s: ax+by+c=0\right) = \left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

Se obtiene la circunferencia de ecuación: $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2$.

Ejemplo:

La circunferencia con centro en $C(-1, 3)$ y tangente a la recta $x-2y+2=0$ tiene radio,

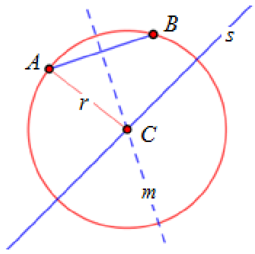


$$r = d\left(C\left(-1,\ 3\right),\ s: x-2y+2=0\right) = \left|\frac{-1-6+2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}\right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Su ecuación será: $(x+1)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=5$.

- Una circunferencia queda determinada dando dos puntos de ella y una recta en la que esté su centro.

Para la obtención de su ecuación hay que tener en cuenta que "el centro de una circunferencia se encuentra en la mediatriz determinada por dos puntos de ella".



El proceso a seguir es:

1) Se halla la mediatriz m del segmento (cuerda de la circunferencia) AB.

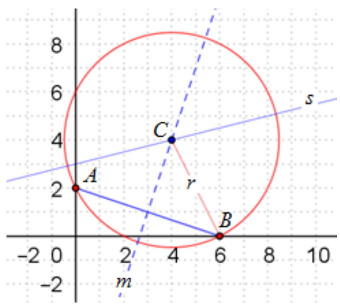
2) El centro es el punto de corte de las rectas s y m.

3) El radio es la distancia desde C a cualquiera de los puntos: $r = d(C,\ A)$.

Ejemplo:

La circunferencia que tiene su centro en la recta $y=\dfrac{1}{4}x+3$ y pasa por los puntos $A(0, 2)$ y $B(6, 0)$ se obtiene como sigue:

1) Se calcula la mediatriz de AB:



$$m: \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2+y^2} \Rightarrow m: 3x-y-8=0.$$

2) Se halla el corte de las rectas m y s:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x+3 \\ 3x-y-8=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-\left(\frac{1}{4}x+3\right)-8=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 11x-44=0 \Rightarrow x=4 \rightarrow y = 4$. Punto $C(4, 4)$.

3) El radio vale, $r=d(C,\ A)=d(C,\ B)=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia pedida es $(x-4)^2+(y-4)^2=20$.

Observación: La circunferencia es, posiblemente, la curva más frecuente en la realidad; por eso, no es extraño que se estudie desde múltiples puntos de vista, según la aplicación que se necesite o busque. Aunque aquí se han visto algunos casos, la relación no es exhaustiva, como se verá en los Problemas Propuestos.

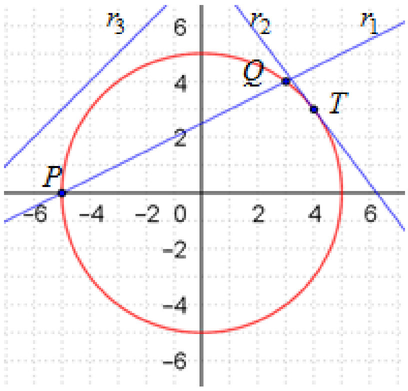
3. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Con respeto a una circunferencia, una recta puede ser secante, tangente o exterior.

Conocidas las ecuaciones de la circunferencia y de la recta, su posición puede determinarse resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones.
Si el sistema tiene dos soluciones, la recta es secante; si tiene solo una solución, será tangente; si el sistema es incompatible, será exterior.

Ejemplos:
Dada la circunferencia $x^2+y^2=25$, se cumple:

a) La recta $r_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ es secante a ella.



En efecto, sustituyendo $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)^2=25 \Rightarrow x^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=25$$

$\to$ multiplicando por 4, agrupando, simplificando… $\to$
$\to$ $x^2+2x-15=0$ $\Rightarrow x=-5$, $x=3$.
Para $x=-5$, $y=0$: punto $P(-5, 0)$; para $x=3$, $y=4$: punto $Q(3, 4)$.

b) La recta $r_2: 4x+3y-25=0$ es tangente a ella.

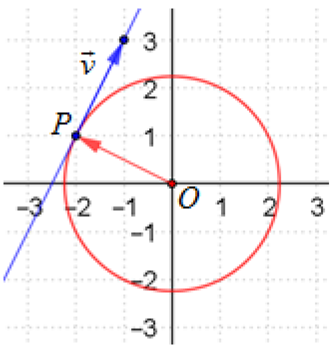
En efecto, resolviendo $\begin{cases} 4x+3y-25=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ $\to$ despejando en $E1$, $y=-\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$, sustituyendo en $E2$ y simplificando $\to$ $x^2-8x+16=0$ $\Rightarrow x=4$. Punto $T(4, 3)$.

c) La recta $r_3: y=8+x$ es exterior a ella.

En efecto, sustituyendo en la circunferencia $\to$ $x^2+(8+x)^2=25 \Rightarrow (...) \Rightarrow 2x^2+16x+39=0$, que no tiene solución.

Recta tangente a una circunferencia
La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.
Por tanto, para hallar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia, por un punto de ella, puede procederse como sigue:
1) Se halla el vector CP, determinado por el centro de la circunferencia y el punto;
2) Se halla la recta que pasa por P y lleva una dirección normal (perpendicular) a CP.

Ejemplo:
La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=5$ por el punto $P(-2, 1)$ de ella se hace como sigue:

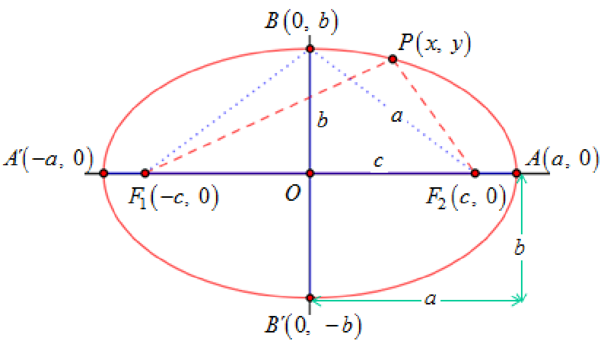


1) La circunferencia tiene el centro en $O(0, 0)$; el vector $\overrightarrow{OP}=(-2, 1)$.
2) Un vector normal a $\overrightarrow{OP}$ es $\vec{v}=(1, 2)$, siendo su pendiente $m=2$.
3) La recta tangente pasa por $P(-2, 1)$ y tiene pendiente 2.
La recta tangente será: $y-1=2(x+2) \Rightarrow y=2x+5$.

4. LA ELIPSE

La elipse se define como "el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, llamados focos, es constante".
Esto es, si *P* pertenece a la elipse, entonces $d(P,\ F_1)+d(P,\ F_2)=k$.
Esa constante, *k*, debe ser mayor que la distancia entre los focos. Para facilitar la obtención de la ecuación de la elipse, esa contante se iguala a $2a$. Entonces, queda $d(P,\ F_1)+d(P,\ F_2)=2a$.

Elementos de una elipse



- Eje focal es la recta que pasa por los dos focos.
- Eje secundario es la mediatriz del segmento que determinan los focos.

La elipse es simétrica respecto de ambos ejes.
- Centro es el punto de corte de los dos ejes.
- Los vértices de la elipse: son los puntos de corte de la elipse con sus ejes; puntos *A*, *A´*, *B*, *B´*.
- El segmento *AA´* se llama eje mayor; su valor es $2a$. El semieje mayor es *a*.
- Al segmento *BB´* se le llama eje menor. Su valor es $2b$. El semieje menor es *b*.
- La distancia entre los focos se llama distancia focal y vale $2c$; la ´semidistancia´ focal es *c*.
- La relación entre *a*, *b* y *c* es: $a^2=b^2+c^2$. (Esto implica que $a>b$ y $a>c$).

Esta propiedad es resultado de:
1) Por ser *B* de la elipse $\Rightarrow d(B,\ F_1)+d(B,\ F_2)=2a$.
2) Como $d(B,\ F_1)=d(B,\ F_2) \Rightarrow d(B,\ F_1)=d(B,\ F_2)=a$.
3) Al ser el triángulo OBF_2 rectángulo $\Rightarrow a^2=b^2+c^2$.
- Los segmentos PF_1 y PF_2 se llaman radios vectores del punto *P*.

Ecuación de la elipse centrada en el origen

Esta elipse tiene su centro en *O*(0, 0), focos en los puntos $F_1=(-c,\ 0)$ y $F_2=(c,\ 0)$, y sus ejes miden $2a$ (horizontal) y $2b$ (vertical). Entonces, si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, se cumple que:

$$d(P,\ F_1)+d(P,\ F_2)=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

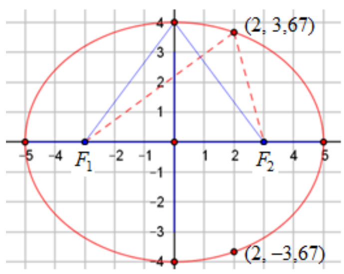
Haciendo transformaciones en la igualdad anterior (transponer términos, elevar al cuadrado, tener en cuenta que $a^2=b^2+c^2$, …) se llega a la ecuación reducida de la elipse, cuya expresión es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

(El proceso completo puede verse en el Problema 14).

Ejemplo:

La elipse centrada en origen de semiejes *a* = 5 y *b* = 4 es: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.



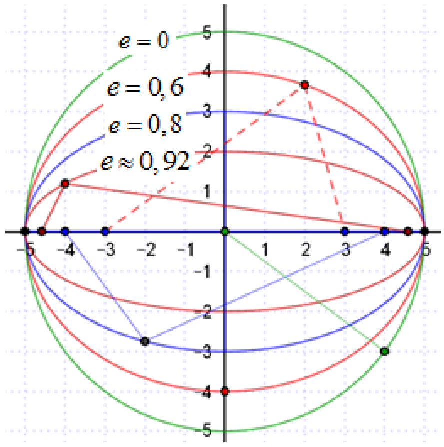
Como $a^2=b^2+c^2$, sus focos son $F_1=(-3,\ 0)$ y $F_2=(3,\ 0)$.
Sus vértices: *A*(5, 0); *A´*(–5, 0); *B*(0, 4) y *B´*(0, –4).
→ Para buscar otros puntos de la elipse habría que despejar *y*:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y^2=16\cdot\left(1-\frac{x^2}{25}\right) \Rightarrow y=\pm\sqrt{16-\frac{16}{25}x^2}.$$

Así, para *x* = 2, *y* = ±3,67 → puntos (2, 3,67); (2, –3,67).

- Se llama <u>excentricidad de una elipse</u> al número $e = \dfrac{c}{a}$. Su valor está entre 0 y 1.

La excentricidad mide el achatamiento de la elipse: cuanto mayor sea la excentricidad mayor será su achatamiento.



En la figura adjunta se han representado las elipses de ecuaciones $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

En todas ellas el eje horizontal es 10 → (*a* = 5), mientras que el eje vertical mide 8, 6, y 4 → (*b* = 4, 3 y 2), respectivamente.

El valor de *c*, que se deduce de $c^2 = a^2 - b^2$, es *c* = 3, 4 y $\sqrt{21} \approx 4,58$, también respectivamente.

Las distancias focales correspondientes son: 6, 8 y $2\sqrt{21} \approx 9,16$.

A medida que la distancia focal se hace más grande, la elipse es más chata y aumenta la excentricidad, siendo sus valores: $e = \dfrac{3}{5} = 0,6$; $e = \dfrac{4}{5} = 0,8$ y $e = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92$.

La "elipse" de excentricidad 0 es una circunferencia; la de ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5^2$.

Otros casos de elipses

- La ecuación de la elipse centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y semiejes *a* y *b*, con *a* > *b*, es:

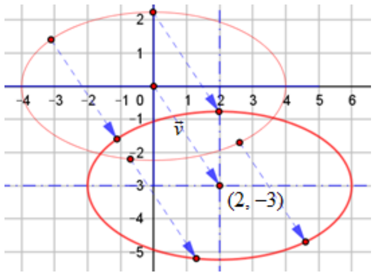
$\boxed{\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$. Esta elipse es la trasladada de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ según el vector $\vec{v} = (x_0,\ y_0)$.

→ Si se desarrollan los cuadrados y se trasponen los términos, se obtiene la <u>ecuación general de una elipse</u>, que es: $\underline{cx^2 + dy^2 + mx + ny + p = 0}$, con $c \neq d$ y ambos con el mismo signo. (Problema 17)

Ejemplo

La ecuación de la elipse centrada en el punto $P(2,\ -3)$ y de semiejes 4 y $\sqrt{5}$, es: $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{5} = 1$.

Es la trasladada según el vector $\vec{v} = (2,\ -3)$ de $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.



- La elipse centrada en el origen con semieje mayor el vertical (*a* < *b*) tiene sus focos en el eje de ordenadas. Su ecuación es la misma, pero con *a* < *b*; cumpliéndose que $b^2 = a^2 + c^2$.

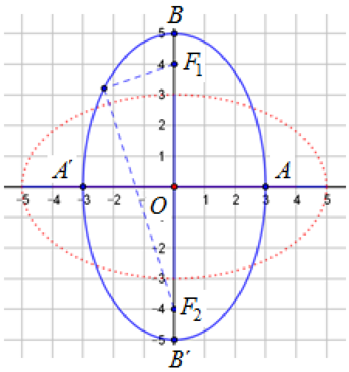
Su gráfica es la girada 90º de la vista inicialmente.

→ En la figura adjunta se representa la elipse centrada en origen de semiejes *a* = 3 y *b* = 5.

Su ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Tiene sus focos en $F_1 = (0,\ 4)$ y $F_2 = (0,\ -4)$.

Sus vértices son: *A*(3, 0); *A*´(–3, 0); *B*(0, 5) y *B*´(0, –5).

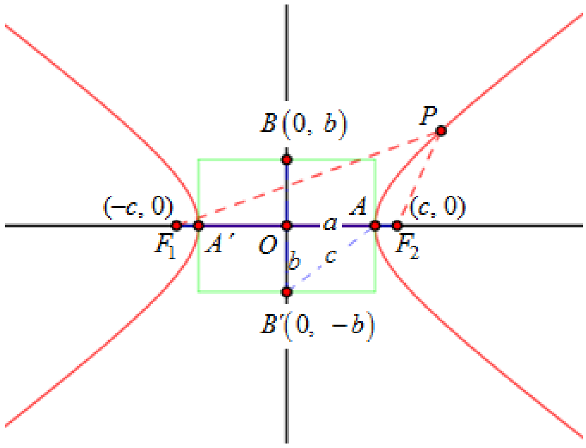


5. LA HIPÉRBOLA

La hipérbola se define como "el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, F_1 y F_2, llamados focos, es constante".
Esto es, si *P* pertenece a la hipérbola, entonces: $\left|d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)\right|=k$.

Esa constante, *k*, debe ser menor que la distancia entre los focos. Para facilitar la obtención de la ecuación de la hipérbola, esa contante se iguala a $2a$. Entonces, queda $d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)=2a$.

Elementos de una hipérbola



- Eje focal es la recta que pasa por los dos focos.
- Eje secundario es la mediatriz del segmento que determinan los focos.

La hipérbola es simétrica respecto de ambos ejes.

- Centro es el punto de corte de los dos ejes.
- Los vértices de la hipérbola son los puntos *A*(*a*, 0) y *A´*(–*a*, 0), cortes de la hipérbola con el eje focal
- El segmento *AA´* se llama eje real, que es horizontal; su valor es 2*a*.
- La distancia entre los focos se llama distancia focal y vale 2*c*.
- Al segmento *BB´* se le llama eje imaginario. Su valor es 2*b*.
- La relación entre *a*, *b* y *c* es: $c^2=a^2+b^2$. (Esto implica que $c>a$ y $c>b$).

Ecuación de la hipérbola centrada en el origen

Esta elipse tiene su centro en *O*(0, 0), focos en los puntos $F_1=(-c,\ 0)$ y $F_2=(c,\ 0)$, y sus ejes miden $2a$ (horizontal) y $2b$ (vertical). Entonces, si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, se cumple que:

$$d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Haciendo transformaciones en la igualdad anterior (transponer términos, elevar al cuadrado, tener en cuenta que $c^2=a^2+b^2$, …) se llega a la ecuación reducida de la hipérbola, cuya expresión es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}.$$
(El proceso completo puede verse en el Problema 19).

Ejemplo:

La hipérbola centrada en origen de semiejes *a* = 3 y *b* = 4 es: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Como $c^2=a^2+b^2$, sus focos son $F_1=(-5,\ 0)$ y $F_2=(5,\ 0)$.

Sus vértices: *A*(3, 0) y *A´*(–3, 0).

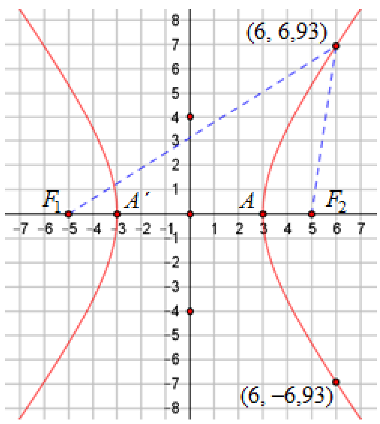
→ Para buscar otros puntos de la hipérbola habría que despejar *y*:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y^2=16\cdot\left(\frac{x^2}{9}-1\right) \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{16}{9}x^2-16}.$$

(Obsérvese que esta raíz solo está definida cuando $|x|\geq 3$).

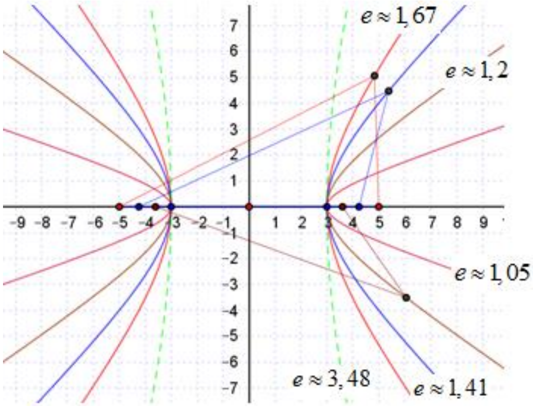
Así, para *x* = 3, *y* = 0 → punto (3, 0);

para *x* = 6, $y=\pm\sqrt{48}\approx\pm 6{,}93$ → puntos (6, 6,93); (6, –6,93).



- Se llama <u>excentricidad de una hipérbola</u> al número $e=\dfrac{c}{a}$. Su valor siempre es mayor que 1.

La excentricidad mide la curvatura de la hipérbola: cuanto mayor sea la excentricidad más abierta es la hipérbola; cuando se acerca a 1, la hipérbola se cierra cada vez más, hasta degenerar en dos semirrectas sobre el eje *OX* y que partes de los focos.
En la figura adjunta se han representado las hipérbolas de ecuaciones $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$ y $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$.
En todas ellas el eje horizontal es 6 → (*a* = 3), mientras que el eje imaginario mide 8, 6, y 4 → (*b* = 4, 3 y 2), respectivamente.



Los valores de *c*, que se deducen de $c^2=a^2+b^2$, son: *c* = 5, $3\sqrt{2}\approx 4,24$ y $\sqrt{13}\approx 3,61$, también respectivamente. Las distancias focales correspondientes son: 10, $6\sqrt{2}\approx 8,48$ y $2\sqrt{13}\approx 7,22$.
A medida que la distancia focal se hace más pequeña, la hipérbola se va cerrando y disminuye la excentricidad (se acerca a 1), siendo sus valores: $e=\dfrac{5}{3}\approx 1,67$; $e=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}\approx 1,41$ y $e=\dfrac{\sqrt{13}}{3}\approx 1,2$.

Otros casos de hipérbolas

- La ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y semiejes *a* y *b*, es:

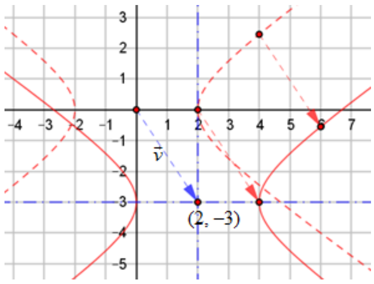
$\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$. Esta hipérbola es la trasladada de $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ según $\vec{v}=(x_0,\ y_0)$.

→ Si se desarrollan los cuadrados y se trasponen los términos, se obtiene la <u>ecuación general de una hipérbola</u>, que es: $\underline{cx^2+dy^2+mx+ny+p=0}$, con signo de *c* ≠ signo de *d*. (Véase el Problema 24).

Ejemplo

La ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(2,\ -3)$ y de semiejes 4 y 3, es: $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+3)^2}{2}=1$.

Es la trasladada según el vector $\vec{v}=(2,\ -3)$ de $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$.



- La hipérbola centrada en el origen con eje focal el de ordenadas (eje *OY*) tiene sus focos en el eje vertical. Su ecuación se obtiene cambiando *x* por *y*. Queda: $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

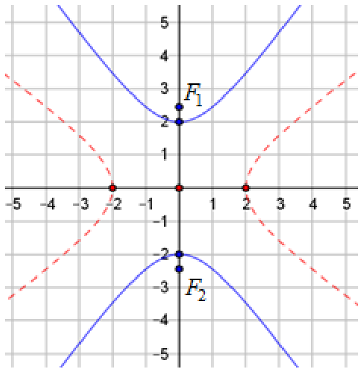
Su gráfica es la girada 90º de la vista inicialmente.

→ En la figura adjunta se representa la hipérbola centrada en el origen y con focos en el eje *OY*, de semiejes *a* = 2 y $b=\sqrt{2}$.

Su ecuación es: $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}=1$.

Tiene sus focos en $F_1=\left(0,\ \sqrt{6}\right)$ y $F_2=\left(0,\ -\sqrt{6}\right)$.

Sus vértices son los puntos (0, 2) y (0, –2).

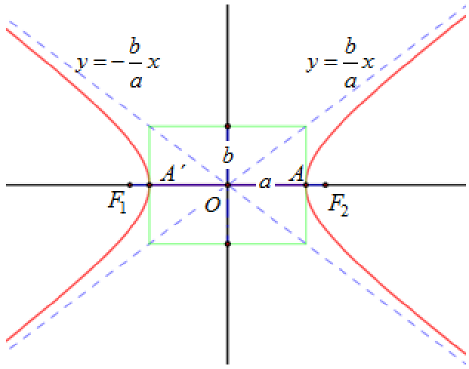


Asíntotas de una hipérbola

Las asíntotas de una curva son rectas hacia las que tiende a *pegarse* la curva.

En el caso de la hipérbola centrada en el origen, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

sus asíntotas son las rectas de ecuación $y=\pm\frac{b}{a}x$.



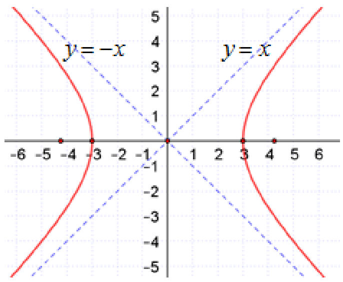
Ejemplo:

Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ son las rectas

$y=-\frac{4}{3}x$ e $y=\frac{4}{3}x$.

Hipérbola equilátera

Es la que tiene iguales los ejes; esto es, cuando a = b. Su ecuación es de la forma $\underline{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1} \Rightarrow \underline{x^2-y^2=a^2}$.



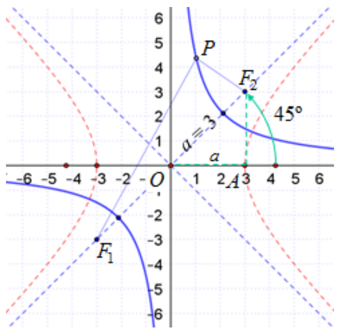
Como $c^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow c=\sqrt{2}a$. Su excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

- Sus asíntotas son las rectas $y=\pm x$, que son perpendiculares entre sí y coinciden con las bisectrices de los cuadrantes del sistema cartesiano.

En la figura adjunta se ha representado la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$, de semiejes a = b = 3.

Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas

Se obtiene al girar 45º la hipérbola equilátera. Con esto, los ejes cartesianos se convierten en sus asíntotas, mientras los focos se trasladan a la bisectriz, siendo $F_2(x_0,\ x_0)$ y $F_1(-x_0,\ -x_0)$.



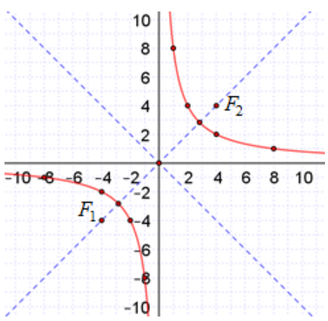
Como $c^2=\underline{2a^2}$, y, además, $c=d(O,\ F_2) \to c^2=x_0^2+x_0^2=\underline{2x_0^2}$, se deduce que $x_0=a$. Luego, $F_2(a,\ a)$ y $F_1(-a,\ -a)$.

Aplicando la definición, si un punto $P(x,\ y)$ pertenece a la hipérbola,

entonces: $|d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)|=k \to \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$.

Desarrollando la expresión anterior (véase el Problema 25) se obtiene la ecuación $xy=\frac{a^2}{2}$.

Haciendo $\frac{a^2}{2}=k$ se obtiene expresión $\underline{xy=k}$, que es la forma más simple de dar la ecuación de una hipérbola equilátera.



<u>Observación</u>: La ecuación de la hipérbola equilátera, $xy=k$, está asociada a la función de proporcionalidad inversa.

Así, por ejemplo, la relación $xy=8$, algunos de cuyos pares son:

(1, 8); (2, 4); (4, 2); (8, 1); (–1, –8); (–2, –4); (–4. –2)

es la representada en la figura adjunta.

Como $\frac{a^2}{2}=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow$ Sus focos están en los puntos $F_2(4,\ 4)$ y $F_1(-4,\ -4)$.

6. LA PARÁBOLA

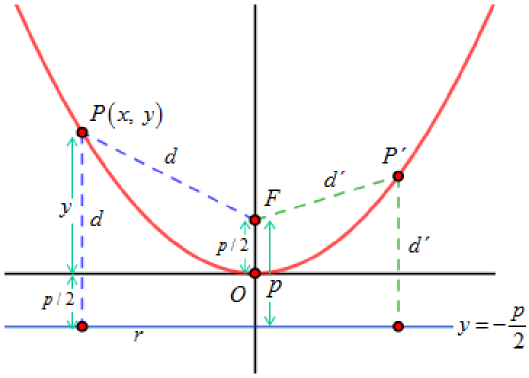
La parábola se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano *P* que equidistan de un punto fijo *F*, llamado foco, y de una recta fija *r*, llamada directriz.
Esto es, si *P* es un punto de la parábola, entonces $d(P,\ F)=d(P,\ r)$.

Elementos de una parábola

- Eje de la parábola: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

La parábola es simétrica respecto de su eje.

- Vértice: es el punto de corte de la parábola y su eje.
- La distancia del vértice al foco se llama distancia focal y se representa por $\frac{p}{2}$.
- El número *p*, distancia del foco a la directriz, es el parámetro de la parábola: $p > 0$.



Ecuación de la parábola de eje vertical y vértice en el origen

Sea la parábola con vértice en *O*(0, 0), de parámetro *p*, foco en el punto $F=\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ y directriz la recta $r: y=-\frac{p}{2}$. Entonces, si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, se cumple que:

$$d(P,\ F)=d(P,\ r) \Rightarrow \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}.$$

Elevando cada miembro al cuadrado y operando se obtiene:

$$\left(\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\right)^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2-py+\left(\frac{p}{2}\right)^2=y^2+py+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2=2py.$$

La expresión $\boxed{x^2=2py}$ es la ecuación reducida de la parábola.

→ La ecuación de la parábola de eje vertical, parámetro *p* y vértice en el punto $V(x_0,\ y_0)$ será:

$\boxed{(x-x_0)^2=2p(y-y_0)}$. Esta ecuación se transforma en la conocida $y=ax^2+bx+c$.

Efectivamente, desarrollando (se hace el cuadrado y se despeja *y*):

$$x^2-2x_0x+x_0{}^2=2py-2py_0 \Rightarrow y=\left(\frac{1}{2p}\right)x^2+\left(-\frac{x_0}{p}\right)x+\left(x_0{}^2+2py_0\right).$$

Ejemplos:

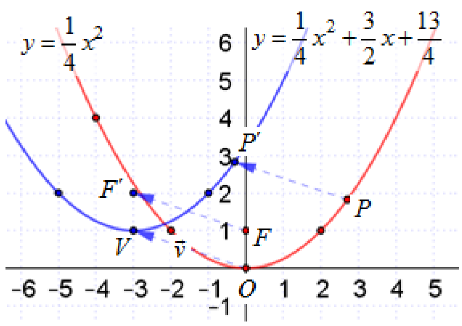
a) La ecuación de la parábola de eje vertical, parámetro $p = 2$ y vértice en *O*(0, 0) es: $x^2=2\cdot 2y \Rightarrow x^2=4y \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.

Algunos de sus puntos son: (0, 0); (2,1); (–2, 1); (–4, 4).

b) La ecuación de la parábola de eje vertical, parámetro $p = 2$ y vértice en *V*(–3, 1) será:

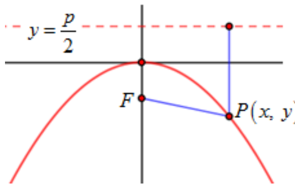
$$(x+3)^2=2\cdot 2(y-1) \Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}.$$

Es la trasladada según el vector $\vec{v}$ = (–3, 1) de la anterior.



Parábola cóncava de eje vertical (∩)

En este caso, el foco de la parábola está por debajo de la directriz.



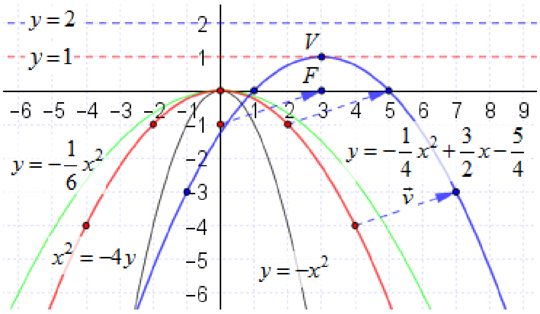
Sus elementos son: vértice en $O(0, 0)$, parámetro p, foco $F\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$ y directriz $r: y=\frac{p}{2}$. Entonces, si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, se cumple que: $d(P,\ F)=d(P,\ r) \Rightarrow \sqrt{x^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{p}{2}-y$. Su ecuación reducida es: $\underline{x^2=-2py}$.

→ La ecuación de la parábola cóncava de eje vertical, parámetro p y vértice en $V(x_0,\ y_0)$, será:

$\underline{(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)}$. Esta ecuación se transforma en la conocida $y=ax^2+bx+c$, con $a < 0$.

Ejemplos:

En la figura adjunta se han representado las parábolas:



Con $p = 3$, $x^2=-6y \Rightarrow y=-\frac{1}{6}x^2$.

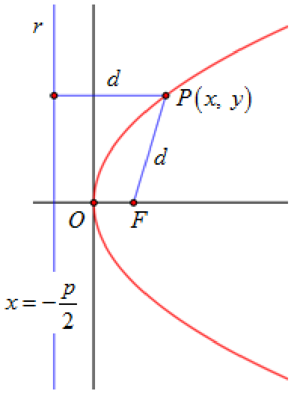
Con $p = 2$, $x^2=-4y$. Si esta parábola se traslada según el vector $\vec{v}$ = (3, 1) se obtiene $(x-3)^2=-4(y-1)$, que se transforma en $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$. Tiene su foco en $F(3, 0)$ y su vértice en $V(3, 1)$; su eje es la recta $x = 3$.

Para dibujarla hay que dar valores a x y calcular y.

Algunos de sus puntos son: (–1, –3); (1, 0); (3, 1), vértice; (5, 0); (7, –3).

Ecuación de la parábola de eje horizontal y vértice en el origen

Sea la parábola de eje horizontal el eje OX, con vértice en $O(0, 0)$, de parámetro p, foco en $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ y directriz la recta $r: x=-\frac{p}{2}$. Entonces, si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, se cumple que:



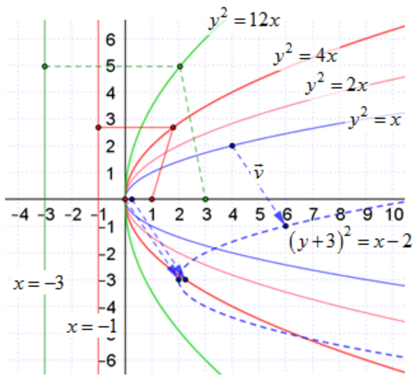
$$d(P,\ F)=d(P,\ r) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Desarrollando se obtiene la ecuación $\underline{y^2=2px}$.

→ La ecuación de la parábola de eje horizontal, parámetro p y vértice en $V(x_0,\ y_0)$ será: $\underline{(y-y_0)^2=2p(x-x_0)}$.

Ejemplos:

En la figura adjunta se representan las parábolas de ecuación:



$y^2=x$, $y^2=2x$, $y^2=4x$ e $y^2=12x$.

Sus parámetros respectivos valen: $p=\frac{1}{2}$, $p = 1$, $p = 2$ y $p = 6$.

Sus focos están, respectivamente, en los puntos:

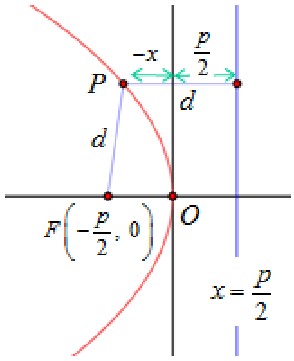
(1/4, 0), (1/2, 0), (1, 0) y (3, 0).

Las directrices de las dos últimas son las rectas $x=-1$ y $x=-3$.

→ La parábola dibujada con línea de trazos es la trasladada de $y^2=x$ según el vector $\vec{v}$ = (2, –3); su ecuación es $(y+3)^2=x-2$.

Ecuación de la parábola de eje horizontal y abierta hacia la izquierda
Esta parábola tiene el foco a la izquierda del vértice; y la directriz a la derecha.

→ En el caso concreto de la parábola de eje horizontal *OX*, con vértice en *O*(0, 0), de parámetro *p*, foco en $F\left(-\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ y directriz la recta $r: x=\dfrac{p}{2}$, se tendrá:



Si $P(x,\ y)$ es un punto de ella, entonces:

$$d(P,\ F)=d(P,\ r) \Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}-x.$$

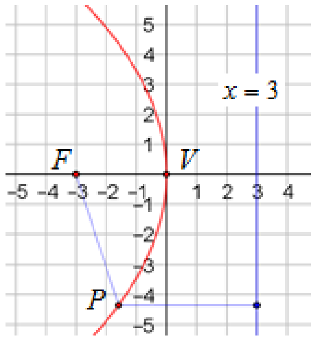
Desarrollando la expresión:

$$\left(\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}-x\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-px+x^2 \Rightarrow \underline{y^2=-2px}.$$

→ La ecuación de la parábola de eje horizontal, parámetro *p* y vértice en el punto $V(x_0,\ y_0)$, con el foco situado a la izquierda del vértice (abierta a la izquierda) es: $\underline{(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)}$.

Ejemplo:
Un punto $P(x,\ y)$ de la parábola con foco en *F*(–3, 0) y directriz la recta *x* = 3, cumple:

$$d(P,\ F)=d(P,\ r) \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+y^2}=3-x.$$



Como la abscisa *x* del punto $P(x,\ y)$ es negativa, la distancia de *P* a *r* es:

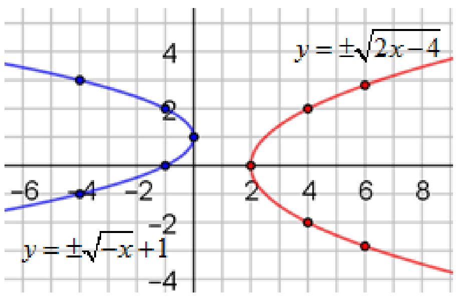
$$d\left(P(x,\ y),\ r: x-3=0\right)=\frac{|x-3|}{\sqrt{1}}=|x-3|=3-x.$$

Elevando al cuadrado:

$$(x+3)^2+y^2=(3-x)^2 \Rightarrow x^2+6x+9+y^2=9-6x+x^2 \Rightarrow y^2=-12x.$$

<u>Observación sobre las parábolas de eje horizontal</u>
Las ecuaciones reducidas de estas parábolas son: $y^2=2px$ o $y^2=-2px$, con *p* > 0.
Si se despeja *y* se tiene:
→ Para $y^2=2px \Rightarrow y=\pm\sqrt{2px}$, que solo está defina para valores de $x\ge 0$.
→ Para $y^2=-2px \Rightarrow y=\pm\sqrt{-2px}$, que solo está defina para valores de $x\le 0$.
En el primer caso se obtiene una parábola abierta a la derecha; en el segundo caso, la parábola se abre hacia la izquierda.

Así, a partir de la ecuación general, ambas parábolas pueden representarse dando valores. Por ejemplo, para:
a) $y^2=2(x-2) \Rightarrow y=\pm\sqrt{2x-4}$, con $x\ge 2$, se pueden encontrar los siguientes puntos:
(2, 0), vértice; (4, 2) y (4, –2); $\left(6,\ \pm\sqrt{8}\right)$.



b) $(y-1)^2=-x \Rightarrow y=\pm\sqrt{-x}+1$, con $x\le 0$.
Algunos de sus puntos son: *V*(0, 1); (–1, 2) y (–1, 0); (–4, 3) y (–4, –1).

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $A(4, -1)$ y $B(-2, 1)$.

2. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $O(0, 0)$ sea doble que la distancia al punto $A(3, 0)$.

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es la mitad que su distancia al punto $A(3, 0)$.

4. Halla la bisectriz del ángulo determinado por las rectas: $r: 4x-2y+6=0$ y $s: x+2y-4=0$.

5. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $x = 6$ es doble que su distancia al punto $(-3, 0)$. Da algunos puntos de ese lugar.

6. Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias:
a) Con centro $C(0, -2)$ y radio 3.
b) Con centro $C(0, -2)$ y que pasa por $P(3, 1)$.
c) Con centro $C(3, -2)$ y tangente al eje OX.
d) Con centro $C(-4, 3)$ y tangente al eje OY.

7. Indica el centro y el radio de las siguientes circunferencias:
a) $(x+4)^2+(y-1)^2=10$; b) $(x-3)^2+y^2=16$; c) $(x+2)^2+(y+2)^2=2^2$.
Expresa cada una de las ecuaciones anteriores en su forma general.

8. Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:
a) $x^2+y^2+2x-6y+6=0$; b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$; c) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$.

9. Para los puntos $A(0, -4)$ y $B(6, 0)$, halla:
a) La mediatriz del segmento que determinan.
b) La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y $O(0, 0)$.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro determinado:
a) Por los puntos $A(-4, 1)$ y $B(2, 3)$.
b) Por los puntos de corte de la recta s: $3x+4y-24=0$ con los ejes de coordenadas.

11. Halla la ecuación de las circunferencias que pasan por el punto $P(2, 1)$ y son tangentes a los ejes de coordenadas.

12. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ en el punto $P(-2, 7)$ de ella.

13. Halla las tangentes a la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ que sean paralelas a la recta $s: y=x+5$.

14. A partir de la definición de elipse y de su ecuación de la forma $d(P, F_1)+d(P, F_2)=2a \Rightarrow$ $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, obtén su <u>ecuación reducida</u>: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

15. Haz una representación gráfica aproximada de la elipse de ecuación $3x^2+4y^2-12=0$.

16. Indica los elementos característicos de las siguientes elipses:

a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$; b) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; c) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$.

Para la última de ellas da su ecuación general.

17. A partir de la ecuación de la elipse centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de semiejes *a* y *b*, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, obtén su <u>ecuación general</u>: $cx^2+dy^2+mx+ny+p=0$.

Utilizando las equivalencias encontradas, halla los elementos característicos de la le elipse de ecuación $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$.

18. Halla los parámetros de la elipse de ecuación $x^2+4y^2-4=0$.

19. A partir de la definición de hipérbola y de su ecuación de la forma $d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)=2a$ $\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, obtén su <u>ecuación reducida</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

20. Haz una representación gráfica aproximada de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$.

21. Dibuja e indica todos los elementos de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) y cuyo eje horizontal mide 4. Halla su ecuación.

22. Haz una representación gráfica aproximada de la hipérbola de ecuación $3x^2-4y^2-12=0$.

23. Indica en cada caso los elementos característicos de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$; b) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$.

En cada caso determina sus asíntotas. Para la última de ellas da su ecuación general.

24. A partir de la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(x_0,\ y_0)$ y de semiejes *a* y *b*, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, obtén su <u>ecuación general</u>: $cx^2+dy^2+mx+ny+p=0$, con *c* y *d* de distinto signo.

Utilizando las equivalencias encontradas, halla los elementos característicos de la le elipse de ecuación $9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$.

25. Obtén la <u>ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas</u>, $\left[xy=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow xy=k\right]$, a partir de la definición y de su ecuación en la forma $d(P,\ F_1)-d(P,\ F_2)=2a \Rightarrow$ $\sqrt{(x+a)^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2a$.

26. Halla para cada una de las siguientes hipérbolas sus vértices y focos, y haz su representación gráfica dañado valores.

a) $xy=8$; b) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$; c) $xy=-4$.

27. Indica en cada caso los elementos característicos de las siguientes parábolas:

a) $(x-1)^2=6y$; b) $(y-2)^2=2(x-3)$; c) $(x-1)^2=-8y$.

Haz su representación gráfica.

28. Halla la ecuación de la parábola:

a) De foco (3, 1) y directriz la recta $y = -1$. b) De foco (0, 1) y directriz la recta $x = -1$.

c) De foco (0, 0) y vértice (0, −1). d) De vértice (0, 2) y directriz $x = 4$.

29. Clasifica las siguientes cónicas y, en cada caso, halla sus elementos característicos:

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$; b) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$; c) $(x-1)^2=4(y-1)$;

d) $(y+1)^2=2x$; e) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$; f) $x^2+4y^2-2x-3=0$;

g) $4x^2-y^2-4=0$; h) $2xy=10$; i) $4x^2+5y^2=40$;

j) $x^2-2x-y=0$; k) $x^2-2y^2=2$; l) $y^2=-2x-2$.

30. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (0, 0) es doble que su distancia al punto (6, 0). Da algunos puntos de ese lugar. ¿Qué cónica resulta? Halla dos de sus elementos característicos.

31. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea la mitad que la distancia a la recta $x = 9$.

32. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea el doble que la distancia a la recta $x = 9$.

33. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (3, 0) sea igual que la distancia a la recta $x = 9$.

34. Resuelve el sistema: $\begin{cases} y=x^2-1 \\ x+y=1 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

35. Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-y=1 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

36. Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2-2x-y=0 \\ (x+1)^2+y=3 \end{cases}$. Da una interpretación geométrica de sus soluciones.

37. Halla los puntos de corte de la elipse de ecuación $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ con la recta $2x+3y+2=0$.