TEMA 9. VECTORES. PRODUCTO ESCALAR

1. VECTORES EN EL PLANO: DEFINICIONES Y OPERACIONES

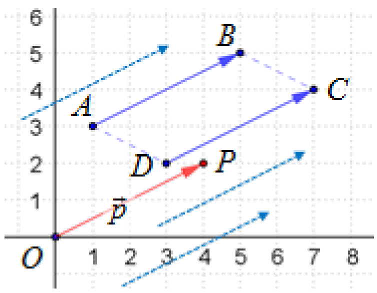
Vector fijo y vector libre

- El vector que tiene por origen el punto *A* y por extremo el punto *B*, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento *AB*. Se denota $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es igual a la distancia entre los puntos *A* y *B*: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A, B)$.

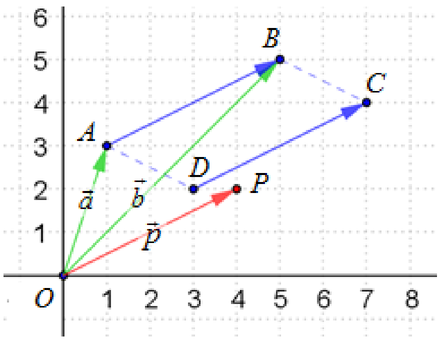
Dirección de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a *A* y a *B*.
Sentido de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de *A* a *B*.



- Dos vectores fijos son equipolentes (iguales) si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices *A*, *B*, *D* y *C* (en ese orden) es un paralelogramo. Todos los vectores representados en la figura adjunta son equipolentes.

- Se llama vector libre a un vector y a todos los equipolentes a él. Así, en la figura los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OP}$ son el mismo libre. El vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, con origen en *O* y extremo en *P* puede ser el representante de todos ellos. La ventaja de este último consiste en que para determinarlo basta con dar solo las coordenadas del punto *P*, extremo del vector.

Ejemplo:



El vector $\overrightarrow{AB}$ de extremos *A*(1, 3) y *B*(5, 5) es equipolente al vector $\overrightarrow{DC}$, de extremos *D*(3, 2) y *C*(7, 4); y ambos equipolentes al vector $\overrightarrow{OP}$ con origen en *O*(0, 0) y extremo en *P*(4, 2). Todos ellos definen al vector $\vec{p}$ = (4, 2).
Puede observarse que las coordenadas de $\vec{p}$ = (4, 2) se obtienen restando las de los puntos *B*(5, 5) y *A*(1, 3), o las de los puntos *D*(7, 4) y *C*(3, 2).
Esto es:

$$\overrightarrow{AB} = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2);\ \overrightarrow{CD} = (7, 4) - (3, 2) = (4, 2).$$

Correspondencia entre puntos y vectores

Entre los puntos de $\mathbf{R}^2$ (del plano cartesiano) y los vectores libres del plano ($\mathbf{V}_2$) existe una *biyección* (una correspondencia unívoca en ambos sentidos):

A cada vector $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\overrightarrow{OP}$, se le asocia el punto *P*.
A cada punto *P* se le asocia el vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

En esquema:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{V}_2 \\ X(x, y) & \to & \vec{x} = (x, y) \end{array}$$

Así, a los puntos *A*(1, 3), *B*(5, 5) y *P*(4, 2), representados en la figura de arriba, les corresponde los vectores: $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (5, 5)$ y $\vec{p} = (4, 2)$, respectivamente.

Operaciones con vectores libres: suma y multiplicación de un vector por un número

Si $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ y $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, entonces se define:

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$.
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2)-(b_1,b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$.
- $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2)$. Si $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si $\lambda < 0$, tendrá sentido contrario.

Notas:

1. La suma cumple las propiedades:

conmutativa: $\left[\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\right]$; asociativa: $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]$;

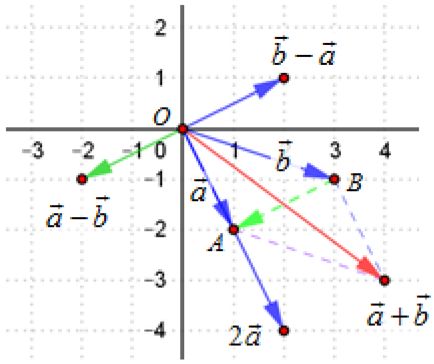
existencia de elemento neutro: $\left[\vec{0}=(0,\ 0)\right]$; y del opuesto: $\left[-\vec{b}=-(b_1,\ b_2)=(-b_1,\ -b_2)\right]$.

2. El producto por un número cumple las propiedades:

distributivas: $\left[\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}\right]$ y $\left[(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}\right]$; "asociativa": $\left[(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})\right]$;

existencia de elemento unidad: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

(λ y μ son números reales: $\lambda,\ \mu \in$ **R**).



Ejemplos:

Si $A = (1, -2)$ y $B = (3, -1)$, se tendrá: $\vec{a} = (1, -2)$; $\vec{b} = (3, -1)$.

a) $\vec{a}+\vec{b} = (1, -2) + (3, -1) = (4, -3)$.

b) $2\vec{a}=2\cdot(1,-2)=(2,-4)$.

c) $\vec{b}-2\vec{a}=(3,-1)-2\cdot(1,-2)=(3,-1)-(2,-4)=(1,3)$.

- En general, el <u>vector determinado por dos puntos</u> $A(a_1,\ a_2)$

y $B(b_1,\ b_2)$, el vector $\overrightarrow{AB}$, es $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$.

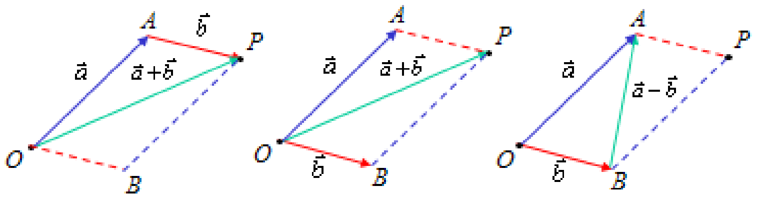
Ejemplo:

Para los puntos $A = (1, -2)$ y $B = (3, -1)$ se tendrá:

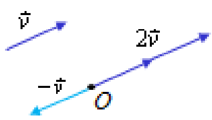
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a} = (3, -1) - (1, -2) = (2, 1)$. $\qquad \overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$.

Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres

Para sumar dos vectores se pone uno a continuación del otro (el origen del segundo en el extremo del primero). El vector suma tiene como origen el origen del primero, y como extremo el extremo del segundo. También puede aplicarse el esquema del paralelogramo, trasladando ambos vectores al origen: la diagonal que parte de O es la suma; la diagonal BA es la resta $\vec{a}-\vec{b}$.

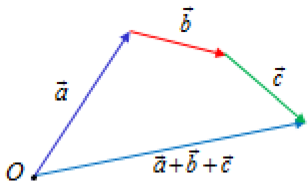


Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

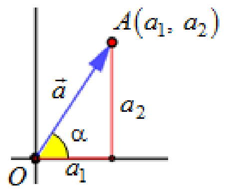
Para sumar geométricamente varios vectores pueden ponerse uno a continuación del otro. El resultado es el vector que tiene como origen el del primer vector y como extremo, el extremo del último vector.



2. MÓDULO Y DIRECCIÓN DE UN VECTOR. APLICACIONES

- El <u>módulo de un vector</u> es su longitud. Puede calcularse aplicando el teorema de Pitágoras.

Si el vector es $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, su módulo es $|\vec{a}| = +\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$.



- La <u>dirección de un vector</u> es un número que viene dado por la tangente del ángulo α, el que forma el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ con el eje horizontal. Se calcula aplicando la fórmula $\tan\alpha = \dfrac{a_2}{a_1}$.

<u>Nota</u>: Para los números complejos se hablaba de módulo y argumento. Si se hubiese definido el número complejo $z = a_1 + a_2 \cdot i$, su forma polar sería $z = (m_\alpha) = |\vec{a}|_\alpha$: el argumento es el ángulo; la dirección, la tangente de ese ángulo.

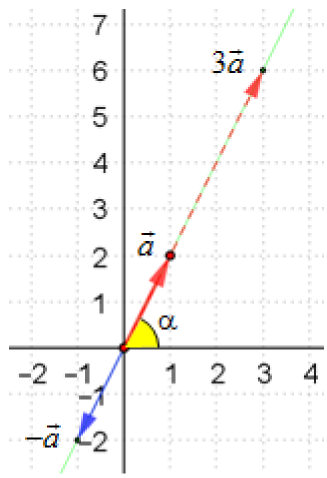
Ejemplo:

a) El módulo del vector $\vec{a}$ = (1, 2) es $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Su pendiente vale 2: $\tan\alpha = \dfrac{2}{1} = 2$.

b) Para el vector $3\cdot\vec{a}$ se cumple que $|3\cdot\vec{a}| = 3\cdot|\vec{a}|$; siendo su pendiente la misma, 2.

En efecto: $3\cdot\vec{a} = 3\cdot(1, 2) = (3, 6) \Rightarrow |3\cdot\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5} = 3\cdot|\vec{a}|$.

La pendiente de $3\cdot\vec{a}$ = (3, 6) es $\tan\alpha = \dfrac{6}{3} = 2$.



c) Para el vector opuesto de $\vec{a}$, para $-\vec{a}$, se cumple que $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$; siendo su pendiente la misma, 2.

En efecto: $-\vec{a} = -(1, 2) = (-1, -2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} = |\vec{a}|$.

La pendiente de $-\vec{a}$ = (–1, –2) es $\tan\alpha = \dfrac{-2}{-1} = 2$.

→ Observa que los vectores $\vec{a}$, $3\cdot\vec{a}$ y $-\vec{a}$ están sobre la misma recta; la de ecuación $y = 2x$, de pendiente 2 (de "dirección" 2).

- En general, $|k\cdot\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|$. Igualmente, $\left|\dfrac{1}{k}\cdot\vec{a}\right| = \left|\dfrac{1}{k}\right|\cdot|\vec{a}|$.

(Las barras de $|k|$ son las de valor absoluto; las barras de $|\vec{a}|$ son las de módulo. A veces, para distinguirlas, el módulo de $\vec{a}$ se denota $\|\vec{a}\|$).

- <u>Vector unitario</u>

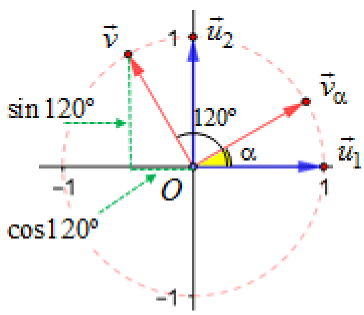
Un vector se llama unitario si tiene módulo 1.

Son vectores unitarios, por ejemplo: $\vec{u}_1$ = (1, 0) y $\vec{u}_2$ = (0, 1).

Son unitarios todos los vectores con origen en O y extremo en los puntos de la circunferencia con centro en O y radio 1.

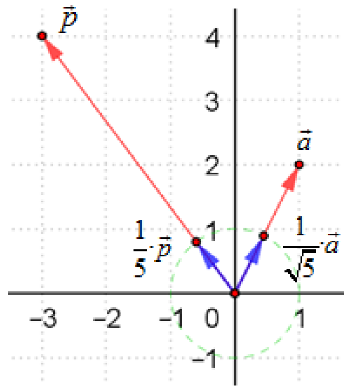
En particular es unitario el vector $\vec{v} = (\cos 120^\circ,\ \sin 120^\circ)$; y cualquier vector de coordenadas $\vec{v}_\alpha = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, pues

$$|\vec{v}_\alpha| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1} = 1 .$$



- Vector unitario en la dirección de un vector dado

A veces se necesita un vector unitario en la dirección de cualquier vector dado $\vec{a} \neq \vec{0} = (0,\ 0)$. Este vector es $\vec{u} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$. (También vale su opuesto, $-\vec{u} = -\dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$).



Ejemplo:

a) Para $\vec{a}$ = (1, 2), como $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \Rightarrow$ el vector

$\dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ es unitario.

También es unitario el vector $-\dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

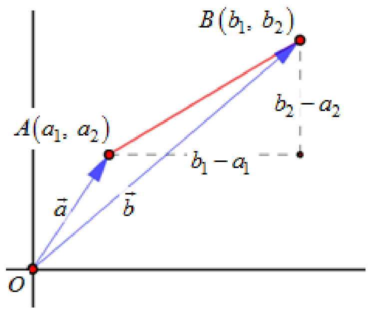
b) Un vector unitario en la dirección del vector $\vec{p}$ = (–3, 4), cuyo modulo vale 5, es $\dfrac{1}{5} \cdot \vec{p}$.

En efecto, si $\vec{p}$ = (–3, 4), su módulo es $|\vec{p}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Siendo $\dfrac{1}{5} \cdot \vec{p} = \dfrac{1}{5}(-3,\ 4) = \left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{5} \cdot \vec{p}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{25}{25}} = 1$.

- Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que determinan.



Si $A(a_1,\ a_2)$ y $B(b_1,\ b_2)$, como $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) \Rightarrow$

$$d(A,\ B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

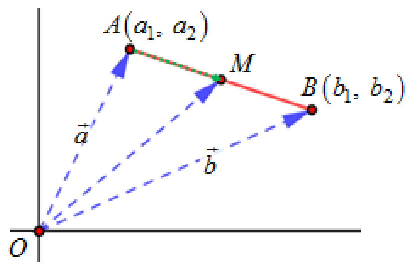
Ejemplo:

Si A = (1, 2) y B = (6, 5), como $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ = (6, 5) – (1, 2) = (5, 3),

la distancia entre A y B es: $d(A,\ B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(6-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

- Punto medio de un segmento

El punto medio del segmento de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ es $M = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.



Puede verse que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Como $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) \Rightarrow \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{b_1 - a_1}{2},\ \dfrac{b_2 - a_2}{2}\right)$,

luego $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = (a_1,\ a_2) + \left(\dfrac{b_1 - a_1}{2},\ \dfrac{b_2 - a_2}{2}\right) = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Ejemplo:

Para A(2, 5) y B(–1, 3) el punto medio es $M = \left(\dfrac{2-1}{2},\ \dfrac{5+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$.

3. COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES. BASES

Dependencia e independencia lineal de vectores

- Dos vectores son <u>linealmente dependientes</u> si tienen la misma dirección (o direcciones paralelas).

Todos los vectores de la forma $\vec{v} = k\cdot\vec{a}$ dependen linealmente del vector $\vec{a}$: las coordenadas de uno son directamente proporcionales a las del otro.

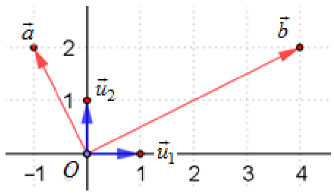
Ejemplo:
Si $\vec{a}$ = (–1, 2), todos los vectores de la forma $k\cdot\vec{a} = k\cdot(-1,\ 2) = (-k,\ 2k)$ tienen la misma dirección que $\vec{a}$. Así, $\vec{a}$ = (–1, 2), $3\vec{a}$ = (–3, 6), $-\vec{a}$ = (1,–2) y $k\cdot\vec{a} = (-k,\ 2k)$ son todos linealmente dependientes entre ellos.

- Dos vectores son <u>linealmente independientes</u> si tienen distinta dirección.

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, entonces no es posible la igualdad $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$.

Ejemplos:
a) Los vectores $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (4, 2) son linealmente independientes. Observa que tiene distinta dirección.

b) Igualmente son linealmente independientes los vectores $\vec{u}_1$ = (1, 0) y $\vec{u}_2$ = (0, 1).



Dependencia lineal de dos vectores

Un vector $\vec{c}$ depende linealmente de otros dos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando el primero se puede escribir en función de los otros dos (como suma o diferencia de ellos, multiplicados por números). Esto es, cuando $\vec{c} = k_1\cdot\vec{a} + k_2\cdot\vec{b}$.

También se dice que $\vec{c}$ es <u>combinación lineal</u> de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo:
Dados $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (4, 2), los vectores que dependen linealmente de ellos son de la forma $\vec{c} = k_1\cdot(-1,\ 2) + k_2\cdot(4,\ 2)$.

Para cada par de valores de k_1 y k_2 se obtiene un vector $\vec{c}$ que depende de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Si $k_1 = 5$ y $k_2 = 3 \Rightarrow \vec{c} = 5\cdot(-1,\ 2) + 3\cdot(4,\ 2) = (-5,\ 10) + (12,\ 6) = (7,\ 16)$.
Si $k_1 = 0$ y $k_2 = -1 \Rightarrow \vec{c} = 0\cdot(-1,\ 2) - 1\cdot(4,\ 2) = (-4,\ -2)$.

→ Para ver si un vector $\vec{c}$ depende linealmente de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ hay que encontrar los valores de k_1 y k_2 que cumplan la igualdad $\vec{c} = k_1\cdot\vec{a} + k_2\cdot\vec{b}$. Para ello hay que resolver un sistema lineal.

Ejemplo:
Dados $\vec{a}$ = (–1, 2), $\vec{b}$ = (4, 2) y $\vec{c}$ = (4, 7), para que $\vec{c} = k_1\cdot\vec{a} + k_2\cdot\vec{b}$, debe cumplirse:

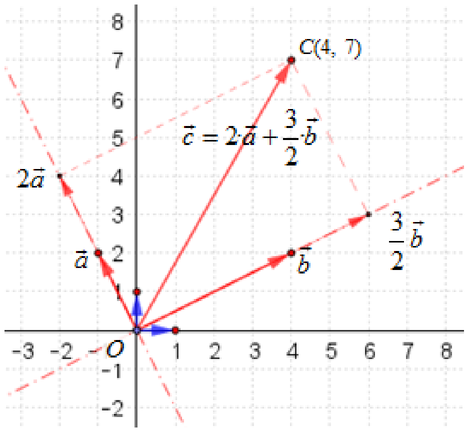
$$(4,\ 7) = k_1\cdot(-1,\ 2) + k_2\cdot(4,\ 2) \Rightarrow (4,\ 7) = (-k_1 + 4k_2,\ 2k_1 + 2k_2) \Rightarrow \begin{cases} 4 = -k_1 + 4k_2 \\ 7 = 2k_1 + 2k_2 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $k_1 = 2;\ k_2 = \frac{3}{2}$. → Esto es: $\vec{c} = 2\cdot\vec{a} + \frac{3}{2}\cdot\vec{b}$.

(Compruébalo haciendo los cálculos oportunos).

Bases en el plano vectorial (en R^2)
En el plano, una base es todo par de vectores linealmente independientes (no paralelos y no nulos).
Esto es, si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base de $\mathbf{R}^2$, entonces:
1) Ambos vectores son linealmente independientes. (Deben tener distinta dirección).
2) Cualquier otro vector $\vec{c}$ puede escribirse como combinación lineal de ellos: existen dos números k_1 y k_2 tales que $\vec{c} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$.
Los números (k_1 y k_2) se llaman componentes de $\vec{c}$, respecto de la base $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$.
(Como se ha visto en el ejemplo anterior, esos números se encuentran resolviendo un sistema de ecuaciones lineales).

Ejemplo:
Los vectores $\{\vec{a} = (-1,\ 2),\ \vec{b} = (4,\ 2)\}$ forman una base del plano vectorial.
1) Es evidente que son linealmente independientes: tienen distinta dirección (sus coordenadas no son directamente proporcionales).
2) Cualquier vector $\vec{v} = (x,\ y)$ se puede escribir en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. (Se verá en el Ejercicio 1). En concreto, el vector $\vec{c}$ = (4, 7) puede escribirse como $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + \frac{3}{2} \cdot \vec{b}$, [así se ha visto en el ejemplo anterior]. Las componentes del vector $\vec{c}$, respecto de $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$, son $k_1 = 2;\ k_2 = \frac{3}{2}$.
Observación: Las coordenadas de C son (4, 7); las componentes de $\vec{c}$ en función de $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ son [2, 3/2]. Esta dicotomía puede generar errores, pues no se ajusta al sistema cartesiano usual.

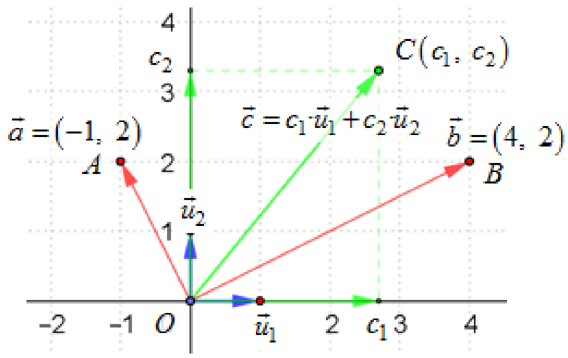


Base canónica
La base canónica, la que se usa si no se advierte nada, es $\{\vec{u}_1 = (1,\ 0),\ \vec{u}_2 = (0,\ 1)\}$. Esta formada por dos vectores unitarios que siguen el sentido positivo de los ejes de cartesianos.
→ En esta base, las componentes de cualquier vector coinciden con sus coordenadas. Esto es, para cualquier vector $\vec{c} = (c_1,\ c_2)$, se cumple que:

$$\vec{c} = (c_1,\ c_2) = c_1 \cdot (1,\ 0) + c_2 \cdot (0,\ 1) \to \vec{c} = (c_1,\ c_2) = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 .$$

En la base canónica, para determinar el vector $\vec{c}$ basta con indicar su extremo, el punto $C(c_1,\ c_2)$.

Por lo mismo, el vector $\vec{a}$ = (–1, 2) también puede escribirse como $\vec{a} = -1 \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2$. Es más corto escribirlo de la primera manera.
Igualmente, $\vec{b}$ = (4, 2) $\Leftrightarrow$ $\vec{b} = 4 \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2$.



Sistema de referencia en el plano euclídeo
La terna $\{O(0,\ 0);\ \vec{u}_1 = (1,\ 0),\ \vec{u}_2 = (0,\ 1)\}$ constituye el sistema de referencia euclídeo, que es el que se utiliza normalmente: el sistema de referencia cartesiano, pero con vectores.
Queda determinado por un punto fijo, $O(0,\ 0)$; y por dos vectores perpendiculares y unitarios, $\vec{u}_1 = (1,\ 0)$ y $\vec{u}_2 = (0,\ 1)$.

4. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

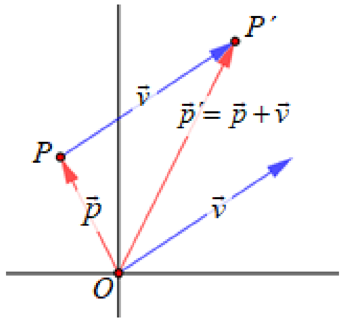
Los movimientos en el plano son transformaciones geométricas que conservan los ángulos y las distancias: la figura transformada tiene la misma forma y tamaño que la original.
Hay tres tipos de movimientos; traslación, giro y simetría.

Traslación

- Una traslación de vector $\vec{v}$ es un movimiento que transforma un punto *P* en otro *P´* de forma que el vector fijo $\overrightarrow{PP'}$ es equipolente a $\vec{v}$.

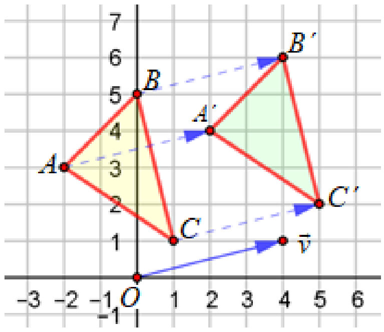
Luego, $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} \Rightarrow \vec{p}' = \vec{p} + \vec{v}$.

Por tanto, si el vector es $\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ y el punto *P* tiene coordenadas *P*(*x*, *y*), como $\vec{p} + \vec{v} = (x,\ y) + (v_1,\ v_2) = (x + v_1,\ y + v_2)$, se tendrá que las coordenadas del trasladado de *P* serán $P'(x + v_1,\ y + v_2)$.



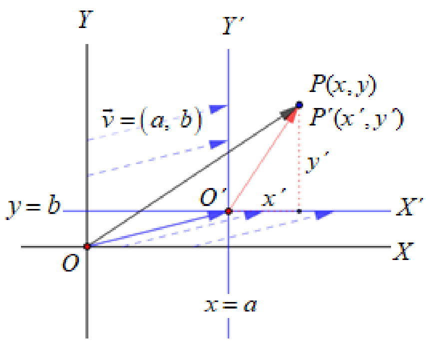
Ejemplo:
El triángulo *A´B´C´* es el trasladado del triángulo *ABC* según el vector $\vec{v}$ = (4, 1).
Todos los puntos trasladados mediante $\vec{v}$ = (4, 1) transforman sus coordenadas sumando 4 a su abscisa y 1 a su ordenada.
Esto es:

A(–2, 3) → *A´*(–2 + 4, 3 + 1) = (2, 4);
B(0, 5) → *B´*(0 + 4, 5 + 1) = (4, 6);
C(1, 1) → *C´*(1 + 4, 1 + 1) = (5, 2).



- Traslación de ejes

Las coordenadas cartesianas de cualquier punto del plano dependen del sistema de referencia establecido. Así, el mismo punto puede tener coordenadas (*x*, *y*) respecto de la base $\{O(0,\ 0);\ \vec{u}_1 = (1,\ 0),\ \vec{u}_2 = (0,\ 1)\}$ y coordenadas (*x´*, *y´*) respecto de la base $\{O'(a,\ b);\ \vec{u}_1 = (1,\ 0),\ \vec{u}_2 = (0,\ 1)\}$, en la cual el origen se ha situado en el punto $O'(a,\ b)$ y los ejes en las rectas *x* = *a* e *y* = *b*: traslación de vector $\vec{v} = (a,\ b)$.

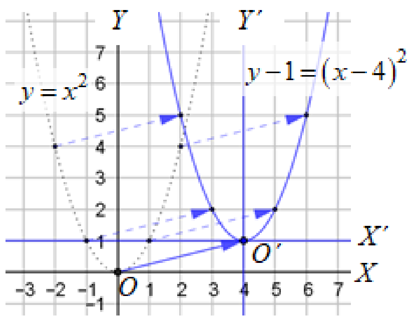


Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, se tendrá:

$$(x,\ y) = (a,\ b) + (x',\ y') = (a + x',\ b + y') \Rightarrow \begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$, ecuaciones que permiten cambiar de una referencia a otra.

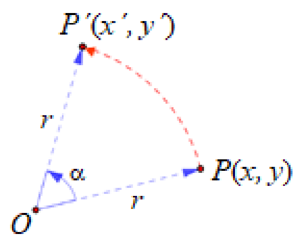
Ejemplo:
La parábola de ecuación $y' = x'^2$, referida a los ejes *X´Y´*, con origen en el punto *O´*(4, 1), puede expresarse como $y - 1 = (x - 4)^2$ referida a los ejes *XY* con origen en *O*(0, 0).

Observa que $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 1 \end{cases}$; por tanto, sustituyendo en $y' = x'^2$ se obtiene: $y - 1 = (x - 4)^2$.



Giros en el plano

- Un giro de centro O y ángulo α es un movimiento que transforma un punto P en otro $P´$ de forma que el ángulo $POP´$ = α y los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP´}$ tienen el mismo módulo: la distancia OP = distancia $OP´$ = r.

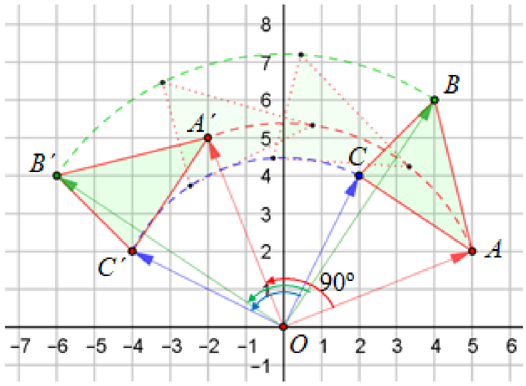


El ángulo de giro se mide en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj.
Se demuestra (Ejercicio 2) que si las coordenadas de P son $P(x, y)$, las coordenadas de $P´(x´, y´)$ vienen dadas por

$$\begin{cases} x´ = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y´ = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \to \text{Si } P(4,1),\ O(0,0) \text{ y } \alpha = 60^\circ \Rightarrow P´: \begin{cases} x´ = 4\cdot\cos 60^\circ - 1\cdot\sin 60^\circ \approx 1{,}13 \\ y´ = 4\cdot\sin 60^\circ + 1\cdot\cos 60^\circ \approx 3{,}96 \end{cases}.$$

Ejemplo:

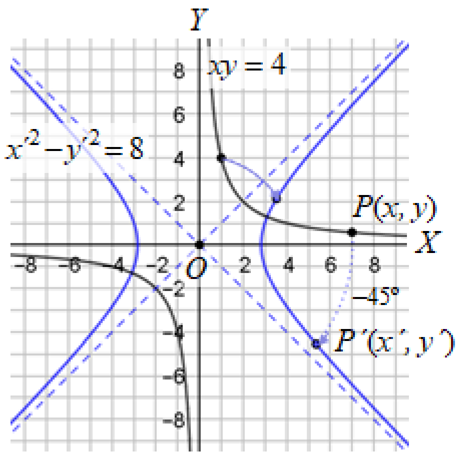
a) El triángulo $A´B´C´$ es el que se obtiene al girar el triángulo ABC con centro $O(0, 0)$ y α = 90º.
Los vértices $A´$, $B´$ y $C´$ se obtienen girando 90º los puntos A, B y C. Para ello, con centro en O y radios OA, OB y OC, respectivamente, se trazan arcos de amplitud 90º, sobre los que se marcan $A´$, $B´$ y $C´$.



En este caso, como $A(5, 2)$, $B(4, 6)$ y $C(2, 4)$, aplicando las ecuaciones de arriba, las coordenadas de los vértices de $A´B´C´$ son:

$$A´: \begin{cases} x´ = 5\cos 90^\circ - 2\sin 90^\circ = -2 \\ y´ = 5\sin 90^\circ + 2\cos 90^\circ = 5 \end{cases} \to A´(-2, 5).$$ De forma análoga, $B´(-6, 4)$ y $C´(-4, 2)$.

b) Si los puntos $P(x, y)$ de la curva de ecuación $xy = 4$ se giran un ángulo de –45º, los puntos $P´(x´, y´)$ de la curva obtenida cumplen la ecuación $(x´)^2 - (y´)^2 = 8$.



Efectivamente, si α = –45º, las ecuaciones

$$\begin{cases} x´ = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y´ = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \text{ son:}$$

$$\begin{cases} x´ = x\cos(-45^\circ) - y\sin(-45^\circ) \\ y´ = x\sin(-45^\circ) + y\cos(-45^\circ) \end{cases} \Rightarrow$$

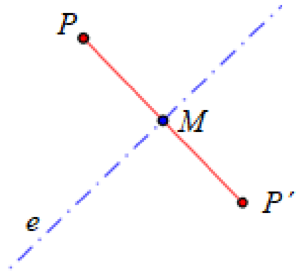
$$\begin{cases} x´ = x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y´ = -x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x´\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y´\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x´\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y´\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

(Unas ecuaciones se obtienen de las otras resolviendo el sistema).
Sustituyendo en $xy = 4$ se tiene:

$$\left(x´\frac{\sqrt{2}}{2} - y´\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x´\frac{\sqrt{2}}{2} + y´\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \Rightarrow \left(x´\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y´\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow (x´)^2 - (y´)^2 = 8.$$

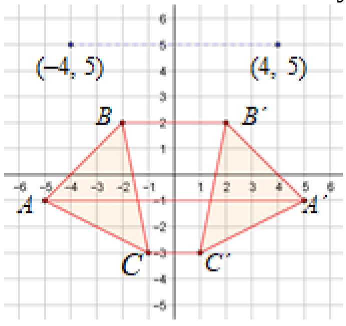
Notas:
1. Ambas ecuaciones son las de una hipérbola equilátera. La primera, $xy = 4$, se dice que está referida a las asíntotas. (Se volverá a este asunto en el Tema 11).
2. Lo hecho aquí ha sido un giro de ejes.

Simetría respecto de un eje (simetría axial)

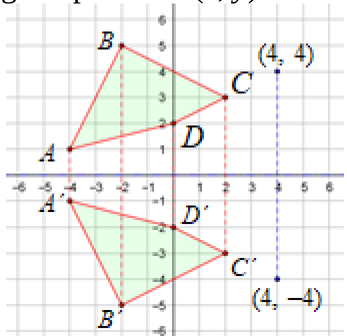


- Una simetría axial (de eje una recta *e*) es un movimiento que transforma un punto *P* en otro *P´* de forma que el eje (la recta *e*) es la mediatriz del segmento *PP´*. Esto es, *P´* es el simétrico de *P*, respecto de *e*, si el segmento *PP´* es perpendicular al eje y las distancias de *P* y *P´* al eje son iguales.
- Son de interés las simetrías respecto de los ejes cartesianos y las simetrías respecto de las bisectrices de los distintos cuadrantes.

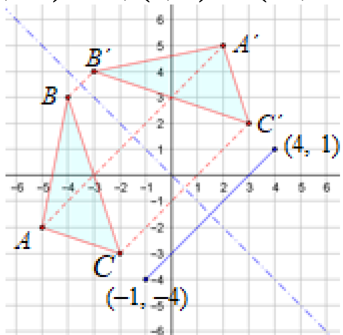
Ejemplos:
En las figuras que siguen puede observarse:
a) En la simetría respecto del eje *OY* cada punto se transforma en otro con la abscisa opuesta y con la misma ordenada: $P(x, y) \to P´(-x, y)$. Así, el punto (–4, 5) se transforma en (4, 5).
b) En la simetría respecto del eje *OX* cada punto se transforma en otro con la misma abscisa y la ordenada opuesta: $P(x, y) \to P´(x, -y)$. Así, el punto (4, 4) se transforma en (4, −4).
c) En la simetría respecto de la bisectriz del segundo cuadrante cada punto se transforma en otro con las coordenadas cambiadas y signo opuesto: $P(x, y) \to P´(-y, -x)$. Así, $(4, 1) \to (-1, -4)$.



Simetría respecto del eje *OY*

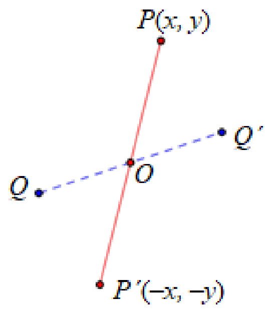


Simetría respecto del eje *OX*



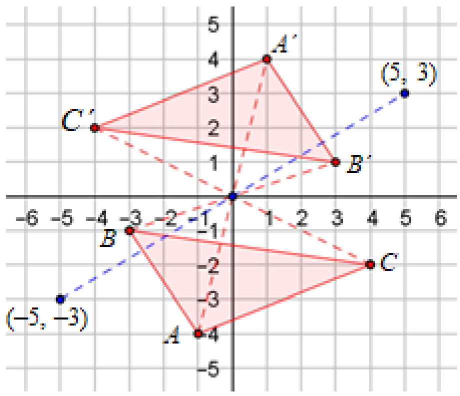
Simetría respecto de la bisectriz del segundo cuadrante

Simetría respecto de un punto (simetría central)



- Una simetría central (de centro un punto *O*) es un movimiento que transforma un punto *P* en otro *P´* de forma que el punto *O* es el punto medio del segmento ***PP´***. Esto es, *P´* es el simétrico de *P*, respecto de *O*, si *P*, *O* y *P´* están alineados y las distancias de *P* y *P´* al punto *O* son iguales.
- Son de interés las simetrías respecto del origen de coordenadas *O*(0, 0). En este caso, el punto de coordenadas $P(x, y)$ se transforma en $P´(-x, -y)$. Así, el punto (5, 3) se transforma en (–5, –3).

Ejemplo:



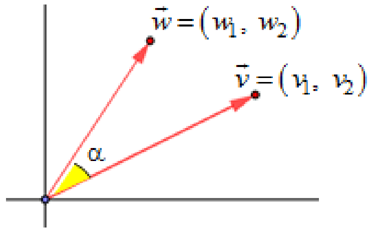
El triángulo *A´B´C´* es el simétrico del triángulo *ABC* respecto del origen.
Como puede observarse, las coordenadas del simétrico de cada vértice se obtienen cambiando de signo las del vértice correspondiente.
Esto es:
$A(-1, -4) \to A´(1, 4)$; $B(-3, -1) \to B´(3, 1)$;
$C(4, -2) \to C´(-4, 2)$.

Nota. Todos esos gráficos pueden hacerse con regla y compás. Aquí se han realizado con **GeoGebra**. Para ello basta con abrir el programa y elegir (en la barra de herramientas) el movimiento que se desea realizar, donde se indican las instrucciones precias.

5. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Definición y propiedades

Dados dos vectores $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$ y $\vec{w}=(w_1,\ w_2)$ se define:



- Producto escalar ordinario: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$.
- Producto escalar canónico: $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2$.

Observaciones:
1. Las definiciones dadas son equivalentes, pero la segunda es más operativa siempre que los vectores vengan dados en función de la base canónica.
2. Conviene observar que el producto escalar de dos vectores es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo:

a) Si de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman un ángulo de 30º y se sabe que $|\vec{v}|=5$ y $|\vec{w}|=4$, entonces,

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=5\cdot4\cdot\cos 60^\circ=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\,.$$

b) Si los vectores son $\vec{v}$ = (4, 2) y $\vec{w}$ = (2, 3) $\Rightarrow$ $\vec{v}\cdot\vec{w}$= (4, 2) · (2, 3) = 8 + 6 = 14.

c) Si $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (6, 3) $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = (–1, 2) · (6, 3) = –6 + 6 = 0.

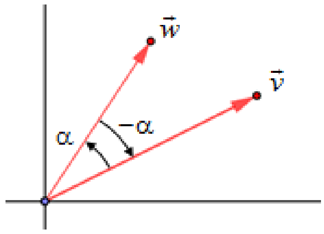
d) Para $\vec{c}$ = (4, 7) y $\vec{d}$ = (2, –3) $\Rightarrow$ $\vec{c}\cdot\vec{d}$ = (4, 7) · (2, –3) = 8 – 21 = –13.

Propiedades

El producto escalar de vectores cumple, entre otras, las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ 2. Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. Para todo $\vec{v}$: $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ 4. Si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow \vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.



→ La demostración de estas propiedades no es difícil. Aquí se van a demostrar la 1ª y la 4ª.

- La demostración de la 1ª se basa en que $\cos(\vec{v},\vec{w})=\cos(\vec{w},\vec{v})$:

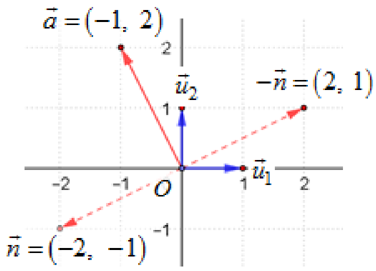
$\cos\alpha=\cos(-\alpha)$.

Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$ y $\vec{w}\cdot\vec{v}=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{w},\vec{v}) \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$.

- La demostración de la 4ª se basa en que $\cos 90^\circ=0$.

Así, si $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})=0$, supuesto que ninguno de los vectores es nulo, debe concluirse que $\cos(\vec{w},\vec{v})=0$; lo que significa que α = 90º 0 a 270º: perpendiculares en ambos casos.

Ejemplos:



a) Los vectores $\vec{u}_1=(1,\ 0)$ y $\vec{u}_2=(0,\ 1)$ son perpendiculares, pues $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(1,\ 0)\cdot(0,\ 1)=0+0=0$.

b) Hay infinitos vectores perpendiculares a uno dado. Si un vector $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$, entonces, todos los de la forma $\vec{n}=k\cdot(-v_2,\ v_1)$ son perpendiculares a $\vec{v}$; en particular $\pm\vec{n}=\pm(-v_2,\ v_1)$. En efecto,

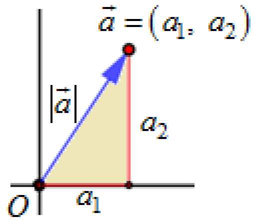
$$\vec{v}\cdot\vec{n}=(v_1,\ v_2)\cdot(-v_2,\ v_1)=v_1\cdot(-v_2)+v_2\cdot v_1=0\,.$$

→ Es el caso de los vectores $\vec{a}$ = (–1, 2), $\vec{n}=(-2,\ -1)$ y $-\vec{n}=(2,\ 1)$ adjuntos.

Aplicaciones del producto escalar

- El módulo de un vector $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, se define así:

$$|\vec{a}|=+\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=+\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}\ .$$



Expresión se obtiene a partir del producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{a}$, pues:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|^2 \ \Rightarrow\ |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\ .$$

Esta definición es coherente con el teorema de Pitágoras: el módulo de un vector es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Ejemplo:
El módulo de los vectores $\vec{v}=(2,-1)$, $\vec{w}=(4,3)$, $\vec{x}=(3,0)$ e $\vec{y}=(0,-4)$ es:

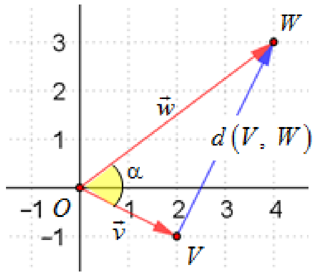
$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\ ;\ |\vec{w}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5;\ |\vec{x}|=\sqrt{3^2}=3;\ |\vec{y}|=\sqrt{(-4)^2}=4$$

- Coseno del ángulo que forman dos vectores

De la definición del producto escalar, $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$, se deduce que: $\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$.

→ Teniendo en cuenta la definición del producto escalar canónico, y suponiendo que $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$ y $\vec{w}=(w_1,\ w_2)$, se tendrá:

$$\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot\ |\vec{w}|}=\frac{v_1w_1+v_2w_2}{\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}}\cdot\sqrt{w_1^{\ 2}+w_2^{\ 2}}}\ .$$

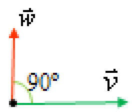


Ejemplo:
El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v}=(2,-1)$ y $\vec{w}=(4,3)$ será:

$$\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{8-3}{\sqrt{5}\cdot 5}=\frac{5}{5\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \Rightarrow \alpha = \text{ángulo}\,(\vec{v},\ \vec{w})\ =\ \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\ = 63{,}4^\circ.$$

- Vectores ortogonales y vectores ortonormales.

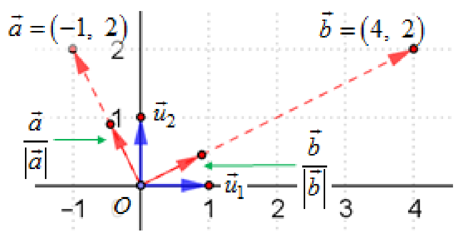
Dos vectores son ortogonales, perpendiculares, si su producto escalar vale cero.



Si dos vectores ortogonales tienen módulo 1, se llaman ortonormales.
Como ya se ha dicho, la base canónica { $\vec{u}_1=(1,\ 0)$ y $\vec{u}_2=(0,\ 1)$ }, que está formada por vectores unitarios y perpendiculares, es una base ortonormal.

Ejemplo:
Los vectores $\vec{a}=(-1,2)$ y $\vec{b}=(4,2)$ son ortogonales, pues

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,2)\cdot(4,2)=-4+4=0.$$



Como $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ y $|\vec{b}|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, los vectores

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ \text{y}\ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot(4,\ 2)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

son perpendiculares y unitarios.

(Recuerda que dado cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ es unitario).

En consecuencia, esos dos últimos vectores también determinan otra base ortonormal.

6. EJERCICIOS FINALES

Para profundizar en los conceptos estudiados se plantean algunos ejercicios.

Ejercicio 1

Demuestra que los vectores $\left\{\vec{a}=(-1,\ 2),\ \vec{b}=(4,\ 2)\right\}$ forman una base del plano vectorial.

Solución:

1) Son linealmente independientes, pues tienen distinta dirección. Para ello hay que ver que la relación $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ es imposible.

En efecto, si $\vec{b}=k\cdot\vec{a} \Rightarrow (4,\ 2)=k(-1,\ 2) \Rightarrow (4,\ 2)=(-k,\ 2k) \Rightarrow k=-4$ y $k=1 \to$ absurdo.

2) Cualquier vector $\vec{v}=(x,\ y)$ se puede escribir en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En efecto, si:

$$(x,\ y)=k_1\cdot(-1,\ 2)+k_2\cdot(4,\ 2) \Rightarrow (x,\ y)=(-k_1+4k_2,\ 2k_1+2k_2) \Rightarrow \begin{cases} x=-k_1+4k_2 \\ y=2k_1+2k_2 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{cases} x=-k_1+4k_2 \\ y=2k_1+2k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-2E2 \\ E2+2E1 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=-5k_1 \\ y+2x=10k_2 \end{cases} \Rightarrow k_1=\frac{-x+2y}{5};\ k_2=\frac{2x+y}{10}.$$

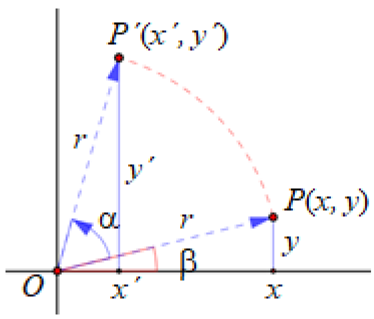
Por ejemplo, si el vector es $\vec{v}=(-12,\ 9) \Rightarrow k_1=\dfrac{12+2\cdot 9}{5}=6;\ k_2=\dfrac{-24+9}{10}=-\dfrac{3}{2}$; lo que significa que $(-12,\ 9)=6(-1,\ 2)-\dfrac{3}{2}(4,\ 2)$.

Ejercicio 2

Demuestra que el giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo α transforma el punto $P(x, y)$ en $P'(x', y')$, de coordenadas $\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$.

Solución:

Si el vector $\overrightarrow{OP}$ forma un ángulo β con el eje OX, entonces al girarlo un ángulo α, el vector $\overrightarrow{OP'}$ formará con OX un ángulo $\beta+\alpha$.



Se cumple que:

$$\overrightarrow{OP}:\begin{cases} x=r\cos\beta \\ y=r\sin\beta \end{cases};\ \overrightarrow{OP'}:\begin{cases} x'=r\cos(\beta+\alpha) \\ y'=r\sin(\beta+\alpha) \end{cases}.$$

Aplicando las fórmulas de seno y coseno de $(\beta+\alpha)$, se tiene:

$$\overrightarrow{OP'}:\begin{cases} x'=r(\cos\beta\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\sin\alpha) \\ y'=r(\sin\beta\cdot\cos\alpha+\cos\beta\cdot\sin\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP'}:\begin{cases} x'=(r\cos\beta)\cos\alpha-(r\sin\beta)\sin\alpha \\ y'=(r\cos\beta)\cdot\sin\alpha+(r\sin\beta)\cdot\cos\alpha \end{cases} \to \text{(sustituyendo } \overrightarrow{OP}:\begin{cases} x=r\cos\beta \\ y=r\sin\beta \end{cases}\text{, se obtiene)} \to$$

$$\overrightarrow{OP'}:\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}.$$

$\to$ Resolviendo este sistema respecto de x e y se obtienen las ecuaciones $\begin{cases} x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha \\ y=-x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$, que permiten obtener las coordenadas de P a partir de las de P'.

Ejercicio 3

Utilizando un transportador de ángulos y un compás aplica un giro, con centro en *O*(0, 0) y ángulo 120º, al triángulo *ABC* de vértices *A*(4, –2), *B*(5, 2) y *C*(2, 1).
Aplicando las ecuaciones vistas en el problema anterior halla las coordenadas de los vértices del triángulo *A´B´C´* que se obtiene.

Solución:

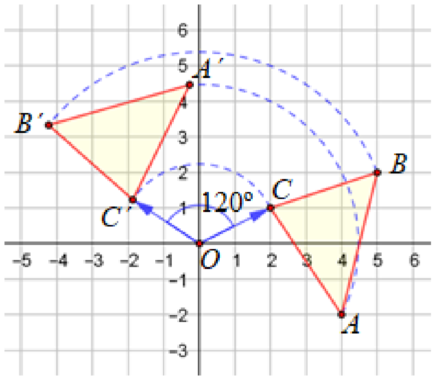
Se dibuja el triángulo de vértices *A*(4, –2), *B*(5, 2) y *C*(2, 1).
Con centro en *O* y radios *OA*, *OB* y *OC* se trazan arcos de amplitud 120º. Se obtienen así los vértices del triángulo *A´B´C´*.
Nota: Los puntos *A´*, *B´* y *C´* pueden obtenerse con un compás midiendo consecutivamente dos arcos de radios *OA*, *OB* y *OC*, respectivamente, a partir de los vértices *A*, *B* y *C*.

Sus coordenadas son:

$$A´:\begin{cases} x´=4\cos 120º-(-2)\sin 120º\approx -0,27 \\ y´=4\sin 120º-2\cos 120º\approx 4,46 \end{cases} \to A´(-0{,}27,\ 4{,}46);$$

$$B´:\begin{cases} x´=5\cos 120º-2\sin 120º\approx -4,23 \\ y´=5\sin 120º+2\cos 120º\approx 3,33 \end{cases} \to B´(-4{,}23,\ 3{,}22);$$

$$C´:\begin{cases} x´=2\cos 120º-\sin 120º\approx -1,87 \\ y´=2\sin 120º+\cos 120º\approx 1,23 \end{cases} \to C´(-1{,}87,\ 1{,}23).$$



Ejercicio 4

Partiendo de la definición del producto escalar ordinario y aplicando la propiedad distributiva deduce la expresión del producto escalar canónico.

Solución:

En efecto, si $\vec v=(v_1,\ v_2)$ y $\vec w=(w_1,\ w_2)$; esto es: $\vec v=v_1\vec u_1+v_2\vec u_2$ y $\vec w=w_1\vec u_1+w_2\vec u_2$, entonces:

$$\vec v\cdot\vec w=(v_1\vec u_1+v_2\vec u_2)\cdot(w_1\vec u_1+w_2\vec u_2)=v_1\cdot w_1(\vec u_1\cdot\vec u_1)+v_1\cdot w_2(\vec u_1\cdot\vec u_2)+v_2\cdot w_1(\vec u_2\cdot\vec u_1)+v_2\cdot w_2(\vec u_2\cdot\vec u_2)\to$$

$$\to \text{(como } (\vec u_1\cdot\vec u_1)=1;(\vec u_1\cdot\vec u_2)=0;(\vec u_2\cdot\vec u_1)=0;(\vec u_2\cdot\vec u_2)=1)\Rightarrow \vec v\cdot\vec w=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2.$$

Ejercicio 5

Demuestra que si *P* es un punto de una circunferencia de diámetro *AB*, entonces los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son perpendiculares.

Solución:

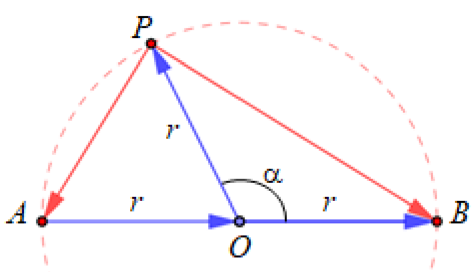
Como puede apreciarse en el dibujo:

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP};\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}\Rightarrow\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}.$$

Los vectores $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OP}$ tienen módulo *r*, el radio de la circunferencia.

El ángulo que forman $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$ con $\overrightarrow{OP}$ es α.

Los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ serán perpendiculares si su producto escalar vale 0: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.



Multiplicando:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)\ =\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$$ = (utilizando la definición de producto escalar ordinario) = $r\cdot r\cdot\cos 0º-r\cdot r\cdot\cos\alpha+r\cdot r\cdot\cos\alpha-r\cdot r\cdot\cos 0º=0$.

→ Recuerda: todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. En este caso, el ángulo central correspondiente al inscrito *APB* abarca 180º, un diámetro.

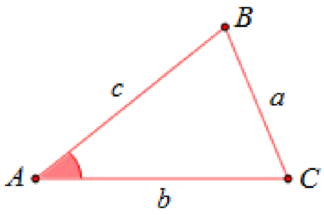
Ejercicio 6

Utilizando el producto escalar, demuestra el teorema del coseno para el triángulo *ABC*.

Solución:

Recuerda lo que decía el teorema del coseno:

"En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman".



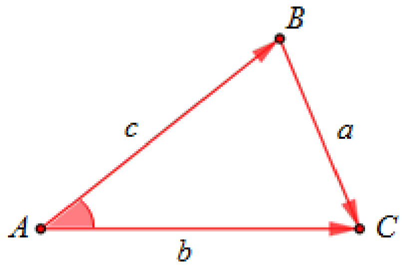
Esto es, se cumplen las relaciones:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$.

→ A continuación se demuestra la primera de esas relaciones: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$.



Para ello dibujamos sobre los lados del triángulo los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ que se observan, cuyos módulos son *c*, *b* y *a*, respectivamente. Esto es:

$\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right| = a^2$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| = b^2$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = c^2$ [1]

Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Multiplicando:

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ = (sustituyendo [1]) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = b^2 - \left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + c^2 \rightarrow$

Como $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\hat{A}$ y $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}$.

Nota: Utiliza la misma estrategia para demostrar alguna de las otras fórmulas.

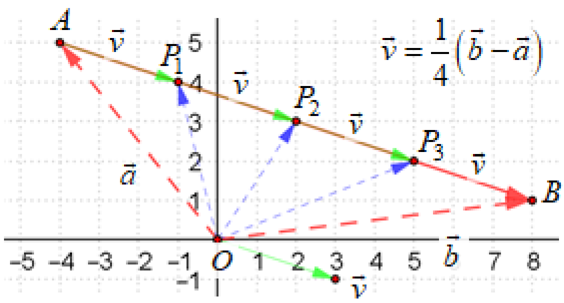
Ejercicio 7

Dados los puntos *A*(–4, 5) y *B*(8, 1), determina las coordenadas de los puntos que dividen el segmento *AB* en 4 partes iguales.

Solución:

Son tres puntos, P_1, P_2 y P_3, los que dividen un segmento en 4 partes. Si las partes son iguales, entonces

$\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \left|\overrightarrow{P_3B}\right| = \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$



Como $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ = (8, 1) – (–4, 5) = (12, –4) ⇒

$\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ = (3, –1).

Con esto:

$\overrightarrow{OP_1} = \vec{a} + \vec{v}$ = (–4, 5) + (3, –1) = (–1, 4).

$\overrightarrow{OP_2} = \vec{a} + 2\vec{v}$ = (–4, 5) + 2 · (3, –1) = (2, 3).

$\overrightarrow{OP_3} = \vec{a} + 3\vec{v}$ = (–4, 5) + 3 · (3, –1) = (5, 2).

Luego, los puntos buscados son: $P_1(-1,\ 4)$, $P_2(2,\ 3)$ y $P_3(5,\ 2)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dados los puntos $A(1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, -3)$, represéntalos y determina las coordenadas de los vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$.

b) Halla y representa gráficamente el vector $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

c) Comprueba que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

2. Dados los vectores $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1)$ y $\vec{c} = (4, 5)$ calcula:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; b) $2\vec{a}-\vec{b}$; c) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$: d) $-3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$

3. Dados los vectores del plano $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 3)$, representa gráficamente:

$\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{a} + 3\vec{b}$

4. Para los vectores del ejercicio anterior, ¿observas alguna relación entre los extremos de $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$ …? ¿Podrías decir dónde se encontrarán los extremos de todos los vectores de la forma $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, siendo λ un número real?

5. Considera el vector fijo de extremos $A(1, 2)$ y $B(4, 3)$.

a) Halla su módulo.

b) Da los extremos de dos vectores que sean equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ del ejercicio anterior. Da también su vector libre asociado.

6. Representa los puntos $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 0)$. Halla otro punto D de manera que $ABDC$ (en ese orden) sea un paralelogramo.

7. Para el paralelogramo $ABDC$ del ejercicio anterior, comprueba que las diagonales se cortan en su punto medio. Esto es, que el punto medio del segmento AD es el mismo que el punto medio del segmento BC.

8. Para el mismo paralelogramo $ABDC$, calcula lo que miden sus lados y sus diagonales.

9. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-1, 4)$ y $B(3, -2)$ en tres partes iguales.

10. Dados $\vec{a} = (-1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 5)$ encuentra p y q para que $p\vec{a} + q\vec{b} = (2, -3)$.

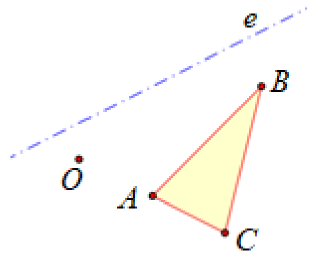
11. Dada la parábola $y = x^2 + 4x$, halla la ecuación de su trasladada según el vector $\vec{v} = (5, 3)$. Dibuja ambas parábolas indicando las coordenadas del vértice de cada una de ellas. Además, se pide:

a) Escribe cada una de esas ecuaciones en la forma $y - y_0 = (x - x_0)^2$.

b) Comprueba que las coordenadas (x_0, y_0) coinciden con las del vértice de cada una de ellas.

c) Indica el vector de traslación que permite obtenerlas a partir de la de ecuación $y = x^2$.

12. En la figura adjunta se da el triángulo *ABC*, el punto *O* y la recta *e*.
Utilizando regla y compás, dibuja:
a) El triángulo girado 120º de *ABC*, siendo *O* el centro de giro.
b) El triángulo simétrico de *ABC*, siendo *e* el eje de simetría.



13. Dado el triángulo de vértices *A*(1, –1), *B*(4, 1) y *C*(2, 3), dibuja, indicando los nuevos vértices de su triángulo:
a) Simétrico respecto el origen de coordenadas (simetría central).
b) Simétrico respecto del eje la recta vertical $x = -1$ (simetría axial).
c) Simétrico respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, recta $y = -x$.

14. Demuestra que los vectores del plano $\vec{a}$ = (2, 1) y $\vec{b}$ = (–1, 3) forma una base. Expresa el vector $\vec{v}$ = (–3, 4) en función de dicha base.

15. En la base $\{\vec{a} = (2,\ 1),\ \vec{b} = (-1,\ 3)\}$ se sabe que $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = -3\vec{a} + 5\vec{b}$. Halla $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

16. Para los vectores $\vec{a}$ = (–1, 2) y $\vec{b}$ = (3, 5), halla su producto escalar y el ángulo que forman.

17. Halla un vector perpendicular a cada uno de los vectores del ejercicio anterior. Comprueba que tu resultado es correcto.

18. Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$, calcula:
a) $\vec{u}\cdot(3\vec{u} - 2\vec{v})$; b) El ángulo que forman ambos vectores.

19. Dados los vectores $\vec{a}$ = (3, *y*), $\vec{b}$ = (2, –1) determina el valor de *y* para que:
a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.
b) El módulo de $\vec{a}$ sea doble que el de $\vec{b}$.
c) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección.

20. Dado el vector $\vec{v}$ = (–3, 4), halla:
a) Los vectores unitarios en la dirección de $\vec{v}$.
b) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ de módulo 2.
Representa gráficamente los vectores hallados.

21. Aplicando el producto escalar halla el área del triángulo de vértices *A* = (–1, 2), *B* = (4, 3) y *C* = (2, –1).

22. Halla, en la dirección del vector de extremos *A* = (–1, 2) y *B* = (4, 3):
a) Un punto *C*, tal que la distancia de *A* a *C* sea doble que la distancia de *B* a *C*.
b) Un punto *D*, tal que la distancia de *A* a *D* sea la mitad que la distancia de *B* a *D*.