TEMA 5. INECUACIONES Y SISTEMAS

1. INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas (en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas). Los signos de desigualdad son: <, ≤, >, ≥
Las inecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas.

• Soluciones de una inecuación son los valores de la(s) incógnita(s) que cumplen la desigualdad. En las inecuaciones con una incógnita el conjunto de soluciones suele darse mediante intervalos. En las inecuaciones con dos incógnitas, el conjunto de soluciones suele ser una región del plano.

Ejemplos:
a) $5x-20\geq 0$ es una inecuación de primer grado. Su solución son todos los números $x\geq 4$.
b) $x^3-3x>-2$ es una inecuación de tercer grado. Una de sus soluciones es $x = 0$, pues $0 > –2$.
El número $x = –3$ no es solución, pues $(-3)^3-3\cdot(-3)=-27+9=-18$ no es mayor que –2.
c) $x-\sqrt{x}<6$ es una inecuación con raíces. Una de sus soluciones es $x = 4$; otra es $x = 0$; $x = 16$ no es solución. Tiene infinitas soluciones; ninguna de ellas puede ser negativa.
d) $\dfrac{2}{x-3}\leq 1$ es una inecuación racional. Los números reales mayores o iguales que 5, $x \geq 5$, forman parte de su conjunto de soluciones, pero tiene más. (Intenta encontrar alguna que sea menor que 5).

• En las inecuaciones pueden aparecer expresiones polinómicas, racionales, con raíces…; esto hace que los métodos y herramientas de resolución sean variados, buscando simplificar la expresión inicial hasta que la incógnita *x* esté despejada, apareciendo $x\leq k$ o $x\geq k$.

Claves para resolver una inecuación
1) Resolver una inecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una inecuación hay que despejar la incógnita; para ello, generalmente, hay que transformar la inecuación inicial en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que despejar sea fácil.
2) Las transformaciones que pueden hacerse en una inecuación dependen de su naturaleza, pero en todos los casos hay que asegurar que la cadena de equivalencias sea cierta: cada paso debe ser posible y estar bien dado. Para ello siempre hay que tener en cuenta las reglas de transformación de desigualdades. Algunas de estas reglas son:
→ Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta una misma cosa (número o expresión), la desigualdad se mantiene.

Si $A(x)<B(x) \Rightarrow A(x)\pm n<B(x)\pm n$; $A(x)\pm n(x)<B(x)\pm n(x)$.

→ Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por una misma cosa positiva, la desigualdad se mantiene.

Si $A(x)<B(x)$, $n>0$ y $n(x)>0 \Rightarrow A(x)\cdot n<B(x)\cdot n$; $A(x)\cdot n(x)<B(x)\cdot n(x)$;
$A(x):n<B(x):n$; $A(x):n(x)<B(x):n(x)$.

→ Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por una misma cosa negativa, la desigualdad cambia de sentido.

Si $A(x)<B(x)$, $n<0$ y $n(x)<0 \Rightarrow A(x)\cdot n>B(x)\cdot n$; $A(x)\cdot n(x)>B(x)\cdot n(x)$;
$A(x):n>B(x):n$; $A(x):n(x)>B(x):n(x)$.

Estas transformaciones permiten transponer términos de un miembro a otro de la desigualdad.

Observaciones útiles

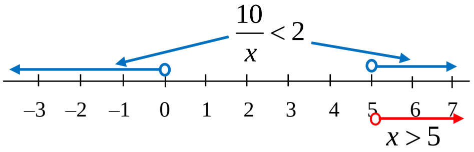
1. $A(x)<B(x) \Leftrightarrow B(x)>A(x) \Leftrightarrow -A(x)>-B(x) \Leftrightarrow -B(x)<-A(x)$.
Se entiende fácilmente con números. Así, por ejemplo: $6 < 10 \Leftrightarrow 10 > 6 \Leftrightarrow -6 > -10 \Leftrightarrow -10 < -6$.
Si aparece alguna *x*, que es lo sucede en una inecuación, la situación puede complicarse.

- Es sencillo ver que $-x<4 \Leftrightarrow x>-4$ → basta con multiplicar por –1.
- En cambio $\frac{10}{x}<2$ <u>no</u> es equivalente a $10<2x$. La segunda expresión, $10<2x$, se cumple para

todo $x > 5$. En cambio, $\frac{10}{x}<2$ también se cumple si $x < 0$.

Esto es:

Las soluciones de $\frac{10}{x}<2$ son todos los números negativos o mayores que 5: $x\in(-\infty,\ 0)\cup(5,\ +\infty)$. (Compruébalo).



Las soluciones de $10<2x$ son solo los números mayores que 5: $x\in(5,\ +\infty)$.
¿Te extraña? Si es así, debes considerar que *x* puede ser positiva o negativa.

- Si *x* es positiva, entonces de $\frac{10}{x}<2$ → (al multiplicar por algo positivo, la desigualdad se

mantiene) $\Rightarrow 10<2x \Rightarrow x>5$.

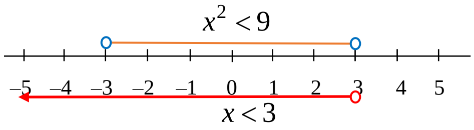
- Pero si *x* es negativa, entonces de $\frac{10}{x}<2$ → (al multiplicar por negativo, la desigualdad cambia

de sentido) $\Rightarrow 10>2x \Rightarrow 5>x$; o sea, $x<5$, pero como *x* debe ser negativa, entonces, $x<0$.

2. Si $A(x)<B(x)$ <u>no</u> puede concluirse que $[A(x)]^2<[B(x)]^2$ → $-5 < 3$, pero $(-5)^2>3^2$.

Tampoco la recíproca es cierta: Si $[A(x)]^2<[B(x)]^2$, no puede asegurarse que $A(x)<B(x)$.

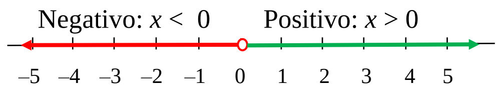
Por ejemplo: $x^2<9$ no se cumple siempre que $x<3$; hay que deducir también que *x* debe ser mayor que –3.
Por tanto, $x^2<9 \not\Rightarrow x<3$; tampoco $x<3 \not\Rightarrow x^2<9$.
La solución de $x^2<9$ es el intervalo (–3, 3).
La solución de $x<3$ es el intervalo (–∞, 3).



3. Muchas veces interesa conocer solo el signo de una expresión algebraica. Esto es, saber cuándo es menor que cero (negativa) o cuándo es mayor que cero (positiva). El mejor procedimiento, salvo en casos inmediatos, consiste en descomponer dicha expresión en factores y, después, tener en cuenta las reglas de los signos:

$(+)\cdot(-)=(-)<0$ $\quad(+)\cdot(+)=(+)>0$ $\quad(-)\cdot(+)=(-)<0$ $\quad(-)\cdot(-)=(+)>0$
$(+):(-)=(-)<0$ $\quad(+):(+)=(+)>0$ $\quad(-):(+)=(-)<0$ $\quad(-):(-)=(+)>0$

Decir que algo es negativo, equivale a que es menor que 0: $x < 0$; y que algo es positivo, a que es mayor que 0: $x > 0$.



4. Las soluciones de la inecuación $A(x)<B(x)$ están siempre asociadas (relacionadas) con las de la ecuación $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x)=0$.
Las soluciones de una ecuación son números reales; supongamos que $x=a$, $x=b$ …
Las soluciones de la inecuación asociada son intervalos con extremos esos números. Podrían ser los intervalos: $(-\infty,\ a)$, $(a,\ b)$, $(b,\ +\infty)$ …: hay que determinarlos en cada caso.

2. INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Son de la forma $ax+b\geq 0$ $\to$ ($a\neq 0$ y b son números; el símbolo $\geq$ puede ser sustituido por $>$, $<$ o $\leq$).
Se resuelven despejando x:

$$ax+b\geq 0 \Rightarrow ax\geq -b \Rightarrow x\geq -\frac{b}{a}, \text{ si } a>0; \qquad x\leq -\frac{b}{a}, \text{ si } a<0.$$

La solución es siempre un intervalo: cerrado para inecuaciones con $\leq$ o $\geq$; abierto, para inecuaciones con $<$ o $>$.
Para evitar confusiones conviene que el coeficiente de x sea positivo; para ello, si fuese necesario, hay que transponer términos.

Ejemplos:

a) $3x+7\leq 0 \Rightarrow 3x\leq -7 \Rightarrow x\leq -\frac{7}{3}$. La solución es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$.

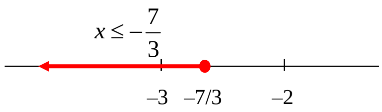
b) $4-5x<0 \Rightarrow 4<5x \Rightarrow 5x>4 \Rightarrow x>\frac{4}{5}$. La solución es el intervalo $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

c) $-5x\geq 4(x-5) \Rightarrow -5x\geq 4x-20 \Rightarrow 20\geq 9x \Rightarrow \frac{20}{9}\geq x \Rightarrow x\leq \frac{20}{9}$ $\to$ Intervalo $\left(-\infty, \frac{20}{9}\right]$.

d) $\frac{5-x}{3}<3x+5 \Rightarrow 5-x<9x+15 \Rightarrow -10<10x \Rightarrow -1<x \Rightarrow x>-1$ $\to$ Intervalo $(-1, +\infty)$.

<u>Observación</u>: En todos los casos puedes optar por resolver la ecuación asociada y, después, probar a izquierda y derecha de las soluciones correspondientes.
Esto es, puedes resolver las ecuaciones $3x+7=0$, $4-5x=0$, $-5x=4(x-5)$ y $\frac{5-x}{3}=3x+5$.

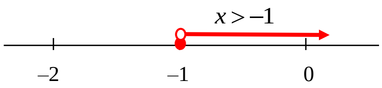
- Para $3x+7=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{3}$.



La solución de la inecuación $3x+7\leq 0$ será el intervalo de la izquierda, $x\leq -\frac{7}{3}$; o el intervalo de la derecha, $x\geq -\frac{7}{3}$.

Se determina probando: si $x<-\frac{7}{3}$ (por ejemplo, $x=-3$), el valor de $3x+7$ es negativo. Luego la solución de $3x+7\leq 0$ será $x\leq -\frac{7}{3}$.

- Para d) $\frac{5-x}{3}=3x+5 \Rightarrow x=-1$.



La solución de la inecuación $\frac{5-x}{3}<3x+5$ será el intervalo de la izquierda, $x<-1$; o el intervalo de la derecha, $x>-1$.

Se determina probando: si $x<-1$ (por ejemplo, $x=-2$), sustituyendo en $\frac{5-x}{3}<3x+5$ se tiene $\frac{5-(-2)}{3}<3\cdot(-2)+5 \to \frac{7}{3}<-1$, que es falso. Por tanto, la solución es el intervalo alternativo: $x>-1$.
(Si una ecuación lineal vale 0 en un punto, en cualquier otro punto será mayor o menor que 0).

3. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma $ax^2+bx+c\le 0$ con $a\ne 0$. El signo $\le$ puede sustituirse por <, > o $\ge$.
Para obtener la solución, primero conviene resolver la ecuación de segundo grado asociada, $ax^2+bx+c=0$, y escribir el trinomio ax^2+bx+c como producto de factores.
Dependiendo de las raíces de esa ecuación, podrá escribirse:

- $ax^2+bx+c\le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)\le 0$, si hay dos soluciones distintas x_1 y x_2.
- $ax^2+bx+c\le 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)^2\le 0$, si solo hay una solución doble, x_1.
- Si no hay soluciones reales, la inecuación no puede descomponerse en factores; y viceversa.

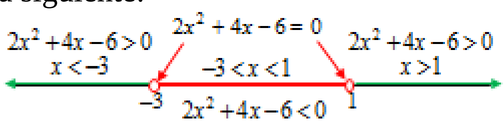
En cada caso, estudiando los signos de los factores se encuentran los intervalos solución. Para determinar esos signos es útil representar las raíces de la ecuación sobre la recta real y probar con un número perteneciente a cada intervalo.

Ejemplos:
a) Resolución de $2x^2+4x-6<0$.
1) Se resuelve $2x^2+4x-6=0 \rightarrow x_1=-3$ y $x_2=1 \Rightarrow 2x^2+4x-6=2(x+3)(x-1)$.
2) En consecuencia: $2x^2+4x-6<0 \Leftrightarrow 2(x+3)(x-1)<0$.
3) Como el primer factor, el número 2, es positivo, el signo del producto dependerá de los signos que tomen los otros dos factores: $(x+3)$ y $(x-1)$.
$(+)\cdot(-)\rightarrow (x+3>0)\cdot(x-1<0) \rightarrow (x>-3)$ y $(x<1) \Rightarrow -3<x<1$;
$(-)\cdot(+)\rightarrow (x+3<0)\cdot(x-1>0) \rightarrow (x<-3)$ y $(x>1) \Rightarrow$ No hay valores comunes.
La solución es cualquier punto del intervalo $(-3, 1)$.

b) Resolución de $x^2+4x+4\le 0$.
1) Se resuelve la ecuación $x^2+4x+4=0 \rightarrow x=-2$, doble $\Rightarrow x^2+4x+4=(x+2)^2$
2) $x^2+4x+4\le 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\le 0$.
3) Como un cuadrado nunca es negativo, la inecuación planteada solo es cierta para $x=-2$, que verifica la igualdad.
Consecuencia: la inecuación $x^2+4x+4=(x+2)^2\ge 0$, se cumple para cualquier número real x.

c) Resolución de la inecuación $-x^2+4x-6<0$.
1) Como $-x^2+4x-6=0$ no tiene soluciones reales, solo hay dos posibilidades para el valor de $-x^2+4x-6$: o siempre es mayor que cero; o siempre es menor que cero.
2) Como para $x=0$ vale -6, se deduce que siempre será negativa. Esto es, $-x^2+4x-6<0$ es cierta para todo valor de x.
Consecuencia: $-x^2+4x-6>0$ no tiene solución.

<u>Observaciones:</u>
1) Cuando se resuelve una ecuación de segundo grado, $ax^2+bx+c=0$, se hallan los valores de x que hacen que la expresión ax^2+bx+c valga 0. Por lo tanto, en los demás valores de x, dicha expresión será mayor que 0 o menor que 0.
Así, por ejemplo, $2x^2+4x-6=0$ cuando $x=-3$ o $x=1$. Luego, en los demás puntos ($x<-3$; $-3<x<1$; $x>1$) se cumple que $2x^2+4x-6\ne 0$: será mayor o menor que 0.
Gráficamente, la situación es la siguiente:

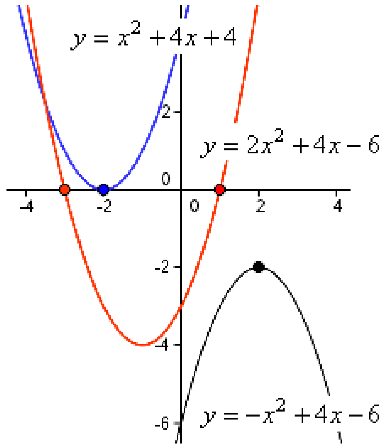


2) Interpretación geométrica de las soluciones de inecuaciones de segundo grado

Puede ser oportuno recordar que la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. En particular:

a) Si se representa gráficamente $y = 2x^2 + 4x - 6$ se observa que su curva:

- Corta al eje *OX* en los puntos $x = -3$ y $x = 1$, que son las soluciones de la ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$;
- Está por debajo del eje *OX* en el intervalo (–3, 1), precisamente las soluciones de $2x^2 + 4x - 6 < 0$.



b) Igualmente, la parábola $y = x^2 + 4x + 4$ tiene su vértice (su mínimo) en el punto (–2, 0), de abscisa $x = -2$; para los demás valores de *x* siempre está por encima del eje *OX*. Por eso:

- $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ sólo es cierto si $x = -2$, que toma el valor 0;
- la inecuación $x^2 + 4x + 4 > 0$ es cierta para todo $x \neq 2$.
- la inecuación $x^2 + 4x + 4 < 0$ no se cumple nunca.

c) Para el caso $-x^2 + 4x - 6 < 0$, como la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 4x - 6$ queda por debajo del eje *OX* para cualquier valor de *x*, su solución es todo **R**.

Inecuaciones de grado superior a dos (polinómicas)

Para resolver una inecuación de la forma $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado 3 o mayor, se procede como sigue:

1) Se descompone $P(x)$ en factores; para ello habrá que calcular las raíces de $P(x) = 0$.

Si estas raíces fuesen x_1, x_2, x_3, supuesto $P(x)$ de tercer grado, se tendría:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$$

2) Se representan las raíces sobre la recta; y se determinan los intervalos correspondientes.

Si las raíces, x_1, x_2, x_3, están ordenadas de menor a mayor, esos intervalos son:

$(-\infty, x_1)$; (x_1, x_2); (x_2, x_3); $(x_3, +\infty)$.

3) Se estudia el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$ en cada uno de esos intervalos. Para ello basta con probar para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos.

4) Por último, se dan los intervalos solución.

Ejemplo:

Para resolver la inecuación $x^3 - 4x^2 - 5x < 0$:

1) Se resuelve la ecuación $x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = x(x+1)(x-5) = 0$.

Con esto: $x^3 - 4x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-5) < 0$.

2) Se representan las raíces $x = -1$, $x = 0$ y $x = 5$.

Se obtienen los intervalos: $x < -1$, $(-\infty, -1)$; $-1 < x < 0$, $(-1, 0)$; $0 < x < 5$, $(0, 5)$; $x > 5$, $(5, +\infty)$.

3) Los signos de los factores de $0\,x(x+1)(x-5)$ son, respectivamente:

$(-)(-)(-) \to (-)$ $(-)(+)(-) \to (+)$ $(+)(+)(-) \to (-)$ $(+)(+)(+) \to (+)$

Puede hacerse un esquema como el siguiente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo de x	–	–	+	+
Signo de $(x + 1)$	–	+	+	+
Signo de $(x - 5)$	–	–	–	+
Signo de $x(x+1)(x-5)$	$(-)(-)(-) \to \boxed{(-)}$	$(-)(+)(-) \to (+)$	$(+)(+)(-) \to \boxed{(-)}$	$(+)(+)(+) \to (+)$

4) En consecuencia, las soluciones de la inecuación son: $x < -1$ o $0 < x < 5$.

4. INECUACIONES RACIONALES

En estas inecuaciones la incógnita aparece en un denominador.

Por ejemplo: a) $\frac{-4}{x-3}<1$; b) $3\leq\frac{2x+4}{x-1}$; c) $\frac{x^2+2x}{x-1}\leq 2x$.

Para resolverlas hay que expresarlas en la forma:

$\frac{P(x)}{Q(x)}<0$; $\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$; $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$.

Esto es, hay que escribirlas como un cociente de dos polinomios (sin más términos), para compararlas con 0. (Compararlas con 0 es determinar si el cociente es positivo o negativo, lo que se deduce estudiando los signos del numerador y del denominador). En esquema:

$\frac{(+)}{(+)}=(+)>0$; $\frac{(+)}{(-)}=(-)<0$; $\frac{(-)}{(+)}=(-)<0$; $\frac{(-)}{(-)}=(+)>0$.

Así, el caso a) $\frac{-4}{x-3}<1 \Leftrightarrow \frac{-4}{x-3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{-4-(x-3)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x-3}<0$.

→ Las soluciones de $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$ excluyen las de $P(x)=0$. En las de $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ se incluyen las de $P(x)=0$. Siempre se excluyen las raíces de $Q(x)=0$.

En todos los casos es útil marcar las raíces del numerador y del denominador sobre la recta real y estudiar el signo del cociente en los distintos intervalos que se forman.

Con **Mathway** se obtiene el conjunto de soluciones de manera muy sencilla. Utilízalo para comprobar los ejemplos que se están proponiendo.

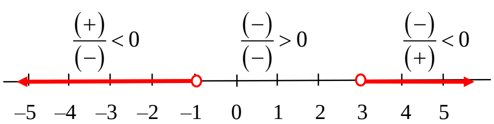
Ejemplos:

a) Para resolver la inecuación $\frac{-4}{x-3}<1$:

1) Se transforma en su equivalente $\frac{-x-1}{x-3}<0$, visto arriba.

2) Se resuelven las ecuaciones:
numerador, $-x-1=0$ ($\rightarrow x=-1$);
denominador, $x-3=0$ ($\rightarrow x=3$).

Se marcan ambas soluciones en la recta; determinan los intervalos:
$(-\infty,-1)$; $(-1, 3)$; $(3, +\infty)$.



3) Se estudia el signo del numerador y del denominador en cada intervalo:

- Si $x<-1$, el numerador es positivo (+); el denominador es negativo (–) → cociente negativo: < 0.
- Si $-1<x<3$, el numerador y el denominador son negativos → cociente positivo: > 0.
- Si $x>3$, el numerador es negativo; el denominador positivo → cociente negativo: < 0.

Por tanto, las soluciones de $\frac{-4}{x-3}<1$ son los valores de $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

Observación: Un error muy frecuente es hacer lo que sigue:

$\frac{-4}{x-3}<1$ → (se quita el denominador, multiplicando por $x-3$) → $-4<x-3 \Rightarrow -4+3<x \Rightarrow$

$\Rightarrow x>-1$. (Esto solo puede hacerse si el denominador fuese siempre positivo; que no es así, pues para $x<3$ es negativo).

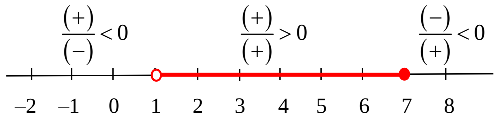
b) Para resolver la inecuación $3 \le \dfrac{2x+4}{x-1}$:

1) Se transforma: $3 \le \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{2x+4}{x-1} - 3 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{2x+4-3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{7-x}{x-1}$.

2) Se resuelven las ecuaciones:

numerador, $7 - x = 0$ ($\to x = 7$);

denominador, $x - 1 = 0$ ($\to x = 1$).



Se marcan ambas soluciones en la recta; determinan los intervalos: (–∞, 1); (1, 7); (7, +∞).

3) Se estudia el signo del numerador y del denominador en cada intervalo:

- Si $x < 1$, el numerador es positivo (+); el denominador es negativo (–) → cociente negativo: < 0.
- Si $1 < x < 7$, el numerador y el denominador son positivos → cociente positivo: > 0.
- Si $x > 7$, el numerador es negativo; el denominador positivo → cociente negativo; < 0.

Se buscan las soluciones positivas o el 0.

Por tanto, las soluciones de $3 \le \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{7-x}{x-1}$ son los valores de $x \in (1,\ 7]$.

<u>Observación</u>: Insisto en el <u>error muy frecuente</u>, que sería hacer lo que sigue:

$3 \le \dfrac{2x+4}{x-1}$ → (se quita el denominador, multiplicando por x – 1) → $3(x-1) \le 2x+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 3 \le 2x + 4 \Rightarrow 3x - 2x \le 4 + 3 \Rightarrow x \le 7$. (Puedes ver que x = 0, por ejemplo, no cumple la inecuación inicial; y, por supuesto, tampoco x = 1, en donde la inecuación carece de sentido).

c) Para resolver $\dfrac{x^2+2x}{x-1} \le 2x$:

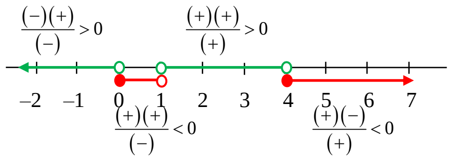
1) Se transforma como sigue:

$$\frac{x^2+2x}{x-1} \le 2x \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x-1} - 2x \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-2x(x-1)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(4-x)}{x-1} \le 0.$$

2) Se resuelven las ecuaciones:

numerador, $x(4-x) = 0$ ($\to x = 0, x = 4$);

denominador, $x - 1 = 0$ ($\to x = 1$).



Se marcan todas las soluciones en la recta; determinan los intervalos:

(–∞, 0); (0, 1); (1, 4); (4, +∞).

3) Se estudia el signo del numerador y denominador en cada intervalo:

- Si $x < 0$, el numerador es negativo, (–)·(+), y el denominador negativo, (–) → cociente positivo.
- Si $0 < x < 1$, el numerador es positivo, (+)·(+), y el denominador negativo, (–) → cociente negativo.
- Si $1 < x < 4$, el numerador es positivo, (+)·(+), y el denominador positivo, (+) → cociente positivo.
- Si $x > 4$, el numerador es negativo, (+)·(–), y el denominador positivo, (+) → cociente negativo.

Por tanto, la solución de $\dfrac{x^2+2x}{x-1} \le 2x \Leftrightarrow \dfrac{x(4-x)}{x-1} \le 0$ son los valores de $x \in [0, 1) \cup [4, +\infty)$.

d) La inecuación $\dfrac{1}{x^2} > 0$ se cumple siempre, para todo $x \in$ **R**. Por tanto, $\dfrac{1}{x^2} \le 0$ nunca se cumple.

e) La expresión $\dfrac{x}{x^2+1}$ tiene el mismo signo que x: negativo para $x < 0$; positivo si $x > 0$.

Por tanto: $\dfrac{x}{x^2+1} < 0$ si $x < 0$; $\dfrac{x}{x^2+1} \ge 0$ si $x \ge 0$. (Ten en cuenta que x^2+1 siempre es positivo).

5. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Se considerarán sólo los tipos:

$|A(x)| < k$ y $|A(x)| \geq k$, con $k \geq 0$. (También con $\leq$ y $>$).

- La inecuación $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$.

Su solución son los valores de x que <u>cumplen, a la vez</u>, las inecuaciones: $-k < A(x)$ y $A(x) < k$.

- La inecuación $|A(x)| \geq k \Leftrightarrow A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

Su solución son los valores de x que <u>cumplen alguna</u> de las inecuaciones $A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

Las <u>inecuaciones de primer grado</u> se estudiaron en el tema 1, en el apartado de intervalos. Aquí las recordamos.

Ejemplos:

a) $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

b) $|x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1$. Esto es: $1 \leq x \leq 3 \to x \in [1, 3]$.

Para obtener ese resultado puede sumarse 2 a los tres miembros de las desigualdades: $-1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow -1 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

c) $|2x-1| > 3 \Leftrightarrow 2x-1 < -3$ o $2x-1 > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x < -2$ o $2x > 4 \Rightarrow x < -1$ o $x > 2$.

<u>Inecuaciones de segundo grado</u>: $|ax^2+bx+c| < k$, con $a \neq 0$ (también vale $\leq$, $>$ o $\geq$).

Ejemplo:

La inecuación $|x^2-3x| \geq 2 \Leftrightarrow x^2-3x \leq -2$ o $x^2-3x \geq 2$.

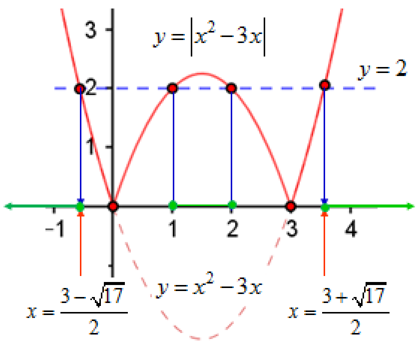
La primera: $x^2-3x \leq -2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$, que se cumple si $x \in [1, 2]$.

La segunda: $x^2-3x \geq 2 \Leftrightarrow x^2-3x-2 \geq 0$, se cumple si $x \leq \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ o si $x \geq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

(Las soluciones de $x^2-3x-2=0$ son: $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$).

En definitiva, su solución serán todos los valores de

$$x \in \left(-\infty, \ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1, \ 2] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \ +\infty\right).$$



<u>Interpretación geométrica</u>:

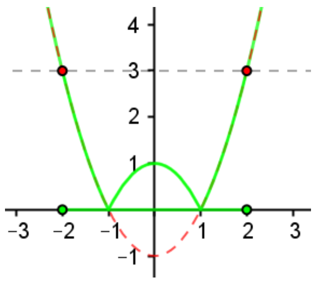
Como puede observarse, la gráfica del valor absoluto de $y = x^2-3x$ es mayor o igual que 2 cuando la x toma valores en los intervalos indicados: cuando sobrepasa la línea horizontal de altura 2, la recta $y = 2$.

También puede verse que las soluciones de $|x^2-3x| < 2$ son $x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \ 1\right) \cup \left(2, \ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. En todos esos puntos, la gráfica toma valores menores que 2: está por debajo de la recta $y = 2$.

b) La inecuación $\left|x^2-1\right|<3$ se cumple cuando $x^2-1<-3$ o $x^2-1<3$.

La primera: $x^2-1<-3 \Rightarrow x^2<-2$, que no sucede nunca.
La segunda: $x^2-1<3 \Rightarrow x^2<4$, se cumple si $-2<x<2$.
Por tanto, $\left|x^2-1\right|<3$ cuando $x\in(-2,\ 2)$.

Si se hace la gráfica de la parábola $y=x^2-1$, línea de trazos roja, puede observarse que:



$x^2-1=0$ en $x=-1$ y $x=1$; $x^2-1<0$ si $x\in(-1,\ 1)$; $x^2-1>0$ si $x<-1$ o $x>1$;

$x^2-1>3$ si $x<-2$ o $x>2$, esto es equivalente a $\left|x^2-1\right|>3$.

6. INECUACIONES CON RAÍCES CUADRADAS

Con raíces cuadradas, pueden plantearse las dos siguientes inecuaciones:
$\sqrt{A(x)}<n$; $\sqrt{A(x)}>n$, (también con $\le$ y $\ge$); $n\ge 0$,
siendo $A(x)$ una expresión con una incógnita, que debe ser no negativa: $A(x)\ge 0$.
Si no se especifica lo contrario se tomará siempre la raíz cuadrada con el signo que lleve.

Para resolverlas puede recurrirse a elevar al cuadrado.

- La inecuación $\sqrt{A(x)}<n \Rightarrow 0\le A(x)<n^2$.

Su solución son los valores de x que cumplen a la vez las inecuaciones: $0\le A(x)$ y $A(x)<n^2$.

- La inecuación $\sqrt{A(x)}>n \Rightarrow A(x)>n^2$.

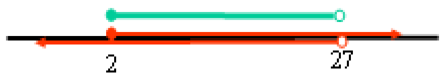
Ejemplos:

a) $\sqrt{x}<3 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2<3^2 \Rightarrow 0\le x<9$.

La condición $x\ge 0$ es imprescindible para que exista la raíz cuadrada. (Recuerda que la raíz solo está definida para valores mayores o iguales que 0).

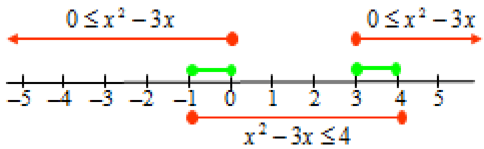
b) De $-\sqrt{x}<3$ podría deducirse que $0\le\left(-\sqrt{x}\right)^2<3^2 \Rightarrow 0\le x<9$. El resultado no es falso, pero es incompleto, pues la desigualdad se cumple siempre que $x\ge 0$.

c) $\sqrt{x-2}<5 \Rightarrow 0\le x-2<25$. Se obtienen dos inecuaciones: $0\le x-2$ y $x-2<25$.
Las soluciones de $0\le x-2$ son los valores de $x\ge 2$.
Las soluciones de $x-2<25$, son los valores de $x<27$.



Las soluciones de $\sqrt{x-2}<5$ son los valores de $x\in[2, 27)$, intervalo intersección de los anteriores.

d) $\sqrt{x^2-3x}\le 2 \Rightarrow 0\le x^2-3x\le 4$. Se obtienen dos inecuaciones: $0\le x^2-3x$ y $x^2-3x-4\le 0$.
Las soluciones de $0\le x^2-3x \Leftrightarrow 0\le x(x-3)$, son los valores de $x\in(-\infty,\ 0]\cup[3,+\infty)$.
Las soluciones de $x^2-3x-4\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4)\le 0$, son los valores de $x\in[-1,\ 4]$. (Las raíces de la ecuación asociada son $x=-1$ y $x=4$).



Por tanto, las soluciones de $\sqrt{x^2-3x}\le 2$ son los valores de $x\in[-1,\ 0]\cup[3,\ 4]$, que son los comunes a ambas inecuaciones.

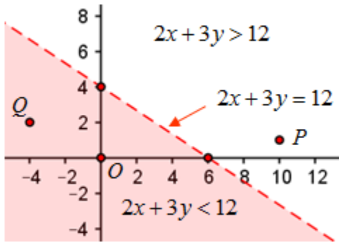
7. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS: SISTEMAS

Una inecuación lineal con dos incógnitas, *x* e *y*, es una expresión de la forma $ax + by < c$.
(El signo < puede sustituirse por >, ≤ o ≥; *a*, *b* y *c* representan números, y pueden valer 0).

- El conjunto de valores solución de esas inecuaciones son las coordenadas de los puntos que están en uno de los semiplanos en los que la recta $ax + by = c$ divide al plano. Es decir, el conjunto solución es un semiplano; se determina gráficamente: es necesario dibujar a recta.

Observación:
Los puntos del plano que cumplen la ecuación $ax + by = c$ son los de una recta.
Los puntos del plano que no cumplen la ecuación $ax + by = c$, verifican alguna de las dos opciones siguientes: $ax + by < c$ o $ax + by > c$. (Una cantidad puede ser igual, menor o mayor que *c*).
En inecuaciones con ≤ o ≥, en el conjunto de soluciones también se incluyen los puntos de la recta.

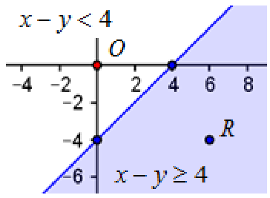
Ejemplos:



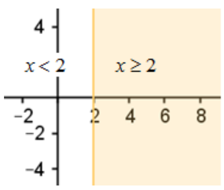
a) La recta $2x + 3y = 12$ es la dibujada a trazos en la figura adjunta. (Para representarla basta con dar dos de sus puntos. Los más sencillos se obtienen dando el valor 0, alternativamente, a cada variable:
si $x = 0 \Rightarrow y = 4 \to$ punto (0, 4); si $y = 0 \Rightarrow x = 6 \to$ punto (6, 0)).
Todos los puntos situados a la izquierda de la recta $2x + 3y = 12$ cumplen que $2x + 3y < 12$. Es el semiplano coloreado.
Todos los puntos de la derecha cumplen que $2x + 3y > 12$. Es el semiplano en blanco.
Para decidir cuál es cada uno de los semiplanos, basta con elegir un punto cualquiera (que se sepa a qué lado está de la recta) y sustituir en su ecuación. Si el valor obtenido es menor que 12, todos los puntos del plano que están en el mismo lado cumplen la inecuación $2x + 3y < 12$; si el valor obtenido fuese mayor que 12, entonces, todos los puntos de ese semiplano cumplen la inecuación $2x + 3y > 12$.

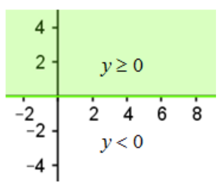
- El punto *P* = (10, 1) cumple que $2x + 3y = 23 > 12 \Rightarrow 2x + 3y > 12$ es el semiplano en blanco.
- El punto *Q* = (–4, 2) cumple que $2x + 3y = -2 < 12 \Rightarrow 2x + 3y < 12$ es el semiplano sombreado.

(Basta con probar un solo punto; siempre que sea posible, lo más cómodo es elegir *O* = (0, 0)).



b) Para determinar el conjunto de soluciones de la inecuación $x - y \ge 4$:
1) Se traza la recta $x - y = 4$.
Para *x* = 0, *y* = –4, punto (0, –4); para *y* = 0, *x* = 4, punto (4, 0).
2) Se toma un punto que esté a la izquierda de la recta para ver si cumple la inecuación. El más fácil de comprobar es *O* = (0, 0).
Como $0 - 0 = 0 < 4$: no la cumple; se deduce que ningún punto situado a la izquierda de la recta verifica que $x - y \ge 4$. Luego, la solución son los puntos del semiplano de la derecha.
Si se hubiese probado con un punto situado a la derecha de la recta, por ejemplo, *R* = (6, –4), se ve que $6 - (-4) = 10 \ge 4$: sí la cumple. Con esto, se deduce que todos los puntos del semiplano de la derecha cumplen que $x - y \ge 4$. (Luego, el semiplano de la izquierda cumplirá que $x - y < 4$).





c) Si en la inecuación $ax + by > c$ (también vale con <, ≤ o ≥), alguno de los coeficientes *a* o *b* fuese 0, el conjunto de soluciones son todos los puntos a izquierda o derecha de una recta vertical; o por encima o debajo de una recta horizontal.

- El conjunto de soluciones de $x \ge 2$ son los puntos del semiplano situado a la derecha de la recta $x = 2$.
- El conjunto de soluciones de $y \ge 0$ son los puntos del semiplano situado por encima del eje *OX*.

Sistemas de dos inecuaciones lineales

Son de la forma: $\begin{cases} ax+by \le c \\ a'x+b'y \le c' \end{cases}$ (Los símbolos $\le$ pueden ser sustituidos por $<$, $>$ o $\ge$).

El conjunto de soluciones es la porción del plano que cumple las dos inecuaciones a la vez.
Estas inecuaciones pueden recibir el nombre de restricciones (condiciones, limitaciones); al conjunto de soluciones se le llama región factible. El punto de corte de las dos rectas asociadas se llama vértice.

Ejemplos:

a) Para hallar el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} 2x+3y<12 \\ x-y \ge 4 \end{cases}$ se procede así:

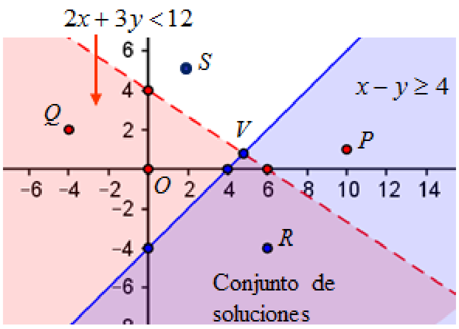
1) Se determina el conjunto $2x+3y<12$. Son los puntos situados a la izquierda de la recta $2x+3y=12$.
2) Se determina el conjunto $x-y \ge 4$. Son los puntos situados a la derecha de la recta $x-y=4$.

Todos estos gráficos se obtienen directamente con **GeoGebra**. Basta con teclear la expresión de cada inecuación.

La solución del sistema es el conjunto de puntos que cumple las dos inecuaciones: la intersección de ambos semiplanos.

- Puede observarse que:

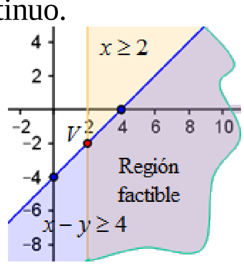
El punto $S = (2, 5)$ no cumple ninguna condición.
El punto $Q = (-4, 2)$ solo cumple la primera inecuación.
El punto $P = (10, 1)$ solo cumple la segunda inecuación.
El punto $R = (6, -4)$ cumple las dos restricciones: forma parte del conjunto de soluciones.



Las semirrectas que limitan la región factible son los bordes (la frontera) de esa región. El punto de corte de ambas rectas se llama vértice: es la solución del sistema $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-y=4 \end{cases} \to V = \left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

Si los puntos de la frontera no son de la región factible se indicará con trazo discontinuo.

b) La región factible asociada a las restricciones $\begin{cases} x \ge 2 \\ x-y \ge 4 \end{cases}$ es la que dibuja en la figura adjunta. El vértice es el punto $V = (2, -2)$.



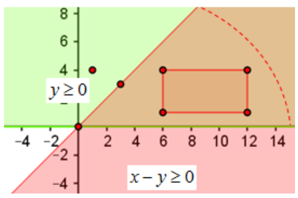
Aplicaciones geométricas

En los ejemplos precedentes, la región factible ha resultado un ángulo: "porción de plano limitada por dos semirrectas (lados), que parten de un mismo punto llamado vértice".

Por ejemplo, el ángulo de 45º que se da en la figura adjunta, es la solución del sistema $\begin{cases} y \ge 0 \\ x-y \le 0 \end{cases}$.

- El conjunto de soluciones de $y \ge 0$ son los puntos del semiplano situado por encima del eje *OX*.
- Para determinar el semiplano solución de la inecuación $x-y \ge 0$:

1) Se representa la recta $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$. Puntos: (0, 0) y (3, 3).
2) Se prueba cualquier punto que no sea de la recta, por ejemplo, (1, 4).
Como $1-4<0$, ese punto no es del semiplano solución. Luego, la solución será el semiplano de la derecha.



La solución del sistema es el ángulo sombreado en marrón. Su vértice es el punto (0, 0).

→ De manera análoga, los puntos del rectángulo marcado en la figura cumplen: $\begin{cases} 6 \le x \le 12 \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla el intervalo solución de las siguientes inecuaciones:

a) $-x+2<3$; b) $\dfrac{x-1}{2} \ge x+3$; c) $2x \le 3+5x$; d) $2x-2-\dfrac{2-3x}{5} \ge x+\dfrac{1}{2}$.

Observación: La mayoría de los problemas de este tema pueden resolverse con ayuda de aplicaciones informáticas. Utilízalas solo para comprobar tus resultados.

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-3>0$, b) $1-x^2>0$; c) $2x^2-6x \le 0$; d) $(x+3)(2x-5)<0$;

e) $x^2+5x-14<0$; f) $2x^2-4x+2 \ge 0$; g) $x^2+2<0$; h) $x^3 \le -8$.

3. Resuelve las siguientes inecuaciones de tercer grado:

a) $(x+2)\left(x^2-4x\right) \ge 0$; b) $(x-1)(1+x^2)>0$; c) $(x-1)(x-3)(x-5)<0$.

4. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x-5}{x+2}<0$; b) $\dfrac{x-5}{x+2} \ge 0$; c) $\dfrac{2x-3}{x+2}>1$; d) $\dfrac{x-3}{x^2} \ge 0$; e) $\dfrac{x+6}{x+2}-x \le 0$.

Representa gráficamente el conjunto de soluciones.

5. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|2x+1| \le 5$; b) $|x+2| \ge 4$; c) $|x+1|>3$; d) $|x^2-2|<1$; e) $|x^2-2x|<1$.

6. Resuelve las siguientes inecuaciones:

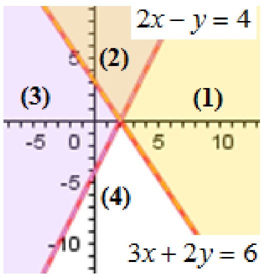
a) $\sqrt{2x+1} \ge 3$; b) $\sqrt{x-1}<4$; c) $\sqrt{x^2+9}<5$; d) $\sqrt{x^2-5} \ge 2$.

7. a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x+2y \ge 20 \\ 5x+2y \ge 36 \end{cases}.$$

Indica el vértice de la región de soluciones.

b) De los puntos $P(2, 11)$, $Q(10, 7)$ y $R(2, 5)$, indica los que no sean solución, explicando el porqué.



8. En la figura adjunta, las rectas $2x-y=4$ y $3x+2y=6$ dividen el plano en cuatro regiones: (1); (2); (3) y (4).

Escribe, para cada región, el sistema de inecuaciones que la determina.

9. Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

a) $\begin{cases} x+y \le 5 \\ x-y \ge 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x+2y \le 4 \\ x-y \ge 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+y \le 0 \\ x-y \ge 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x \le 5 \\ x-y \ge 5 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$.

10. Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 5x-2y \ge 10 \\ x+y \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y \le 10 \\ 3x+y \le 15 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+3y \ge 9 \\ 2x+3y \ge 12 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y \ge -2 \\ 4x+y \le 22 \\ x+4y \ge 13 \end{cases}$.

Indica, en cada caso, los vértices de la región de soluciones.