Solución de los Problemas Propuestos

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-y=-4 \\ x+3y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -4x+6y=8 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$.

Da la interpretación geométrica de cada caso.

Solución:

a) $\begin{cases} 2x-y=-4 \\ x+3y=0 \end{cases} \to$ (despejando y en $E1$ y sustituyendo en $E2$) $\to \begin{cases} 2x+4=y \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow x+3(2x+4)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+12=0 \Rightarrow x=-\dfrac{12}{7}$.

Como $y=2x+4 \Rightarrow y=2\cdot\left(-\dfrac{12}{7}\right)+4=-\dfrac{24}{7}+4 \Rightarrow y=\dfrac{4}{7}$.

b) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 2x+3y=2 \end{cases} \to$ (sumando ecuaciones, despejando y sustituyendo) $\to$

$\to \begin{array}{r} \\ E2+E1 \end{array}\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x=-2 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\uparrow \Rightarrow -1-3y=-4 \Rightarrow y=1$.

c) Por el método de reducción:

$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ -4x+6y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2E1 \\ \\ \end{array}\begin{cases} 4x-6y=-8 \\ -4x+6y=8 \end{cases} \to$ (sumando ecuaciones) $\to \begin{array}{r} \\ E2+E1 \end{array}\begin{cases} 4x-6y=-8 \\ 0=0 \end{cases}$.

Como "se pierde" una ecuación, el sistema es compatible indeterminado.

Poniendo x en función de y (despejando en $E1$): $2x=-4+3y \Rightarrow x=-2+\dfrac{3}{2}y$.

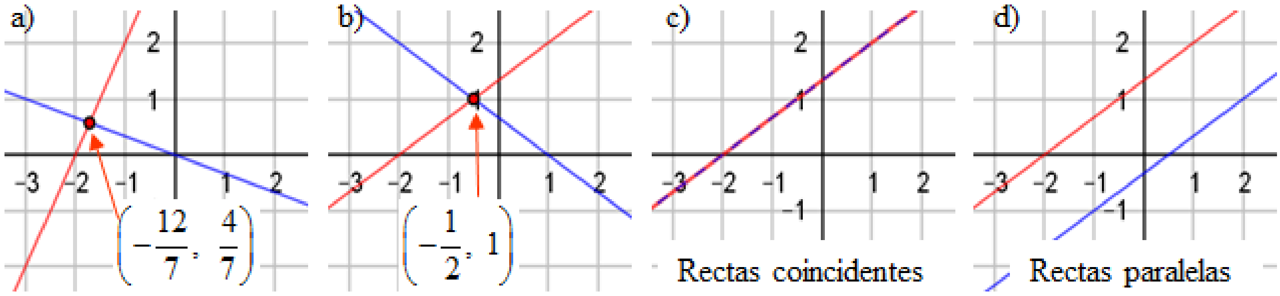
Haciendo $y = t$, siendo t un número real, la solución puede darse así: $\begin{cases} x=-2+\dfrac{3}{2}t \\ y=t \end{cases}$.

d) Por el método de reducción:

$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x-6y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2E1 \\ \\ \end{array}\begin{cases} 4x-6y=-8 \\ 4x-6y=2 \end{cases} \to$ (restado ecuaciones) $\to \begin{array}{r} \\ E2+E1 \end{array}\begin{cases} 4x-6y=-8 \\ 0=10 \end{cases}$.

Como se obtiene una "igualdad" falsa, el sistema es incompatible.

En las gráficas siguientes se da la interpretación geométrica pedida.
(Pueden representarse con **GeoGebra**)



2. Discute, en función de los valores del parámetro *m*, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+my=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ -2x+my=4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x+y=m \end{cases}$; d) $\begin{cases} -2x+y=5 \\ mx+y=m \end{cases}$.

Solución:

a) $\begin{cases} 4x+my=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x+my=5 \\ -4x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 4x+my=5 \\ (2+m)y=13 \end{cases} \Rightarrow$ (Despejando en la segunda ecuación) $y=\dfrac{13}{2+m}$, que tiene sentido para cualquier valor de $m \neq -2$.

Con esto:

- El sistema será compatible determinado siempre que $m \neq -2$. En caso contrario, para $m = -2$, el sistema será incompatible.
- Nunca es compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x+2y=-2 \\ -2x+my=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x+4y=-4 \\ -2x+my=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x+4y=-4 \\ (4+m)y=0 \end{cases}$.

Observando $E2$:

- Si $m \neq -4$, el valor de *y* siempre es 0. El sistema será compatible determinado.

Su solución será: $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$.

- Si $m = -4$, queda $0y = 0$. La incógnita *y* puede tomar cualquier valor: SDI.

Solución: $\begin{cases} x=-2-2t \\ y=t \end{cases} \to$ (Se ha dado a *y* el valor *t* y despejado *x* en $E1$).

c) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x+y=m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2y=m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=-\dfrac{m+1}{2} \end{cases}$. Siempre será compatible determinado, pues $y=-\dfrac{m+1}{2}$ puede calcularse para cualquier valor de *m*.

d) $\begin{cases} -2x+y=5 \\ mx+y=m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=1 \\ (m+2)x=m-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=\dfrac{m-5}{m+2} \end{cases}$. $\Rightarrow$ para $m = -2$ la solución no tiene sentido; para ese valor de *m* el sistema será incompatible. En los demás casos, será compatible determinado.

3. Sea el sistema $\begin{cases} 4x-2y=-5 \\ -2x+my=3 \end{cases}$.

a) Discútelo en función de los valores de *m*.

b) Resuélvelo cuando $m = -1$.

Solución:

a) $\begin{cases} 4x-2y=-5 \\ -2x+my=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-y=-5 \\ -4x+2my=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 4x-y=-5 \\ (2m-2)y=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2m-2} \end{cases}$.

Con esto:

- Si $m=1$ el sistema es incompatible. La expresión $y=\dfrac{1}{2m-2}$ no tiene sentido.

- Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

b) Si $m = -1$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ 2E2 \end{matrix} \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -4y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}; x = -\frac{11}{8}.$$

4. Discute y resuelve cuando sean compatibles, en función de los valores de *a*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - ay = 5 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x - 4y = a \\ -6x + ay = 4 \end{cases}$.

Solución:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - ay = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 3 \\ (-a - 2)y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{a+2}$, $a \neq -2$.

En ese caso, sustituyendo en $E1$ se tiene: $x = 3 - y \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{a+2} \Rightarrow x = \frac{3a+5}{a+2}$.

Si $a = -2$ el sistema será incompatible: la segunda ecuación quedaría $0y = -1$, que es absurdo.

b) $\begin{cases} 3x - 4y = a \\ -6x + ay = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 6x - 8y = 2a \\ -6x + ay = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 6x - 8y = 2a \\ (a - 8)y = 4 + 2a \end{cases}$.

Despejando en $E2$:

$y = \frac{4+2a}{a-8}$, expresión que no tiene sentido si $a = 8$. Lo que indica que para $a = 8$ el sistema será incompatible.

Para cualquier valor de $a \neq 8$, el sistema será compatible determinado; con soluciones dependientes del valor que se le asigne a *a*.

El valor de *x* se obtiene sustituyendo $y = \frac{4+2a}{a-8}$ en $E1 \Rightarrow 3x - 4 \cdot \frac{4+2a}{a-8} = a$ → operando →

$$3x = a + 4 \cdot \frac{4+2a}{a-8} \Rightarrow 3x = a + \frac{16+8a}{a-8} \Rightarrow 3x = \frac{a^2+16}{a-8} \Rightarrow x = \frac{a^2+16}{3a-24}.$$

Luego, si $a \neq 8$, la solución del sistema será: $x = \frac{a^2+16}{3a-24}$; $y = \frac{4+2a}{a-8}$.

5. Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una con tres respuestas posibles de la que solo una es verdadera. El examen se puntúa así: pregunta acertada, suma 1 punto; pregunta fallada, resta 0,5; pregunta no contestada, 0 puntos. Si un examinado ha contestado 87 preguntas y obtenido una puntuación de 57, ¿cuántos aciertos tuvo?

Solución:

Sean *x* el número de aciertos e *y* el de fallos.

Puntos positivos: *x*; negativos 0,5*y*.

Puntuación del examen: $x - 0,5y = 57$.

Contesta 87 preguntas: $x + y = 87$.

Sistema: $\begin{cases} x - 0,5y = 57 \\ x + y = 87 \end{cases}$ → (restando) → $\begin{matrix} \\ E2 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x - 0,5y = 57 \\ 1,5y = 30 \end{cases} \Rightarrow y = 20; x = 67$.

Tuvo 67 aciertos; y 20 fallos.

6. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?
Solución:
Sean *x* e *y* las edades de la madre y de la hija, respectivamente.
Se cumple que: $x+y=42$.
La hija tendrá la edad de la madre dentro de $x-y$ años. Su edad será de *x* años.
Entonces, la madre tendrá $x+(x-y)=2x-y$.
La suma de ambas edades será 90, luego: $2x-y+x=90 \Rightarrow 3x-y=90$.
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y=42 \\ 3x-y=90 \end{cases} \Rightarrow 4x=132 \Rightarrow x=33 \text{ años} \to \text{La hija tiene } 42-33=9 \text{ años}$$

7. Una madre tiene cuatro veces la edad de su hija. Hace cuatro años su edad era seis veces mayor. ¿Qué edad tiene cada una?
Solución:
Hay dos momentos, hoy y hace 4 años.
→ Hoy: madre, 4*x*; hija, *x* años.
→ Hace 4 años: madre, 4*x* – 4, hija *x* – 4. Relación: $4x-4=6(x-4)$.
Resolviendo la última ecuación:

$$4x-4=6(x-4) \Rightarrow 4x-4=6x-24 \Rightarrow 2x=20 \Rightarrow x=10.$$

La hija tiene 10 años; la madre, 40 años.

8. La suma de las dos cifras de un número es 12. Si sus cifras se intercambian, el número que resulta es 54 unidades menor. ¿Cuál es ese número?
Solución:
En el sistema decimal de numeración, el número formado por los dígitos *ab* (*a* decenas y *b* unidades), simboliza el valor 10·*a* + *b*. Si se cambia el orden de las cifras se obtiene el número *ba*, cuyo valor es 10·*b* + *a*.
Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=12 \\ 10a+b=10b+a+54 \end{cases} \to \begin{cases} a+b=12 \\ 9a-9b=54 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2/9 \end{matrix}\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=6 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} a+b=12 & \Rightarrow b=3 \\ 2a=18 \Rightarrow a=9 \end{cases}$$

El número inicial es 93.
Puedes comprobar que al cambiar sus cifras de orden se obtiene el número 39, que es 54 unidades menor que el primero.

9. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 10. Si al cambiar de orden sus dígitos se obtiene un número que es 36 unidades menor, ¿cuál es ese número?
Solución:
El número *XY* = *X* decenas + *Y* unidades = 10*X* + *Y*.
→ Se sabe que la suma de sus cifras es 10: $X+Y=10$.
→ Si se intercambian los dígitos: *XY* → *YX*, siendo el segundo número 36 unidades menor →

$$XY=YX+36 \Rightarrow 10X+Y=10Y+X+36 \Rightarrow 9X-9Y=36 \Rightarrow X-Y=4.$$

Se tiene el sistema $\begin{cases} X+Y=10 \\ X-Y=4 \end{cases}$, cuya solución es *X* = 7; *Y* = 3.
El número buscado es 73.

10. Se mezclan dos tipos de aceites de girasol, uno de 0,80 €/kg con otro de 1,00 €/kg, obteniéndose 30 kg de mezcla que se vende a 0,95 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo se emplearon?
Solución:
En los problemas de mezclas "lo que entra" debe ser igual a "lo que sale" (input = output); salvo que se quiera obtener una determinada ganancia (output = input + ganancia).
Suponemos que se mezclan x kg de aceite de 0,80 €/kg con y de 1,00 €/kg.
En total se obtienen 30 kg de mezcla, luego: $x+y=30$.
El coste de la mezcla es: $0,80x+y$.
Los ingresos por venta son: 30 · 0,95 = 28,50.
Luego, $0,80x+y=28,50$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y=30 \\ 0,80x+y=28,50 \end{cases}$.

Por reducción: $\begin{cases} x+y=30 \\ 0,80x+y=28,50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \end{matrix} \begin{cases} 0,20x=1,50 \\ 0,80x+y=28,5 \end{cases} \Rightarrow x = 7,5$ kg; $y = 22,5$ kg.

11. Se mezclan dos tipos de café, A y B, cuyos precios respectivos son 4 €/kg y 5 €/kg.
a) Si se quiere que la mezcla salga a 4,40 €/kg, ¿en qué proporción hay que mezclarlos?
b) ¿Cuántos kilos de A hay que mezclar con 10 kilos de B para que la mezcla salga a 4,20 €/kg?
c) ¿Cuántos kilos hay que mezclar de cada tipo para obtener 100 kg de mezcla a 4,60 € el kg?
Solución:
a) Si se toman x kg de A e y de B, se tiene:
Suma de precios por separado: $4x+5y$.
Valor de la mezcla: $4,40\cdot(x+y)$.
Lo que se gasta debe ser igual a lo que se obtiene:

$$4x+5y=4,40\cdot(x+y) \Rightarrow 4x+5y=4,40x+4,40y \Rightarrow 0,60y=0,40x \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0,60}{0,40}=\frac{3}{2}.$$

La proporción pedida es el cociente $\frac{x}{y}$. Hay que mezclarlos en la proporción 3 a 2: 3 kg de A por cada 2 kg de B.

b) Si se toman x kg de A y 10 de B, se tiene:
Suma de precios por separado: $4x+5\cdot 10$.
Valor de la mezcla: $4,20\cdot(x+10)$.
Lo que se gasta debe ser igual a lo que se obtiene:

$$4x+5\cdot 10=4,20\cdot(x+10) \Rightarrow 4x+50=4,20x+42 \Rightarrow 0,20x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{0,20}=40.$$

Hay que tomar 40 kg de B. (Comprueba que el resultado es correcto).

c) Si se toman x kg de A e y de B, se tiene:
Kilos de mezcla: $x+y=100$.
Valor de la mezcla: $100\cdot 4,60=460$, que debe ser igual a $4x+5y$.
Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 4x+5y=460 \end{cases} \to \text{(por reducción)} \to \begin{matrix} 4E1 \\ \end{matrix} \begin{cases} 4x+4y=400 \\ 4x+5y=460 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} 4x+4y=400 \\ y=60 \end{cases}.$$

Hay que mezclar 40 kg de A con 60 kg de B. (Comprueba que el resultado es correcto).

12. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-2y-2z=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x-y-2z=3 \\ -x \quad +z=0 \end{cases}$.

<u>Solución</u>:

a) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-2y-2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 7y-3z=0 \\ 7y-5z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 7y-3z=0 \\ -2z=2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-3y+z=1 \to x+\dfrac{9}{7}-1=1 \to x=\dfrac{5}{7} \\ 7y-3z=0 \to 7y+3=0 \to y=-\dfrac{3}{7} \\ z=-1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 5y+z=-1 \Rightarrow \\ 4y-5z=5 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ E3+5E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 5y+z=-1 \Rightarrow \\ 29y \quad =0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-0-1=3 \to 2x=4 \to x=2 \\ 0+z=-1 \to z=-1 \\ y=0 \end{cases}$

c) Despejando z en $E3$ y sustituyendo en las otras dos ecuaciones se obtiene:

$\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x-y-2z=3 \\ -x \quad +z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x-y-2z=3 \Rightarrow \\ x=z \uparrow \end{cases} \begin{cases} z-2y+z=8 \\ 2z-y-2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+6=8 \Rightarrow z=1 \\ y=-3 \uparrow \end{cases}$

La solución del sistema es: $x = 1$; $y = -3$; $z = 1$.

13. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y \quad =3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y+7z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y \quad =2 \end{cases}$.

<u>Solución</u>:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y \quad =3 \end{cases} \to \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} x-5y \quad =-3 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y \quad =3 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3+E1 \end{matrix} \begin{cases} x-5y \quad =-3 \\ x+4y+z=3 \\ 0=0 \end{cases}$.

El sistema es compatible indeterminado ("se pierde" la ecuación $E3$); resulta equivalente a:

$\begin{cases} x-5y=-3 \\ x+4y=3-z \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-5y=-3 \\ 9y=6-z \end{cases} \to \begin{cases} x-5y=-3 \\ z=6-9y \end{cases}$

Haciendo $y = t$, se tiene: $\begin{cases} x = -3+5t \\ y = \quad\quad t \\ z = 6-9t \end{cases}$ $\to$ Para cada valor de t se tiene una solución.

Observación: Que un sistema sea compatible indeterminado significa que una de las ecuaciones es redundante, que depende linealmente de las otras. En definitiva, que faltan datos para concretar la solución; por eso se da en función de una de las incógnitas. En este ejemplo, las incógnitas x y z dependen del valor que se quiera dar a y, al parámetro t.

b) El sistema propuesto es homogéneo; se llaman así los sistemas cuyos términos independientes son todos 0. Es evidente que estos sistemas son siempre compatibles, pues al menos, tienen la solución $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.
Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y+7z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+3z=0 \\ -3x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+3z=0 \\ 0=0 \end{cases}.$$

Como "se pierde" una ecuación, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+3z=0 \end{cases} \to \text{(despejando } x \text{ en } E2 \text{ y haciendo } z = t) \to \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x=3z \end{cases} \to \begin{cases} x=3t \\ y=-5t \\ z=t \end{cases}.$$

c) $$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y\quad\quad=2 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ -4y+3z=-1 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ 0=1 \end{cases}.$$

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.
Observación: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

14. En una reunión familiar hay 40 personas. La suma del número de hombres y de mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres excede en 6 a la suma del número de hombres más el número de niños. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión?
Solución:
Sean x, y, z el número de hombres, mujeres y niños, respectivamente. Debe cumplirse que:
En total hay 40 personas: $x+y+z=40$.
El número de hombres más el de mujeres, triplica al de niños: $x+y=3z \to x+y-3z=0$.
Hay 6 mujeres más que entre hombres y niños: $y=x+z+6 \to x-y+z=-6$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y+z=40 \\ x+y-3z=0 \\ x-y+z=-6 \end{cases}$.

Puede resolverse por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ x+y-3z=0 \\ x-y+z=-6 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=40 \\ -4z=-40 \\ -2y=-46 \end{cases} \Rightarrow z = 10;\ y = 23;\ x = 7.$$

En la reunión hay 7 hombres, 23 mujeres y 10 niños.

15. Un agricultor compra semillas de garbanzos a 1,30 € el kilo, de alubias a 1,20 € el kilo y de lentejas a 0,80 € el kilo. En total compra 45 kilos de semillas y paga por ellas 43 €. Sabiendo que el peso de las lentejas es el doble que lo que pesan, conjuntamente, los garbanzos y las alubias, calcular qué cantidad de semillas ha comprado de cada legumbre.

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* los kilogramos comprados de garbanzos, alubias y lentejas, respectivamente.

Debe cumplirse que:

$$x+y+z=45 \quad \to \text{compra 45 kg}$$

$$1,30x+1,20y+0,80z=43 \quad \to \text{paga 43 €}$$

$$z=2(x+y)$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 13x+12y+8z=430 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \to (\text{Pivotamos en } z) \to \begin{array}{l} 8E1 \\ \\ 8E3 \end{array}\begin{cases} 8x+8y+8z=360 \\ 13x+12y+8z=430 \\ 16x+16y-8z=0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l} \\ E2-E1 \\ E3+E1 \end{array}\begin{cases} 8x+8y+8z=360 \\ 5x+4y=70 \\ 24x+24y=360 \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ \\ E3/6 \end{array}\begin{cases} 8x+8y+8z=360 \\ 5x+4y=70 \\ 4x+4y=60 \end{cases} \to \begin{array}{l} \\ \\ E3-E2 \end{array}\begin{cases} 8x+8y+8z=360 \\ 5x+4y=70 \\ -x=-10 \end{cases}.$$

Despejando y sustituyendo: $\begin{cases} 80+40+8z=360 \Rightarrow z=30 \\ 50+4y=70 \Rightarrow y=5 \uparrow \\ x=10 \uparrow \end{cases}$

La solución es: *x* = 10, *y* = 5, *z* = 30.

16. Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* los precios de un café, un refresco y un dulce, respectivamente.

Grupo 1: $2x+y+3z=8,40$;

Grupo 2: $4x+y+5z=13,80$;

Grupo 3: $x+2y+2z=7,50$.

Se obtiene un sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=8,40 \\ 4x+y+5z=13,80 \\ x+2y+2z=7,50 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{array}\begin{cases} 2x+y+3z=8,40 \\ 2x \quad +2z=5,40 \\ -3x \quad -4z=-9,30 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ E3+2E2 \end{array}\begin{cases} 2x+y+3z=8,40 \\ 2x \quad +2z=5,40 \\ x=1,50 \end{cases}.$$

Si *x* = 1,50 ⇒ *z* = 1,20; *y* = 1,80.

Un café cuesta 1,50 €; un refresco, 1,80 €; un dulce, 1,20 €.

17. En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,80 euros; cacao, 4 euros; almendras, 13 euros. En un día se fabrican 9000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25800 euros. ¿Cuántos kg se utilizan de cada ingrediente?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* los kilos de leche, cacao y almendras empleados, respectivamente.

Debe cumplirse:

$x+y+z=9000$ → se fabrican 9000 kg;

$x=2(y+z)$ → la proporción de leche es doble que la de cacao y almendras juntas;

$0,80x+4y+13z=25800$ → coste total de 25800 euros.

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=9000 \\ x-2y-2z=0 \\ 0,80x+4y+13z=25800 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3-4E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=9000 \\ 3x=18000 \\ -3,2x+9z=-10200 \end{cases} \Rightarrow x=6000.$$

Sustituyendo x = 6000 en la tercera y en la primera ecuación, se obtiene: y = 2000 y z = 1000

Se utilizan 6000 kg de leche, 2000 kg de cacao y 1000 kg de almendras.

18. La suma de las tres cifras de un número es 14. Si se intercambia la cifra de las decenas por la de las centenas, el número disminuye en 90 unidades. Además, la cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas y centenas. ¿Cuál es ese número?

Solución:

El número XYZ = X centenas + Y decenas + Z unidades = 100X + 10Y + Z.

→ Se sabe que la suma de sus cifras es 14: $X+Y+Z=14$.

→ Si se intercambian la cifra de las decenas por la de las centenas: $XYZ \to YXZ$, siendo el segundo número 90 unidades menor → $XYZ=YXZ+90$.

Luego:

$$100X+10Y+Z=100Y+10X+Z+90 \Rightarrow X-Y=1.$$

→ Como la cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas y centenas ⇒ $Z=X+Y$.

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} X+Y+Z=14 \\ X-Y=1 \\ Z=X+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y+Z=14 \\ X-Y\quad=1 \\ X+Y-Z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} X+Y+Z=14 \\ -2Y-Z=-13 \\ -2Z=-14 \to Z=7 \end{cases}.$$

Sustituyendo el valor de Z en $E2$ ⇒ Y = 3. Y esos dos valores en $E1$ ⇒ X = 4.

El número buscado es 437.

19. Por la compra de 3 kg de almendras, 5 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes, se han pagado 98 euros. Un kg de almendras cuesta lo mismo que un kg de avellanas más un kg de cacahuetes. Si se comprase 1 kg de cada fruto seco, el coste sería de 32 euros. Calcula el precio por kg de cada fruto seco.

Solución:

Si x, y, z, son los precios por kilo de almendras, avellanas y cacahuetes, respectivamente. Deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+5y+2z=98 \\ x=y+z \\ x+y+z=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y+2z=98 \\ x-y-z=0 \\ x+y+z=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1+2E2 \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} 4x+4y\quad=98 \\ x-y-z=0 \\ 2x=32 \to x=16 \end{cases}$$ → sustituyendo x = 16

$$\to \begin{cases} 4\cdot 16+4\cdot y=98 \to y=6 \\ 16-6+z=0 \to z=10 \\ x=16 \end{cases}.$$

20. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$.

Solución:

a) Se despeja y en $E1$ y se sustituye en $E2$.

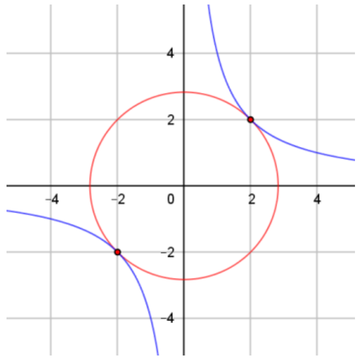
$$\begin{cases} y=3-2x \\ x(3-2x)-(3-2x)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ 3x-2x^2-(9+4x^2-12x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases}$$

Resolviendo $2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\dfrac{5\pm1}{4}=\begin{cases} 1 \\ 3/2 \end{cases}$.

Si $x=1$, $y=\dfrac{3}{2}$; si $x=\dfrac{3}{2}$, $y=0$.

b) Se despeja y en $E1$ y se sustituye en $E2$.

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ x^2+\left(\dfrac{4}{x}\right)^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ x^2+\dfrac{16}{x^2}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ x^4-8x^2+16=0 \end{cases}.$$



Resolviendo $x^4-8x^2+16=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$.

Si $x=2$, $y=2$; si $x=-2$, $y=-2$.Las soluciones son (2, 2) y (–2, –2).

Nota: Aunque no es necesario saberlo de momento, las soluciones son las coordenadas de los puntos de corte de una hipérbola y una circunferencia.

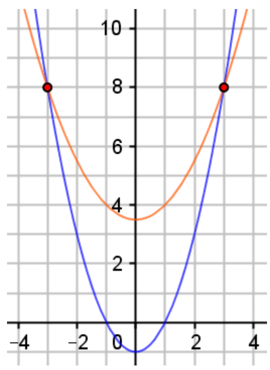
21. Resuelve el sistema: $\begin{cases} y=x^2-1 \\ x^2+7=2y \end{cases}$.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones que interviene están asociadas a sendas parábolas, represéntalas y observa que se cortan en los puntos solución del sistema.

Solución:

Sustituimos la y despejada de la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ x^2+7=2\left(x^2-1\right) \end{cases} \rightarrow x^2+7=2x^2-2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm3$$



Para ambos valores de x, se tiene que: $y = 9 – 1 = 8$.

Las soluciones son: (–3, 8) y (3, 8)

La interpretación gráfica se da en la figura adjunta. (Dejo los detalles de la representación gráfica como tarea para el lector).

22. Resuelve los sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-2x-y=0 \\ (x+1)^2+y=3 \end{cases}$.

Solución:

a) Se despeja y en la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3-2x) - (3-2x)^2 = 0 \end{cases} \to 3x - 2x^2 - \left(9 - 12x + 4x^2\right) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 15x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \begin{cases} 1 \\ 3/2 \end{cases}.$$

Para $x = 1$, se tiene que: $y = 3 - 2 = 1$.
Para $x = 3/2$, se tiene que: $y = 3 - 3 = 0$.
Las soluciones son: (1, 1) y (3/2, 0).

b) Se despeja y en la segunda ecuación y se sustituye en la primera.

$$\begin{cases} x^2 + (6-x)^2 = 4 \\ y = 6 - x \end{cases} \to x^2 + \left(36 - 12x + x^2\right) = 4 \Rightarrow 2x^2 - 15x + 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 288}}{4}.$$

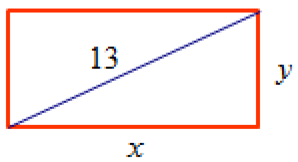
El sistema no tiene solución.

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Si $x = -1$, $y = 1 + 2 = 3$. Solución: punto (–1, 3).
Si $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$. Solución: punto (1, –1).

23. Halla las dimensiones de cada uno de los rectángulos que se indican:
a) El primer rectángulo tiene de perímetro 34 m y su diagonal mide 13 m.
b) El perímetro del otro rectángulo mide 100 m y su superficie 600 m^2.
<u>Solución</u>:
a) Si sus lados tienen longitudes x e y, entonces:

- Su perímetro es $p = 2x + 2y = 34 \to x + y = 17$.
- Su diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos x e y; luego, por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 13^2 \to x^2 + y^2 = 169$



Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$.

Despejando y en $E1$ y sustituyendo en $E2$:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 17 - x \\ x^2 + (17-x)^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169 \Rightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \to$$

$\to$ (simplificando y resolviendo a ecuación) $\to$

$$x^2 - 17x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}.$$

Si $x = 12$ m, $y = 5$ m; si $x = 5$, $y = 12$. Es el mismo rectángulo, girado uno del otro.

b) Si se sabe que su perímetro es 100 m se obtiene la ecuación $100 = 2x + 2y$.
Si se parte de que su área es 600 m^2 se obtiene la ecuación $600 = x \cdot y$.

Así, puede formarse el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases}$.

Despejando y en $E1$ y sustituyendo en $E2$:

$$\begin{cases} y = 50 - x \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ x \cdot (50 - x) = 600 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 2400}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2} = \begin{cases} 30 \\ 20 \end{cases}$$. Si x = 30, y = 20; si x = 20, y = 30.

Los valores x = 30 e y = 20 son la solución del sistema. (También valdría la solución x = 20 e y = 30, correspondiente al rectángulo girado).