Solución de los Problemas Propuestos

1. Calcula y simplifica:

a) $2\cdot(3x^2-5x-3)-3\cdot(4x^2-7x+6)$; b) $(3x^2-2x)\cdot(4x^2-5x-6)$;

c) $(2x^2-5x-3)\cdot(x^2-7x+6)$; d) $\left(\frac{3}{2}x^2-2\right)\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right)$.

Observación: En bastantes de los problemas de este tema puedes comprobar la solución con ayuda de alguna aplicación informática. La más rápida es **Photomath**.

Solución:

a) $2\cdot(3x^2-5x-3)-3\cdot(4x^2-7x+6) = (6x^2-10x-6)-(12x^2-21x+18) =$

$= 6x^2-10x-6-12x^2+21x-18 = -6x^2+11x-24$.

b) $(3x^2-2x)\cdot(4x^2-5x-6) = 3x^2\cdot(4x^2-5x-6)-2x(4x^2-5x-6) =$

$= 12x^4-15x^3-18x^2-8x^3+10x^2+12x = 12x^4-23x^3-8x^2+12x$.

c) $(2x^2-5x-3)\cdot(x^2-7x+6) = 2x^2\cdot(x^2-7x+6)-5x\cdot(x^2-7x+6)-3(x^2-7x+6) =$

$= 2x^4-14x^3+12x^2-5x^3+35x^2-30x-3x^2+21x-18 = 2x^4-19x^3+44x^2-9x-18$

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-2\right)\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right)-2\cdot\left(4x^2-5x-\frac{1}{2}\right) =$

$= 6x^4-\frac{15}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-8x^2+10x+1 = 6x^4-\frac{15}{2}x^3-\frac{35}{4}x^2+10x+1$.

2. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(3a+5)^2$; b) $(-2a+3)^2$; c) $(x^2+3)^2$; d) $(4x^2-1)^2+4x(2x-x^3)$.

Solución:

a) $(3a+5)^2=(3a+5)\cdot(3a+5)=3a\cdot(3a+5)+5\cdot(3a+5)=9a^2+15a+15a+25=9a^2+30a+25$.

b) $(-2a+3)^2=(3-2a)\cdot(3-2a)=3\cdot(3-2a)-2a\cdot(3-2a)=9-6a-6a+4a^2=4a^2-12a+9$.

En los dos que siguen, aplico las fórmulas.

c) $(x^2+3)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 3+3^2=x^4+6x^2+9$.

d) $(4x^2-1)^2+4x(2x-x^3)= 16x^4-8x^2+1+8x^2-4x^4=12x^4+1$.

3. Calcula y simplifica:

a) $\left(-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$; b) $4\cdot\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2\cdot(x+2)$.

Solución:

a) $\left(-\frac{1}{3}x^2+5x+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-3x+\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right)+5x\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right)+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}x^2\right) +$

$+\left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot(-3x)+5x\cdot(-3x)+\frac{2}{5}\cdot(-3x)+\left(-\frac{1}{3}x^2\right)\cdot\frac{1}{2}+5x\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} =$

$= -\frac{2}{15}x^4+2x^3+\frac{4}{25}x^2+3x^3-15x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{5} = -\frac{2}{15}x^4+5x^3-\frac{2251}{150}x^2+\frac{13}{10}x+\frac{1}{5}$.

b) $4\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2(x+2) = 4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-3^2\right]-\left[\left(\frac{3}{4}x\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}x\cdot 1+1^2\right](x+2) =$

$= 4\left(\frac{x^2}{4}-9\right)-\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x+1\right)\cdot(x+2) == x^2-36-\left(\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x^2-3x+x+2\right) =$

$= x^2-36-\frac{9}{16}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x^2+3x-x-2 = -\frac{9}{16}x^3+\frac{11}{8}x^2+2x-38$.

4. Halla la división:

a) $\left(2x^3-3x+2\right):(2x-1)$; b) $\left(4x^4-10x^3+10x^2-4x-5\right):\left(2x^2-x\right)$.

Solución:

a)

$$\begin{array}{ll|l}
2x^3 & -3x+2 & 2x-1 \\ \cline{3-3}
\underline{-2x^3+x^2} & & x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4} \\
 & x^2-3x+2 & \\
 & \underline{-x^2+\frac{1}{2}x} & \\
 & -\frac{5}{2}x+2 & \\
 & \underline{+\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}} & \\
 & \frac{3}{4} &
\end{array}$$

Cociente: $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$. Resto: $\frac{3}{4}$

b)

$$\begin{array}{l|l}
4x^4-10x^3+10x^2-4x-5 & 2x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4+2x^3} & 2x^2-4x+3 \\
-8x^3+10x^2 & \\
\underline{8x^3-4x^2} & \\
6x^2-4x & \\
\underline{-6x^2+3x} & \\
-x-5 &
\end{array}$$

Cociente: $2x^2-4x+3$. Resto: $-x-5$.

5. Expresa cada una de las divisiones que se indican en la forma $\frac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$.

a) $\frac{x^2+3x-2}{x}$; b) $\frac{3x^2-2x}{x+2}$; c) $\frac{3x^2-12}{x^2+x}$; d) $\frac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}=x+3-\frac{2}{x}$.

b) $\frac{3x^2-2x}{x+2} \to$

$$\begin{array}{l|l}
3x^2-2x & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^2-6x} & 3x-8 \\
-8x & \\
\underline{8x+16} & \\
16 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x+2}=3x-8+\frac{16}{x+2}$.

c) $\dfrac{3x^2-12}{x^2+x} \to \begin{array}{l|l} 3x^2 \quad\quad -12 & x^2+x \\ \underline{-3x^2-3x} & 3 \\ \quad\quad -3x-12 & \end{array} \Rightarrow \dfrac{3x^2-12}{x^2+x}=3-\dfrac{3x+12}{x^2+x}$.

d) $\dfrac{x^3}{x^2-1} \to \begin{array}{l|l} x^3 & x^2-1 \\ \underline{-x^3+x} & x \\ \quad\quad x & \end{array} \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$.

6. Halla el cociente y el resto de la división:
a) $\left(-2x^4+3x^2-1\right):(x-3)$; b) $\left(2x^3-x^5-3x\right):(x+2)$.

Solución:
a) Como $-2x^4+3x^2-1=-2x^4+0x^3+3x^2+0x-1$, se forma el esquema:

	– 2	0	3	0	– 1
3		– 6	– 18	– 45	– 135
	– 2	– 6	– 15	– 45	– 136

El cociente es un polinomio de grado tres, con coeficientes – 2, – 6, – 15 y – 45. El resto vale – 136.
Luego: $C(x)=-2x^3-6x^2-15x-45$. Resto: –136

b) Para $\left(2x^3-x^5-3x\right):(x+2)$, se ordena como sigue:

$\left(-x^5+0x^4+2x^3+0x^2-3x+0\right):(x+2)$

Se forma el esquema:

	– 1	0	2	0	– 3	0
–2		2	– 4	4	–8	22
	– 1	2	– 2	4	– 11	22

El cociente es un polinomio de grado cuatro, con coeficientes – 1, 2, – 2, 4 y –11. El resto vale 22.
Luego: $C(x)=-x^4+2x^3-2x^2+4x-11$. Resto: 22.

7. Halla el valor de k para que sea exacta la división $\left(x^3-3x^2+k\right):(x+2)$. Comprueba el resultado.
Solución:
Por el teorema del factor, la división será exacta cuando el valor numérico del dividendo para $x = -2$ sea 0; cuando $D(-2)=0$.
Como $D(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2+k=0 \Rightarrow -8-12+k=0 \Rightarrow k=20$.

8. a) Halla el polinomio de 2º grado que tiene por raíces $x = 1$ y $x = -6$ y tal que $P(0) = 3$.
b) Halla el polinomio de tercer grado cuyas raíces son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -3$; y tal que $P(1) = -8$.
Solución:
a) $P(x)=a(x-1)(x+6) \to P(0)=a(0-1)(0+6)=-6a=3 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

Por tanto: $P(x)=-\dfrac{1}{2}(x-1)(x+6) \Rightarrow P(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$.

¡Ojo!, no puede multiplicarse por 2, ni por –2 (aunque que quede *más bonito*). El resultado es el dado.

b) $P(x)=ax(x-2)(x+3)$. Si $P(1)=-8 \Rightarrow P(1)=a\cdot 1(1-2)(1+3)=-6 \Rightarrow -4a=-8 \Rightarrow a=2$.

Por tanto: $P(x)=2x(x-2)(x+3) \Rightarrow P(x)=2x^3+2x^2-12x$.

9. a) Dado $P(x)=ax^3+bx^2-9x$, ¿puede suceder que $P(1)=P(-1)=0$? Si es posible, escríbelo factorizado.
b) Halla el valor de b y factoriza $P(x)=x^3+bx^2-9x+9$ sabiendo que $x=-3$ es una de sus raíces.
Solución:
a) $P(x)=ax^3+bx^2-9x$.

Si $P(1)=P(-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} P(1)=0 \to a+b-9=0 \\ P(-1)=0 \to -a+b+9=0 \end{cases} \Rightarrow a=9;\ b=0$.

El polinomio es $P(x)=9x^3-9x=9x\left(x^2-1\right)=9x(x-1)(x+1)$.

b) $P(x)=x^3+bx^2-9x+9$.

Como $P(-3)=0 \Rightarrow P(-3)=(-3)^3+b\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)+9=0 \Rightarrow 9b+9=0 \Rightarrow b=-1$.

Por tanto: $P(x)=x^3-x^2-9x+9$.

Dividiendo por el factor $x+3 \Rightarrow P(x)=(x+3)\left(x^2-4x+3\right)=(x+3)(x-1)(x-3)$.

Las raíces 1 y 3 se encuentran resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$.

10. Factoriza los siguientes polinomios:
a) $P(x)=-5x^2+x$; b) $P(x)=x^4+4x^2$; c) $P(x)=x^3-3x$; d) $P(x)=x^3+3x$
Solución:
Estas factorizaciones son muy sencillas. En casi todos los casos basta con sacar factor común y …

a) $P(x)=-5x^2+x=x(-5x+1) \to$ las raíces del polinomio son $x=0$ y $x=\dfrac{1}{5}$.

b) $P(x)=x^4+4x^2=x^2\left(x^2+4\right) \to$ el segundo factor es irreducible.

c) $P(x)=x^3-3x=x\left(x^2-3\right)=x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) \to$ observa que $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

d) $P(x)=x^3+3x=x\left(x^2+3\right) \to$ el segundo factor es irreducible.

11. Factoriza los siguientes polinomios:
a) $P(x)=3x^3-9x^2+6x$; b) $P(x)=8x^4+80x^3+200x^2$;
c) $P(x)=x^3-3x^2+4$; d) $P(x)=2x^3+5x^2-3x$
Solución:
a) $P(x)=3x^3-9x^2+6x \to$ Sacando factor común $3x$,

$$P(x)=3x^3-9x^2+6x=3x\left(x^2-3x+2\right).$$

Resolviendo la ecuación $x^2-3x+2=0 \to x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$.

Los otros factores son $(x-1)$ y $(x-2)$.

Por tanto: $P(x)=3x^3-9x^2+6x=3x(x-1)(x-2)$.

b) $P(x)=8x^4+80x^3+200x^2 \to$ Sacando factor común $8x^2$,

$P(x)=8x^4+80x^3+200x^2=8x^2\left(x^2+10x+25\right)$.

Resolviendo la ecuación $x^2+10x+25=0 \to x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-100}}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5$, raíz doble.

Se repite dos veces el factor $(x+5) \to$ esto es, $(x+5)^2$.

Por tanto:

$P(x)=8x^4+80x^3+200x^2=8x^2(x+5)^2$.

c) $P(x)=x^3-3x^2+4 \to$ hay que buscar una raíz a "ojo". Se prueba entre los divisores de 4, que son: ±1, ±2, ±4.

Para x = 1, $P(1)=2 \to$ No es raíz.

Para x = –1, $P(-1)=0 \to$ Sí es raíz $\Rightarrow$ (x + 1) es un factor $\Rightarrow$ $P(x)$ es divisible por (x + 1).

Se divide $P(x):(x+1) \to$ se obtiene de cociente $c(x)=x^2-4x+4$

	1	–3	0	4
–1		–1	4	–4
	1	–4	4	0

Luego:

$P(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)\left(x^2-4x+4\right) \Rightarrow P(x)=(x+1)(x-2)^2$.

Los otros "dos" factores se hallan resolviendo la ecuación $x^2-4x+4=0$. Sus soluciones son x = 2 y x = 2 (2 es doble) $\Rightarrow x^2-4x+4=(x-2)^2$.

d) $P(x)=2x^3+5x^2-3x$.

Se saca factor y se resuelve la ecuación de segundo grado que resulta.

$P(x)=x\left(2x^2+5x-3\right) \to 2x^2+5x-3=0$:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-5\pm7}{4}=\begin{cases}-3\\1/2\end{cases}.$$

Como las raíces son x = –3 y $x=\dfrac{1}{2}$, los factores correspondientes serán $x+3$ y $x-\dfrac{1}{2}$.

Luego, $P(x)=2x^3+5x^2-3x = x\left(2x^2+5x-3\right)=2\cdot x\cdot(x+3)\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

En este caso, queda más elegante la descomposición $P(x)=x\cdot(x+3)\cdot(2x-1)$.

Observación: Puedes utilizar el programa GeoGebra para comprobar tus resultados.
Debe usarse el comando Factoriza(expresión del polinomio), enter.
Para $P(x)=2x^3+5x^2-3x$ se teclea Factoriza(2x^3+5x^2–3x).

12. Para el polinomio $P(x)=2x^3-x^2+2x+5$:

a) ¿Cuánto vale P(–1) y P(1). ¿Es –1 raíz de $P(x)$? ¿Es 1 raíz de $P(x)$?

b) Con los datos de la pregunta anterior, ¿cuál es el resto de la división de $P(x)=2x^3-x^2+2x+5$ entre x + 1?, ¿y el resto de $P(x)$ entre x – 1?

c) Da su factorización.

Solución:

a) $P(-1)=2\cdot(-1)^3-(-1)^2+2\cdot(-1)+5=-2-1-2+5=0 \to -1$ es raíz de $P(x)$.
$P(1)=2\cdot1^3-1^2+2\cdot1+5=2-1+2+5=8 \to 1$ no es raíz de $P(x)$.

b) El resto de $P(x)$ entre $x+1$ es igual a $P(-1)=0 \to P(x)$ es divisible por $x+1 \to x+1$ es un factor de $P(x)$.
El resto de la división $P(x)$ entre $x-1$ vale 8, su valor numérico.

c) Dividiendo $P(x)=2x^3-x^2+2x+5$ entre $x+1$ se obtiene:
$P(x)=(x+1)\left(2x^2-3x+5\right)$
$\to$ El segundo factor esa irreducible, pues $2x^2-3x+5=0$ no tiene soluciones reales.

13. Halla la descomposición factorial de $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$.
Solución:
a) $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$, es un polinomio de tercer grado; no se puede sacar factor común x.
Se busca alguna raíz entera. Si existe debe ser uno de los divisores 6, que es el término independiente; estos divisores son: 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6.
Probamos con –1.
Sustituyendo: $P(-1)=-2-10-14-6\neq 0 \Rightarrow -1$ no es raíz $\Rightarrow x+1$ no es factor.
Probamos con 1:
$P(1)=2-10+14-6=0 \Rightarrow$ 1 es raíz de $P(x) \Rightarrow (x-1)$ es un factor $\Rightarrow$
$P(x)$ es divisible por $(x-1)$.
Dividiendo (por Ruffini) $P(x)$ entre $(x-1)$, se obtiene:
$P(x)=(x-1)\cdot\left(2x^2-8x+6\right)=2(x-1)(x^2-4x+3)$.
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x=1$ y $x=3 \Rightarrow (x-1)$ y $(x-3)$ son los factores.
En consecuencia:
$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=2(x-1)^2(x-3)$.
En este caso, la solución $x=1$ es doble, pues el factor $(x-1)$ se repite dos veces.

14. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
a) $\dfrac{4x-8}{2x}$; b) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}$; c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$; d) $\dfrac{x^3+x}{2x^2}$.
Solución:
Hay que buscar factores comunes en los dos términos de cada fracción.
a) $\dfrac{4x-8}{2x}=\dfrac{4(x-2)}{2x}=\dfrac{2(x-2)}{x}$.

b) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}=\dfrac{3(x^2-4)}{x+2}=\dfrac{3(x+2)(x-2)}{x+2}=3(x-2)$.

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

d) $\dfrac{x^3+x}{2x^2}=\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{2x\cdot x}=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

15. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2-4x}{3x}$; b) $\dfrac{2x^2+4x}{x+2}$; c) $\dfrac{2x^3-4x^2\left(x-5\right)}{x^3}$; d) $\dfrac{x^3-2x^2-5x}{4x}$.

<u>Solución</u>:

a) $\dfrac{2x^2-4x}{3x}=\dfrac{x\left(2x-4\right)}{3x}=\dfrac{2x-4}{3}$ → también vale la solución: $\dfrac{2x^2-4x}{3x}=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}$.

b) $\dfrac{2x^2+4x}{x+2}=\dfrac{2x\left(x+2\right)}{x+2}=2x$.

c) $\dfrac{2x^3-4x^2\left(x-5\right)}{x^3}=\dfrac{2x^2\left(x-2\cdot\left(x-5\right)\right)}{x^3}=\dfrac{2\left(-x+10\right)}{x}=\dfrac{-2x+20}{x}=-2+\dfrac{20}{x}$.

d) $\dfrac{x^3-2x^2-5x}{4x}=\dfrac{x\left(x^2-2x-5\right)}{4x}=\dfrac{x^2-2x-5}{4}=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{4}$.

16. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; b) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$; c) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$; d) $\dfrac{3(x-1)^2-2x(x-1)}{x^2-3x+2}$.

<u>Solución</u>:

Hay que buscar factores comunes en los dos miembros de la fracción.

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\dfrac{\left(x-3\right)^{\cancel{2}}}{\left(x+3\right)\cancel{\left(x-3\right)}}=\dfrac{x-3}{x+3}$.

b) Para $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$, los factores del denominador son fáciles de identificar, pues $x^2-1=(x-1)(x+1)$. ¿Tendrá el numerador alguno de esos factores? Si se prueba x = 1 se ve que es raíz del numerador ⇒ x – 1 es uno de sus factores. Por tanto, dividiendo se obtiene que $x^3-x^2+x-1=(x-1)\cdot(x^2+1)$.

En consecuencia: $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

c) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}{x\left(x+3\right)}=\dfrac{x-1}{x}$.

d) En el numerador de $\dfrac{3(x-1)^2-2x(x-1)}{x^2-3x+2}$ aparece el factor común x – 1.

Descomponiendo el denominador en factores:

$$\dfrac{3(x-1)^2-2x(x-1)}{x^2-3x+2}=\dfrac{\left(x-1\right)\left[3(x-1)-2x\right]}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\dfrac{x-3}{x-2}.$$

17. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)^2-(x^2-x)\cdot(x+1)}{2x^2-2}$; b) $\dfrac{2x^2(x-3)-x(x^2-9)}{x^2(x-3)^2}$

Solución:
Hay que buscar factores comunes en los dos miembros de la fracción.

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)^2-(x^2-x)\cdot(x+1)}{2x^2-2}$ → en el numerador puede sacarse factor común (x +1); lo buscamos en el denominador. Al hacerlo se descubre otro factor común, x –1 →

$$\frac{(x+1)\left[(x-1)(x+1)-x(x-1)\right]}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}[x+1-x]}{2\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{2}.$$

b) A simple vista deberían verse los factores comunes x y x – 3.

$$\frac{2x^2(x-3)-x(x^2-9)}{x^2(x-3)^2}=\frac{2x^2\cancel{(x-3)}-x\cancel{(x-3)}(x+3)}{x^2(x-3)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{2x^{\cancel{2}}-\cancel{x}(x+3)}{x^{\cancel{2}}(x-3)}=\frac{2x-(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x-3}{x(x-3)}=\frac{1}{x}.$$

18. Halla, simplificando el resultado, las siguientes sumas y restas:

a) $3x-\dfrac{x^2-1}{x}$, b) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{3}{x}$; c) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3x}{2}$; d) $\dfrac{x^2}{x+3}-x$.

Solución:

a) $3x-\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{3x^2-\left(x^2-1\right)}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

b) $\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2\cdot x}{(x+1)x}-\dfrac{3(x+1)}{(x+1)x}=\dfrac{x^3-3(x+1)}{(x+1)x}=\dfrac{x^3-3x-3}{(x+1)x}$ → también puede operarse el denominador, pero no suele ser necesario. Es recomendable dejarlo así, pues se ve mejor la posible simplificación de la expresión.

c) $$\frac{x^2}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{2}=\frac{x^2(x-2)\cdot 2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}-\frac{2(x+1)\cdot 2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}+\frac{3x(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=$$

$$=\frac{2x^3-4x^2}{(x+1)(x-2)\cdot 2}-\frac{4x+4}{(x+1)(x-2)\cdot 2}+\frac{3x^3-3x^2-6x}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=\frac{2x^3-4x^2-4x-4+3x^3-3x^2-6x}{(x+1)(x-2)\cdot 2}=$$

$=\dfrac{5x^3-7x^2-10x-4}{2(x+1)(x-2)}$ → al dejar el denominador indicado es fácil ver que, en este caso, no puede simplificarse la expresión, pues ni x = –1, ni x = 2 son raíces del numerador. Por tanto, en el numerador no están los factores $(x+1)$ o $(x-2)$.

d) $\dfrac{x^2}{x+3}-x=\dfrac{x^2-x(x+3)}{x+3}=\dfrac{x^2-x^2-3x}{x+3}=\dfrac{-3x}{x+3}$.

19. Halla y simplifica el resultado:

a) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2-2x}{3}$; b) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{5}{x^2-1}$; c) $\frac{4x^2-2}{2x+1}-2x$; d) $1-\frac{3x-2}{x-2}$

Solución:

a) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2-2x}{3}=\frac{x^2\cdot 3-(x^2-2x)(x+1)}{(x+1)\cdot 3}=\frac{3x^2-\left(x^3+x^2-2x^2-2x\right)}{3(x+1)}=\frac{-x^3+4x^2+2x}{3(x+1)}$.

b) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{5}{x^2-1}=\frac{x^2\left(x^2-1\right)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}+\frac{5(x+1)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}=\frac{x^2\left(x^2-1\right)+5(x+1)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}=\frac{x^4-x^2+5x+5}{(x+1)\left(x^2-1\right)}$.

(Salvo indicación en contra puede convenir no operar el denominador.)

En este caso, como el segundo denominador $x^2-1=(x+1)(x-1)$ es múltiplo del primero, un denominador común es el mismo x^2-1, luego:

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{5}{x^2-1}=\frac{x^2(x-1)}{x^2-1}+\frac{5}{x^2-1}=\frac{x^3-x^2+5}{x^2-1}.$$

c) $\frac{4x^2-2}{2x+1}-2x=\frac{4x^2-2-2x(2x+1)}{2x+1}=\frac{4x^2-2-4x^2-2x}{2x+1}=\frac{-2-2x}{2x+1}$.

d) $1-\frac{3x-2}{x-2}=\frac{x-2-(3x-2)}{x-2}=\frac{x-2-3x+2}{x-2}=\frac{-2x}{x-2}$.

20. Halla, simplificando el resultado, las siguientes operaciones:

a) $\frac{3x+2}{5x}-\frac{2x-1}{x}$; b) $\frac{-2x+1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}$; c) $\frac{x+2}{x}-\frac{x-3}{x^2}+\frac{2x+1}{x^3}$; d) $\frac{x^2-4}{x-5}-x$.

Solución:

a) $\frac{3x+2}{5x}-\frac{2x-1}{x}=\frac{3x+2}{5x}-\frac{5(2x-1)}{5x}=\frac{3x+2-10x+5}{5x}=\frac{-7x+7}{5x}$

b) m.c.m. de los denominadores: $x^2-1 \Rightarrow$

$$\frac{-2x+1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}=\frac{(-2x+1)(x+1)}{x^2-1}+\frac{2(x-1)}{x^2-1}-\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\frac{-2x^2-x+1}{x^2-1}+\frac{2x-2}{x^2-1}-\frac{x}{x^2-1}=\frac{-2x^2-1}{x^2-1}.$$

c) m.c.m. de los denominadores: $x^3 \Rightarrow \frac{x+2}{x}-\frac{x-3}{x^2}+\frac{2x+1}{x^3}=\frac{(x+2)\cdot x^2}{x^3}-\frac{(x-3)\cdot x}{x^3}+\frac{2x+1}{x^3}=$

$$=\frac{x^3+2x^2}{x^3}-\frac{x^2-3x}{x^3}+\frac{2x+1}{x^3}=\frac{x^3+2x^2-x^2+3x+2x+1}{x^3}=\frac{x^3+x^2+5x+1}{x^3}.$$

d) $\frac{x^2-4}{x-5}-x=\frac{x^2-4-x\cdot(x-5)}{x-5}=\frac{x^2-4-x^2+5x}{x-5}=\frac{5x-4}{x-5}$.

21. Halla, simplificando el resultado:

a) $\frac{2x-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{x-1}$ b) $\frac{x^2-9}{x+2}:\frac{x+3}{3-x}$ c) $\frac{2x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x}{x+1}$ d) $\frac{x^2-4}{x+1}:\frac{x-2}{x^2-1}$

Solución:

a) $\frac{2x-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{x-1}$ = (puede simplificarse antes de operar) = $\frac{2\cancel{(x-1)}}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{\cancel{x-1}}=\frac{2x^2}{x^2+1}$.

b) $\frac{x^2-9}{x+2}:\frac{x+3}{3-x}=\frac{(x^2-9)(3-x)}{(x+2)(x+3)}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)(3-x)}{(x+2)\cancel{(x+3)}}=-\frac{(x-3)^2}{x+2}$.

c) $\frac{2x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x}{x+1}$ = (puede simplificarse antes de operar) = $\frac{2\cancel{(x+1)}}{x^2-1}\cdot\frac{x}{\cancel{x+1}}=\frac{2x}{x^2+1}$.

d) $\frac{x^2-4}{x+1}:\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x^2-4)(x^2-1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$.

22. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2$; b) $\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)$;

c) $\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2:\left(\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)\right)$; d) $\frac{2x}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{x}{1+x^2}$.

Solución:

a) $\underline{\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2}=\left(\frac{2x+2-x}{x+1}\right)^2=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$ → Puede dejarse así; no es necesario desarrollar los cuadrados, salvo que se pida.

b) $\underline{\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)}=\frac{2x+1+(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=\frac{2x+1+x^2-1}{x+1}=\frac{2x+x^2}{x+1}$.

c) $\underline{\left(2-\frac{x}{x+1}\right)^2}:\underline{\left(\frac{2x+1}{x+1}+(x-1)\right)}=\underline{\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}}:\underline{\frac{x(x+2)}{x+1}}=\frac{(x+2)^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}{x(x+1)^{\cancel{2}}\cancel{(x+2)}}=\frac{x+2}{x(x+1)}$.

d) $\frac{2x}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{2x}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=$

$=\frac{2x}{2(1+x^2)}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=0$.

23. Transforma, sin hacer la división, la expresión $\dfrac{D(x)}{d(x)}$ en su equivalente de la forma $C(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}$, en los casos:

a) $\dfrac{2x^3+3x-5}{x}$; b) $\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2}$; c) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+3}$; d) $\dfrac{x^2}{x-1}$.

Solución:

Este procedimiento agiliza los cálculos en muchos casos sencillos. Para conseguirlo hay que buscar en el numerador expresiones que sean fácilmente divididas por el denominador; esto debe hacerse "a ojo". Puede dar resultado: descomponer en sumas; sacar factor común; sumar y restar la misma cosa; … La agilidad se consigue practicando.

a) $\dfrac{2x^3+3x-5}{x}=\dfrac{2x^3}{x}+\dfrac{3x}{x}+\dfrac{-5}{x}=2x^2+3-\dfrac{5}{x}$.

b) $\dfrac{2x^3+3x-5}{x^2}=\dfrac{2x^3}{x^2}+\dfrac{3x-5}{x^2}=2x+\dfrac{3x-5}{x^2}$.

c) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+3}=\dfrac{x(x+3)+5}{x+3}=\dfrac{x(x+3)}{x+3}+\dfrac{5}{x+3}=x+\dfrac{5}{x+3}$.

d) Si se resta y suma 1 en el numerador, queda:

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}.$$

24. Aplicando la fórmula de Newton desarrolla de las siguientes potencias:

a) $(2+5x)^3$; b) $(1-x)^5$; c) $\left(x^2+2\right)^6$; d) $(2x-3)^4$.

Solución:

a) $(2+5x)^3=\binom{3}{0}\cdot 2^3+\binom{3}{1}\cdot 2^2\cdot(5x)+\binom{3}{2}\cdot 2\cdot(5x)^2+\binom{3}{3}\cdot(5x)^3=$

$=1\cdot 8+3\cdot 4\cdot(5x)+3\cdot 2\cdot 25x^2+1\cdot 125x^3=125x^3+150x^2+60x+8$.

b) $(1-x)^5=\binom{5}{0}1^5-\binom{5}{1}1^4\cdot x+\binom{5}{2}1^3\cdot x^2-\binom{5}{3}1^2\cdot x^3+\binom{5}{4}1x^4-\binom{5}{5}x^5=$

$=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$.

c) $\left(x^2+2\right)^6=$

$\binom{6}{0}\left(x^2\right)^6+\binom{6}{1}\left(x^2\right)^5\cdot 2+\binom{6}{2}\left(x^2\right)^4\cdot(2)^2+\binom{6}{3}\left(x^2\right)^3\cdot(2)^3+\binom{6}{4}\left(x^2\right)^2\cdot(2)^4+\binom{6}{5}\left(x^2\right)\cdot(2)^5+\binom{6}{6}\cdot(2)^6=$

$=1\cdot x^{12}+6x^{10}\cdot 2+15x^8\cdot 4+20x^6\cdot 8+15x^4\cdot 16+6x^2\cdot 32+1\cdot 64=$

$=x^{12}+12x^{10}+60x^8+160x^6+240x^4+192x^2+64$.

d) $(2x-3)^4=\binom{4}{0}(2x)^4-\binom{4}{1}(2x)^3\cdot 3+\binom{4}{2}(2x)^2\cdot(3)^2-\binom{4}{3}(2x)\cdot(3)^3+\binom{4}{4}\cdot(3)^4=$

$=1\cdot 2^4x^4-4\cdot 2^3x^3\cdot 3+6\cdot 2^2x^2\cdot 9-4\cdot 2x\cdot 27+1\cdot 81=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$.

25. Halla el desarrollo de:

a) $\left(3x^2+2\right)^3$; b) $\left(x+\sqrt{2}\right)^4$; c) $\left(x^2-3\right)^5$; d) $\left(\dfrac{x}{2}-2\right)^6$.

Solución:

a) $\left(3x^2+2\right)^3=\binom{3}{0}\left(3x^2\right)^3+\binom{3}{1}\left(3x^2\right)^2\cdot 2+\binom{3}{2}\left(3x^2\right)\cdot(2)^2+\binom{3}{3}\cdot(2)^3=27x^6+54x^4+36x^2+8$.

b) $\left(x+\sqrt{2}\right)^4=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)+\binom{4}{2}x^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\binom{4}{3}x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3+\binom{4}{4}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4=$

$=x^4+4\sqrt{2}x^3+12x^2+8\sqrt{2}x+4$.

c) $\left(x^2-3\right)^5=\binom{5}{0}\left(x^2\right)^5-\binom{5}{1}\left(x^2\right)^4\cdot 3+\binom{5}{2}\left(x^2\right)^3\cdot(3)^2-\binom{5}{3}\left(x^2\right)^2\cdot(3)^3+\binom{5}{4}\left(x^2\right)\cdot(3)^4-\binom{5}{5}\cdot(3)^5=$

$=1\cdot x^{10}-5x^8\cdot 3+10x^6\cdot 9-10x^4\cdot 27-5x^2\cdot 81+1\cdot 243=$

$=x^{10}-15x^8+90x^6-270x^4-405x^2+243$.

d) $\left(\dfrac{x}{2}-2\right)^6$ $\to$ Los coeficientes son: 1; 6; 15; 20; 15; 6; 1.

$=1\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^6-6\left(\dfrac{x}{2}\right)^5\cdot 2+15\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\cdot(2)^2-20\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\cdot(2)^3+15\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot(2)^4-6\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot(2)^5+1\cdot(2)^6=$

$=\dfrac{1}{64}x^6-\dfrac{12}{32}x^5+\dfrac{60}{16}x^4-\dfrac{160}{8}x^3+\dfrac{240}{4}x^2-\dfrac{192}{2}x+64=$

$=\dfrac{1}{64}x^6-\dfrac{3}{8}x^5+\dfrac{15}{4}x^4-20x^3+60x^2-96x+64$.

26. Halla el término décimo segundo del desarrollo de la potencia:

a) $(x+1)^{15}$; b) $(x-1)^{18}$.

Solución:

a) Los términos del desarrollo de $(p+q)^n$ son de la forma $\binom{n}{r}p^{n-r}q^r$, donde r toma los valores naturales desde 0 hasta n. El término que ocupa la posición primera es $t_1=\binom{n}{0}p^{n-0}q^0$; el que ocupa la posición segunda, $t_2=\binom{n}{1}p^{n-1}q^1$; … el que ocupa la posición i–ésima, $t_i=\binom{n}{i-1}p^{n-(i-1)}q^{(i-1)}$.

Para $(x+1)^{15}\to t_{12}=\binom{15}{11}x^{11}\cdot 1^4=\dfrac{15!}{11!\cdot 4!}\cdot x^{11}=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{11}=1365x^{11}$.

$\to$ En la calculadora teclea: 15 $\boxed{\text{nCr}}$ 11 $\boxed{=}$ $\to$ 1365.

b) Los términos del desarrollo de $(p-q)^n$ siguen la misma secuencia que los de $(p+q)^n$, pero los que ocupan posiciones pares llevan signo negativo; los pares, signo positivo.

Para $(x-1)^{18}\to t_{12}=-\binom{18}{11}x^{11}\cdot 1^7=\dfrac{18!}{11!\cdot 7!}\cdot x^{11}=\dfrac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{11}=31824x^{11}$.

$\to$ En la calculadora teclea: 18 $\boxed{\text{nCr}}$ 11 $\boxed{=}$ $\to$ 31824.

27. Halla la descomposición en fracciones simples de las siguientes fracciones racionales:

a) $\dfrac{x+8}{x^2+x-2}$; b) $\dfrac{2}{1-x^2}$; c) $\dfrac{x+3}{x(x-3)}$; d) $\dfrac{x-2}{x^2+4x+4}$.

Solución:

a) Las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2 \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

Por tanto, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow x+8=A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+8=(A+B)x+2A-B \Rightarrow \begin{cases} 1=A+B \\ 8=2A-B \end{cases}$$

($\rightarrow$ se han igualado los coeficientes de x y los términos independientes).

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de A y B, que son $A = 3$ y $B = -2$.

Por tanto:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

b) El denominador se puede escribir como $(1-x)(1+x)$, luego:

$$\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}.$$

Como la primera y la última fracción son iguales y sus denominadores coinciden, se tendrá que:

$$2=A(1+x)+B(1-x) \Rightarrow 2=(A-B)x+(A+B) \Rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=2 \end{cases} \Rightarrow A=1;\ B=1.$$

Observa que el coeficiente de x en el primer miembro de la igualdad vale 0 $\rightarrow 0x=(A-B)x$.

Con esto: $\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$.

c) El denominador se da descompuesto en factores. Por tanto:

$$\frac{x+3}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)}{x(x-3)}+\frac{Bx}{x(x-3)}=\frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} \Rightarrow x+3=A(x-3)+Bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -3A=3 \end{cases} \Rightarrow A=-1;\ B=2.$$

Luego: $\dfrac{x+3}{x(x-3)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{2}{x-3}$.

d) Las raíces del denominador de $\dfrac{x-2}{x^2+4x+4}$ son iguales: $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

Se hace la descomposición:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+4}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x-2}{x^2+4x+4}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2=A(x+2)+B \Rightarrow x-2=Ax+2A+B \Rightarrow \begin{cases} 1=A \\ -2=2A+B \end{cases} \Rightarrow A=1;\ B=-4.$$

Por tanto: $\dfrac{x-2}{x^2+4x+4}=\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{4}{(x+2)^2}$.

28. Descompón en fracciones simples:

a) $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-2}$; b) $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$.

<u>Solución</u>:

En estos dos casos primero hay que dividir.

a) Por Ruffini: $\left(x^3-3x^2+2\right):\left(x-2\right)\to$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}$$

El cociente es $C(x)=x^2-x-2$; el resto, –2.

Por tanto:

$$\frac{x^3-3x^2+2}{x-2}=x^2-x-2-\frac{2}{x-2}.$$

b) Para $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}\to$

$$\begin{array}{rrr|l} x^3-3x^2 & & +2 & x^2-4 \\ \hline -x^3 & -4x & & x-3 \\ \hline -3x^2 & -4x & & \\ 3x^2 & & -12 & \\ \hline & -4x & -12 & \end{array}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}=x-3+\dfrac{-4x-12}{x^2-4}$.

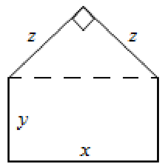
Ahora hay que descomponer la fracción $\dfrac{-4x-12}{x^2-4}$.

$$\frac{-4x-12}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\left(x+2\right)+B\left(x-2\right)}{x^2-4}\Rightarrow\begin{cases}-4=A+B\\-12=2A-2B\end{cases}\Rightarrow A=-5;\ B=1.$$

Por tanto:

$$\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}=x-3+\frac{-4x-12}{x^2-4}=x-3-\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+2}.$$

29. El perímetro de una ventana simétrica como la que se muestra en la figura adjunta vale 6 m. Determina la expresión que da su superficie en función del lado x (el ángulo superior es recto). ¿Cuánto valdrá esa superficie si x = 2 m?



<u>Solución</u>:

Si el lado inclinado vale z, por Pitágoras, se tendrá:

$$z^2+z^2=x^2\Rightarrow z=\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Si el lado vertical vale y, como el perímetro es 6, se cumplirá:

$$x+2y+2z=6\Rightarrow x+2y+\frac{2x}{\sqrt{2}}=6\Rightarrow y=\frac{6-x(1+\sqrt{2})}{2}.$$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A=xy+\frac{z^2}{2}=x\cdot\frac{6-x(1+\sqrt{2})}{2}+\frac{x^2}{4}\Rightarrow A=\frac{12x-\left(1+2\sqrt{2}\right)x^2}{4}.$$

Se obtiene la expresión polinómica $A(x)=3x-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}x^2$.

Para x = 2 m, $A(2)=3\cdot2-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}\cdot2^2=5-2\sqrt{2}$ m^2.