

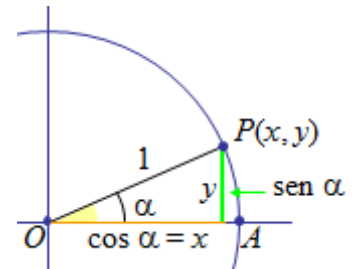
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera suele recurrirse a la circunferencia goniométrica, con centro en el origen de coordenadas y de radio 1. El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo OX , lado OA ; el otro lado puede abrirse determinando ángulos entre 0° y 360° ; además ese lado corta a la circunferencia en un punto de coordenadas $P(x, y)$. El ángulo es AOP .

- Los ángulos entre 0° y 90° cortan a la circunferencia en el primer cuadrante, siendo las coordenadas de $P(x, y)$ ambas positivas. Además, para cualquier ángulo α se tiene:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{1} = y \rightarrow \text{cateto opuesto: valor de la ordenada de } P(x, y).$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{1} = x \rightarrow \text{cateto contiguo: valor de la abscisa de } P(x, y).$$

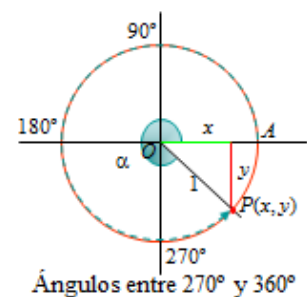
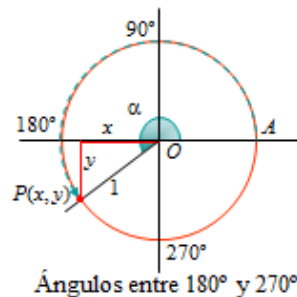
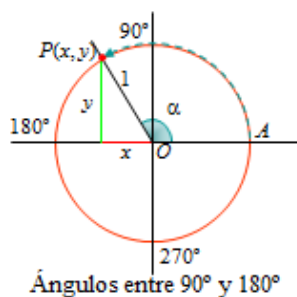
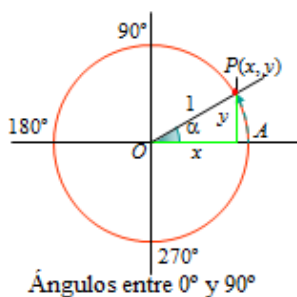


- Para ángulos mayores de 90° se generaliza el resultado anterior.

Esto es, para cualquier ángulo α , determinado por los puntos $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ y $P(x, y)$, se define:

$\text{sen } \alpha = y$, el valor de la ordenada de $P(x, y)$;

$\text{cos } \alpha = x$, el valor de la abscisa de $P(x, y)$.



Como puede observarse en los dibujos anteriores:

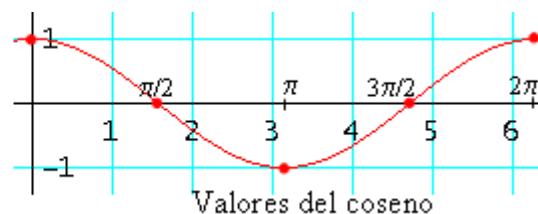
- El seno de un ángulo α es positivo cuando mide entre 0° y 180° (primero y segundo cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes tercero y cuarto: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.
- El coseno de un ángulo es positivo cuando α mide entre 0° y 90° o entre 270° y 360° (primero y cuarto cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes segundo y tercero.

Observaciones y aclaraciones:

1) Lo dicho para grados tiene su traducción inmediata a radianes:

Para valores de x comprendidos entre 0 y π , $0 < x < \pi$, los valores de $\sin x$ son positivos; y para valores de x comprendidos entre π y 2π , $\pi < x < 2\pi$, el seno toma valores negativos.

De manera análoga: Para valores de x comprendidos entre 0 y $\pi/2$ o $3\pi/2$ y 2π , los valores de $\cos x$ son positivos; y para valores de x comprendidos entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, $\pi/2 < x < 3\pi/2$, el coseno toma valores negativos.



2) Si se da más de una vuelta (ángulos mayores de 360° , o para x mayor de 2π) los valores de seno y de coseno vuelven a repetirse. Así, por ejemplo $\text{sen } 410^\circ = \text{sen } (360^\circ + 50^\circ) = \text{sen } 50^\circ$. Y por lo mismo, $\text{cos } (2\pi + 1) = \text{cos } 1$, por ejemplo. Esto significa que el seno y el coseno son funciones periódicas de período 360° o 2π radianes.

→ En general:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha; \quad \text{para } k \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Para los ángulos en radianes suele utilizarse la letra x ; $2k\pi$ significa $k \cdot 2\pi$, que para k un número entero indica k giros. Idéntico significado tiene $k \cdot 360^\circ$.

3) El comportamiento de la tangente puede deducirse del seno y coseno a partir de la relación

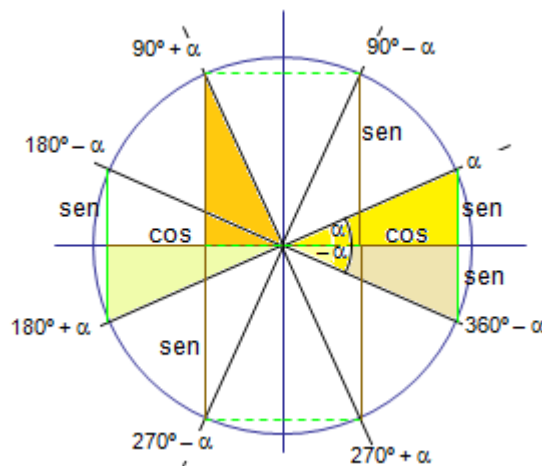
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad \text{Lo más significativo es que la tangente es una función periódica de período } \pi; \text{ esto}$$

significa que $\tan(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \tan \alpha$ o, en radianes, $\tan(x + k\pi) = \tan x$.

Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

Al girar el lado variable (OP) del ángulo AOP , se generan una serie de regularidades que permiten conocer las razones trigonométricas de otros ángulos a partir de las de α . (En la siguiente figura puede verse que todos los triángulos coloreados son iguales, salvo giros). En concreto se cumple:

- Complementarios: $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ $\text{tag}(90^\circ - \alpha) = 1/\text{tag } \alpha$
- Suplementarios: $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$ $\text{tag}(180^\circ - \alpha) = -\text{tag } \alpha$
- Opuestos: $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{tag}(360^\circ - \alpha) = -\text{tag } \alpha$
- Ángulo + 90° : $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{cos}(90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{tag}(90^\circ + \alpha) = -1/\text{tag } \alpha$
- Ángulo + 180° : $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$ $\text{tag}(180^\circ + \alpha) = \text{tag } \alpha$



Ejemplos:

$$\text{De } \text{sen } 25^\circ = 0,4226 \quad \Rightarrow \text{cos } 65^\circ = \text{sen } 155^\circ = \text{cos } 295^\circ = 0,4226;$$

$$\Rightarrow \text{cos } 115^\circ = \text{sen } 205^\circ = \text{cos } 245^\circ = \text{cos } 335^\circ = \text{sen}(-25^\circ) = -0,4226$$

$$\text{De } \text{cos } 25^\circ = 0,9063 \quad \Rightarrow \text{sen } 65^\circ = \text{sen } 115^\circ = \text{cos } 335^\circ = \text{cos}(-25^\circ) = 0,9063;$$

$$\Rightarrow \text{cos } 155^\circ = \text{cos } 205^\circ = \text{sen } 245^\circ = \text{sen } 295^\circ = -0,9063$$

Pequeños retos

1. a) Sabiendo que $\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0,866$, halla (y comprueba después con la calculadora) el valor del seno de los siguientes ángulos: 120° ; 240° ; 300° .

b) Ídem: si $\text{cos } 150^\circ = -\sqrt{3}/2 \approx -0,866$, halla: $\text{cos } 30^\circ$, $\text{cos } 210^\circ$ y $\text{cos } 330^\circ$.

Solución: 1. a) $\sqrt{3}/2$; $-\sqrt{3}/2$; $-\sqrt{3}/2$. b) $\sqrt{3}/2$; $-\sqrt{3}/2$; $\sqrt{3}/2$.