

DIVISIBILIDAD: MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Máximo común divisor

- Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de los divisores comunes se llama máximo común divisor: m.c.d. o mcd.

Ejemplo:

Los números 48 y 36 tienen varios divisores comunes. El mayor de ellos es 12.

Divisores de 48: **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12**, 16, 24 y 48.

Divisores de 36: **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12**, 18 y 36.

Mínimo común múltiplo

- Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de los múltiplos comunes se llama mínimo común múltiplo: m.c.m. o mcm.

Ejemplo:

Los números 48 y 36 tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos es 144.

Múltiplos de 48: 48, 96, **144**, 192, 240, **288**, ..., **432**, ..., **576**...

Múltiplos de 36: 36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, **288**, ..., **432**, ..., **576**...

Método para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números

Para calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse “con el menor exponente”).
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplos:

a) Los números 48 y 36 se descomponen así: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
 m.c.d.(48, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.(48, 36) = $2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$.

b) Los números 100 y 135 se descomponen así: $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $135 = 3^3 \cdot 5$.
 m.c.d.(100, 135) = 5. m.c.m.(100, 135) = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 27 \cdot 25 = 2700$.

c) Para hallar el mcd y el mcm de los números 24, 33 y 90:

1) se escriben como producto de sus factores primos: $24 = 2^3 \cdot 3$; $33 = 3 \cdot 11$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

2) $\text{mcd}(24, 33, 90) = 3$, pues 3 es el único factor común de los tres números; siendo 1 el menor exponente.

3) $\text{mcm}(24, 33, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960 \rightarrow$ Observa que: $3960 = \underline{24} \cdot 165 = \underline{33} \cdot 120 = \underline{90} \cdot 44$.

Números primos entre sí

Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es 1.

Ejemplos:

a) Los números 10 y 21 son primos entre sí.

Los divisores de 10 son 1, 2, 5, y 10; los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21.

El único divisor común es 1.

En este caso:

$$\text{m.c.d.}(10, 21) = 1.$$

$$\text{m.c.m.}(10, 21) = 10 \cdot 21 = 210 \rightarrow 10 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7.$$

b) Los números 36 y 55 son primos entre sí.

Observa que: $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $55 = 5 \cdot 11$.

$$\text{m.c.d.}(36, 55) = 1.$$

$$\text{m.c.m.}(36, 55) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 36 \cdot 55 = 1980.$$

- Si dos números p y q son primos entre sí $\Rightarrow \text{mcm}(p, q) = p \cdot q$.

Pequeños retos

1. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

- a) 25 y 35 b) 42 y 63 c) 10, 30 y 80 d) 24, 36 y 72

2. Halla todos los divisores comunes de:

- a) 18 y 24 b) 21 y 28 c) 45 y 60 d) 9 y 23

En cada caso indica el mayor de ellos: el mcd.

3. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

4. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

5. Indica si las siguientes parejas de números son o no primos entre sí.

- a) 21 y 40 b) 14 y 35 c) 33 y 143 d) 34 y 119

Soluciones:

1. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. d) 12 y 72.

2. a) 6, 3, 2, 1 \rightarrow mcd = 6. b) 7, 1 \rightarrow mcd = 7. c) 15, 5, 3, 1 \rightarrow mcd = 15. d) 1.

3. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. c) 180, 360, 540. d) 207, 414, 621. En cursiva el mcm.

4. 210, 420, 630 y 840; $\text{mcm}(2, 3, 5, 7) = 210$

5. a) Sí. b) No. Divisor común: 7. c) No. Divisor común: 11. d) No. Divisor común: 17.