EXAMEN DE MATEMÁTICAS II GEOMETRÍA

1. (Madrid, junio 2014)

Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.
b) (1 punto) Hallar la distancia de P a r.
c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

2. (Extremadura, julio 14)
En $\mathbf{R}^3$, considere los cuatro puntos $A = (0, 1, 1)$, $B = (–2, 0, –1)$, $C = (–1, 1, 0)$ y $D = (–2, 2, 1)$, y sea r la recta que pasa por C y por D.
a) (1 punto) Obtenga ecuaciones paramétricas de r.
b) (1,5 puntos) Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo APB sea rectángulo en su vértice P.

3. (Asturias, junio 17)
Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-1}{2}=z$. Calcula:
a) (0,8 puntos) Un vector director de cada recta.
b) (0,7 puntos) El ángulo que forman las rectas.
c) (1 punto) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$.

4. (1 punto) Calcula b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ determinen un plano que contenga al punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

5. a) (0,4 puntos) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, –1)$ y es paralela a

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$$

b) (0,6 puntos) Halla también la ecuación del plano que contenga a ambas rectas.

Alcalá de Henares, 30 de enero de 2018

Soluciones

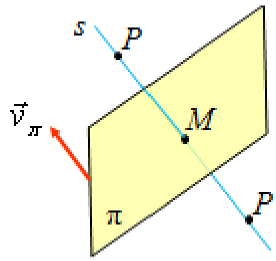
<u>**1**. Madrid, junio 2014</u>

Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.
b) (1 punto) Hallar la distancia de P a r.
c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

<u>Solución</u>:

a) La situación es la indicada en la figura adjunta.



Recta s perpendicular a π por $P(1, 0, 1)$:

Como $\vec{v}_\pi = (1, 5, -6) \Rightarrow s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases}$

Corte de la recta s con plano π (punto M):

$1 + \lambda + 5 \cdot (5\lambda) - 6 \cdot (1 - 6\lambda) = 1 \Rightarrow 62 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3/31 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right)$.

Suponiendo que el simétrico es $P' = (x_0, y_0, z_0)$, el punto medio de P y P' es:

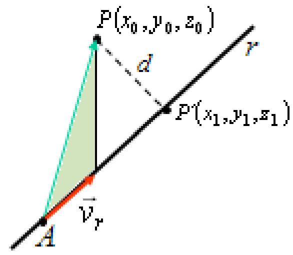
$M = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right)$

Por tanto: $\left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$\frac{34}{31} = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{37}{31}$; $\frac{15}{31} = \frac{y_0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{30}{31}$; $\frac{13}{31} = \frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -\frac{5}{31}$

Por tanto, el punto simétrico de P respecto de π es $P' = \left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, \frac{-5}{31}\right)$.

b) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:



$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}, \text{ siendo } A \in r.$$

En este caso:

$$r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_r = (0, 1, 0)$

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = 1$.

Luego $d(P,r)=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

c) Corte del plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$ con los ejes coordenados *OX*, *OY* y *OZ*.
Con *OX*: *A*(1, 0, 0). Con *OY*: *B*(0, 1/5, 0). Con *OZ*: *C*(0, 0, –1/6).

El volumen del tetraedro viene dado por: $V_T=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$

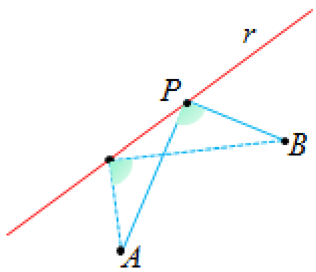
$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & -1/6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)\right|=\frac{1}{180}\ \text{u}^3.$$

<u>**2**. Extremadura, julio 14</u>
En $\mathbf{R}^3$, considere los cuatro puntos *A* = (0, 1, 1), *B* = (–2, 0, –1), *C* = (–1, 1, 0) y *D* = (–2, 2, 1), y sea *r* la recta que pasa por *C* y por *D*.
a) (1 punto) Obtenga ecuaciones paramétricas de *r*.
b) (1,5 puntos) Halle los puntos *P* de la recta *r* para los que el triángulo *APB* sea rectángulo en su vértice *P*.
<u>Solución</u>:
a) La recta que pasa por *C* y *D* viene determinada por el vector ***DC*** y por el punto *C*.
DC = (–1, 1, 0) – (–2, 2, 1) = (1, –1, –1).

Luego $r\equiv\begin{cases}x=-1+t\\ y=1-t\\ z=-t\end{cases}$.

b) Sea $P=(-1+t,\ 1-t,\ -t)$ un punto genérico de *r*.
El triángulo *APB* será rectángulo cuando los vectores ***AP*** y ***BP*** sean perpendiculares; lo que significa que su producto escalar vale 0.

$$\overrightarrow{AP}=(-1+t,\ 1-t,\ -t)-(0,\ 1,\ 1)=(-1+t,\ -t,\ -t-1)$$
$$\overrightarrow{BP}=(-1+t,\ 1-t,\ -t)-(-2,\ 0,\ -1)=(1+t,\ 1-t,\ 1-t)$$



Producto escalar:
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(-1+t,\ -t,\ -t-1)\cdot(1+t,\ 1-t,\ 1-t)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3t^2-t-2=0\ \Rightarrow t=1;\ t=-\frac{2}{3}.$$
Para *t* = 1 se obtiene *P* = (0, 0, –1).
Para $t=-\dfrac{2}{3}$, $P=\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$.

3. Asturias, junio 17

Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-1}{2}=z$. Calcula:

a) (0,8 puntos) Un vector director de cada recta.
b) (0,7 puntos) El ángulo que forman las rectas.
c) (1 punto) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$.

Solución:

a) Expresando ambas rectas en sus ecuaciones paramétricas, se tiene:

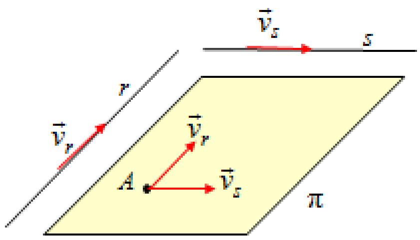
$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1-2t \\ y=\quad t \\ z=1 \end{cases} \to \text{Vector director: } \vec{v}_r=(-2, 1, 0).$$

$$s: x+1=\frac{y-1}{2}=z \Rightarrow s:\begin{cases} x=-1+h \\ y=1+2h \\ z=\quad h \end{cases} \to \text{Vector director: } \vec{v}_s=(1, 2, 1).$$

b) $\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\left|\dfrac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right| \Rightarrow \cos(r, s)=\dfrac{(-2,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ 2,\ 1)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{-2+2}{\sqrt{30}}=\dfrac{0}{\sqrt{30}}=0$.

El ángulo que forman es: $\alpha=\arccos 0=90º$. Son rectas perpendiculares,

c) El plano pedido viene determinado por el punto A y por los vectores de dirección de ambas rectas.
Sus ecuaciones paramétricas son:



$$\pi:\begin{cases} x=1-2t+h \\ y=2+t+2h \\ z=1\quad +h \end{cases} \Leftrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\pi: x+2y-5z=0$$

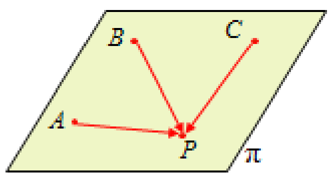
4. (1 punto) Calcula b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ determinen un plano que contenga al punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

Solución:

Si el punto $P(2, 0, 1)$ pertenece al plano determinado por A, B y C, entonces los vectores ***AP***, ***BP*** y ***CP*** deben ser coplanarios y, en consecuencia, dar lugar a un determinante nulo.

Como ***AP*** = (1, –1, 0), ***BP*** = (0, –2, 1 – *b*) y ***CP*** = (1, 0, 1), se tendrá que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1-b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3+b=0 \Rightarrow b=3.$$



Luego, el valor pedido es $b = 3$.

Por tanto, los puntos son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 3)$ y $C(1, 0, 0)$; y el plano que determinan:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: x+y-z-1=0.$$

Observación: También podría hallarse el plano determinado por los putos A, C y D, que es el obtenido arriba, e imponer que B pertenezca a él.

5. a) (0,4 puntos) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela a

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$$

b) (0,6 puntos) Halla también la ecuación del plano que contenga a ambas rectas.

<u>Solución</u>:

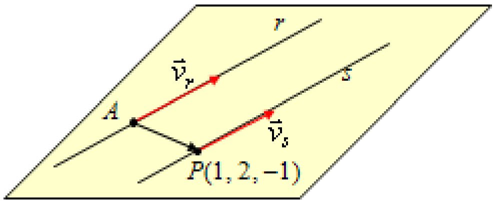
a) La recta pedida difiere de la dada solo en su posición. Su ecuación será:

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

b) El plano viene determinado por el punto $A(1, 3, 0) \in r$ y por los vectores $\vec{v}_r = (2, 2, -1)$ y $\boldsymbol{AP} = (1, 2, -1) - (1, 3, 0) = (0, -1, -1)$.

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: -3x + 2y - 2z - 3 = 0.$$



Alcalá de Henares, 30 de enero de 2018