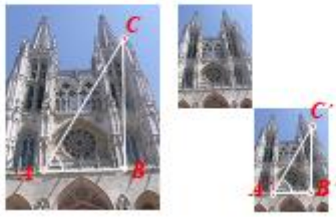
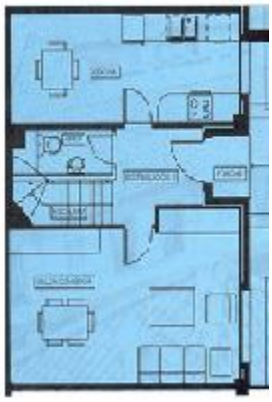
Tema 10. Semejanza. Teorema de Tales — Resumen



- Intuitivamente, puede decirse que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma: son iguales salvo en su tamaño; una es más grande que otra, pero sin deformaciones. Las ampliaciones o reducciones fotográficas son semejantes.
- Matemáticamente, dos figuras son semejantes cuando las medidas (las distancias) en una de ellas son proporcionales a las medidas correspondientes en la otra. El cociente de ambas medidas se llama razón de semejanza.

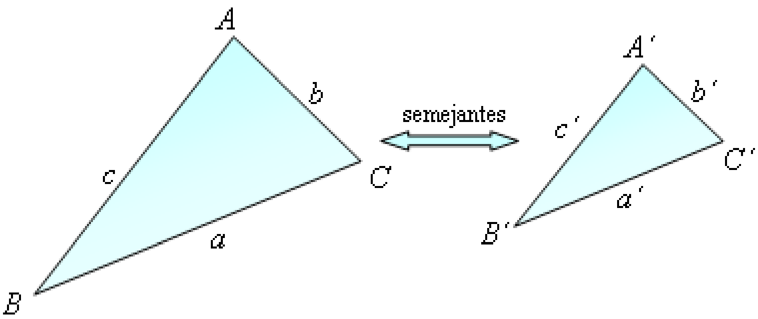
→ Que no haya deformaciones significa que los ángulos formados en una de ellas son iguales a los correspondientes en la otra.

Ejemplos:



a) La razón de semejanza entre las dos fotografías de la portada de la catedral de Burgos es 0,5. Si se divide la medida de cualquier distancia de la foto pequeña por su correspondiente en la otra, el cociente es 0,5: (distancia de *A´* a *B´*) / (distancia de *A* a *B*) = 0,5. Igualmente, *d*(*A´*, *C´*) / *d*(*A*, *C*) = 0,5.
Los ángulos de vértice *A* y *A´* son iguales; lo mismo pasa con *B* y *C*.
b) Los planos, los mapas y las maquetas son representaciones semejantes de sus correspondientes en la realidad. En todos los casos, la razón de semejanza viene expresada por la escala. Así, un plano hecho a escala 1 : 100 indica que 1 cm del plano equivale a 100 cm (1 metro) en la realidad; y al revés, cada metro de la realidad debe representarse como 1 cm en el plano.

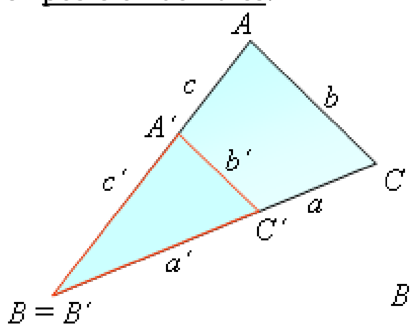
<u>Semejanza de triángulos</u>
Dos triángulos son semejantes cuando tienen iguales los ángulos y proporcionales los lados correspondientes.

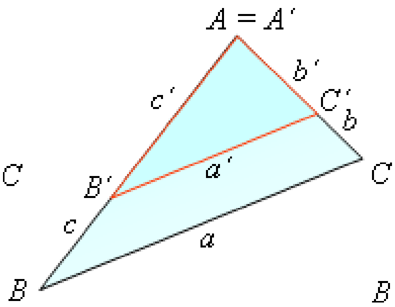


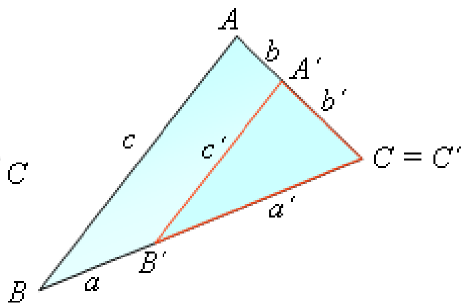
Se cumple que:
1. $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$;
2. $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$.

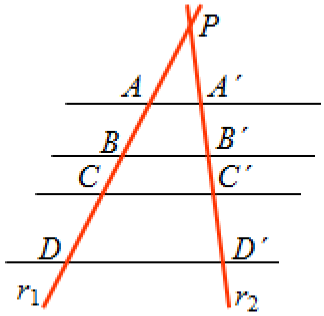
→ Cualquiera de estas dos relaciones es suficiente para saber que dos triángulos son semejantes.

→ Si dos triángulos son semejantes pueden superponerse un ángulo y los dos lados que lo forman; los lados no comunes serían paralelos. Los <u>triángulos</u> puestos así se dicen que están en <u>posición de Tales</u>.









Teorema de Tales

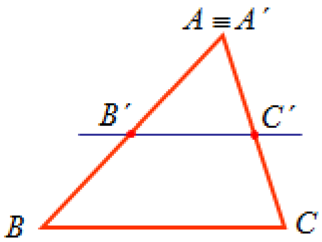
El teorema de Tales relaciona las longitudes de los segmentos obtenidos al cortar un conjunto de rectas paralelas por dos rectas cualesquiera. Se puede formular como sigue:

"Si se tiene un conjunto de rectas paralelas y son cortadas por otras dos rectas r_1 y r_2, entonces, las medidas de los segmentos determinados en una de las rectas secantes (en r_1) son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra (en r_2)".

Por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

También puede verse que los triángulos *PAA´*, *PBB´*, *PCC´*… son semejantes (están en posición de Tales): tienen dos lados superpuestos y el tercero, paralelo. Luego, también se cumple que:

$$\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} = \frac{PC}{CC'}.$$

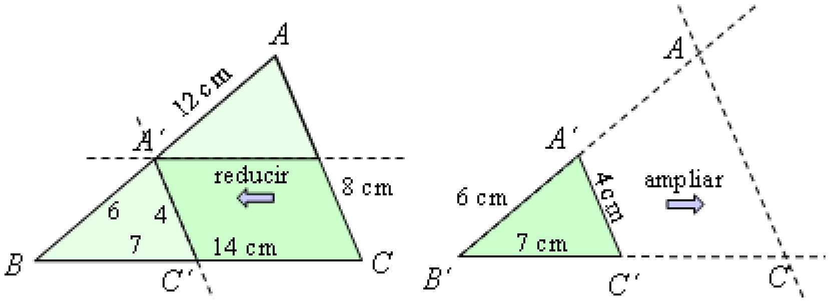


- De otra manera. Toda paralela a un lado de un triángulo, *ABC*, determina otro triángulo, *A´B´C´*, semejante al primero. (Los triángulos *ABC* y *A´B´C´* están en posición de Tales).

Ejemplos:

a) Si dos triángulos son semejantes con razón de semejanza 2, y si los lados del pequeño miden 4 cm, 7 cm y 6 cm, los del mayor medirán 8 cm, 14 cm y 12 cm, respectivamente.

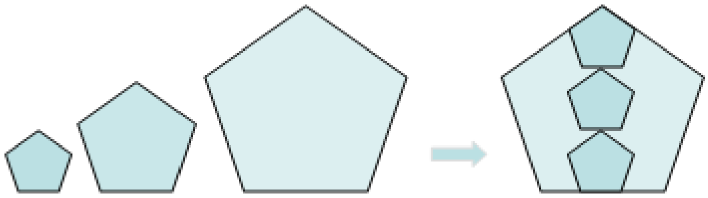
b) Para trazar el triángulo pequeño a partir del grande basta con unir dos de los puntos medios de dos lados.



c) Para trazar el triángulo grande a partir del pequeño se prolongan dos lados y con medida doble a partir del vértice común se unen los puntos determinados.

Figuras semejantes. Dos figuras son semejantes cuando los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra.

El cociente de las longitudes de los dos segmentos correspondientes se llama razón de semejanza o escala, *k*.



En este caso, la razón de semejanza entre el pentágono grande y el pequeño vale 3.

→ En las figuras semejantes los ángulos son iguales y las distancias proporcionales.

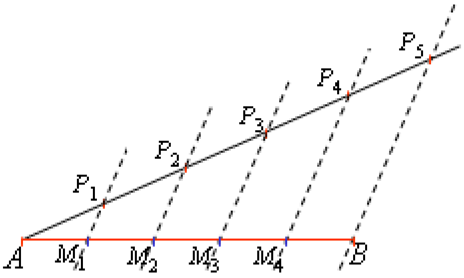
Aplicaciones del teorema de Tales

División de un segmento en partes iguales

Ejemplo:

Para dividir un segmento AB en 5 partes iguales se procede como sigue:

1. Se una traza una semirrecta que parta de A, y sobre ella se marcan 5 segmentos (consecutivos) de la misma longitud (eso puede hacerse con ayuda de un compás). Sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 los extremos de esos segmentos.



2. Se une el extremo del quinto segmento (P_5) con el punto B.
3. Se trazan rectas paralelas a la recta P_5B por los puntos de división P_1, P_2, P_3 y P_4.
4. Los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 obtenidos sobre el segmento AB lo dividen en 5 partes iguales.

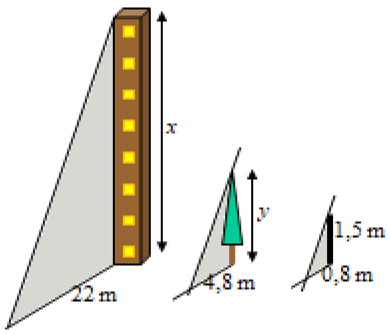
(Debe ser evidente que si los segmentos AP_1, AP_2… son iguales también lo serán AM_1, AM_2…

Medida de la altura de un objeto vertical por su sombra

Ejemplo:

Para medir la altura de un edificio, de un árbol, de una torre…, en un día de sol, puede procederse como sigue:

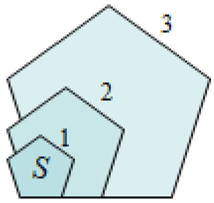
1. Se coge otro objeto de medida conocida, pongamos de 1,5 metros, y se mide la longitud de su sombra, que vale 0,8 m, por ejemplo.
2. Se mide la longitud de la sombra del edifico, del árbol…; supongamos que la sombra del edifico mide 22 m y la del árbol 4,8 m.



3. Aplicando Tales se tendrá:

- Para el edificio: $\dfrac{1,5}{0,8}=\dfrac{x}{22} \Rightarrow x=\dfrac{1,5\cdot 22}{0,8}=41,25$ m.
- Para el árbol: $\dfrac{1,5}{0,8}=\dfrac{y}{4,8} \Rightarrow y=\dfrac{1,5\cdot 4,8}{0,8}=9$ m.

Razón de semejanza de áreas y volúmenes



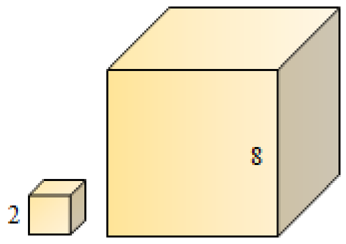
→ Si la razón de semejanza entre dos figuras planas es r, la razón de semejanza entre sus áreas es r^2. (Así, por ejemplo, si el área del pentágono pequeño es S, la del mediano será $2^2\cdot S = 4S$; y la del mayor, $3^2\cdot S = 9S$).

→ Si la razón de semejanza entre dos cuerpos geométricos es r, la razón de semejanza entre sus volúmenes es r^3.

Ejemplo:

a) Si un rectángulo tiene base 5 cm y altura 2 cm, otro semejante a él con razón de semejanza $r = 3$, tendrá de dimensiones 15 por 6 cm. El área del primero es $5 \cdot 2 = 10$ cm^2; el área del segundo es $15 \cdot 6 = 90 = 3^2 \cdot 10$ cm^2.

b) Un cubo de lado 2 tiene volumen 8 cm^3. Otro cubo, de lado 8 (cuatro veces más largo: $r = 4$), tiene volumen $8 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$ cm^3.



Ejercicios y Problemas

1. Un aula rectangular mide 9 m de largo y 7 m de ancho. Dibújala a escala 1 : 100. Dibuja en ella la mesa del profesor que mide 1,20 × 0,80 metros.

2. En el plano de una vivienda, el salón mide 5,2 cm de largo y 3,8 cm de ancho. Si la escala es 1:150, ¿cuáles son las dimensiones del salón? Comprueba que la superficie real es 150^2 veces mayor que en el plano.

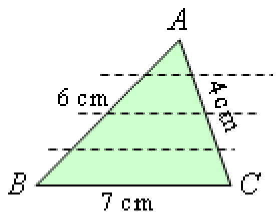
3. En un mapa a escala 1:100000 la distancia entre dos pueblos A y B es 4,8 cm. ¿Cuál es la distancia real entre ellos?

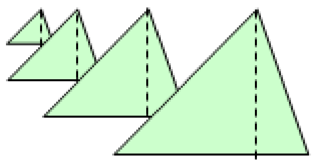
4. Halla la distancia, en km, en línea recta entre Madrid y Soria sabiendo que en un plano a escala 1:750.000, es de 30 cm.

5. Las longitudes de los lados de un triángulo son 6 cm, 8 cm y 13 cm. Otro triángulo semejante a él tiene un lado mediano de 12 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ambos triángulos? Halla la longitud de sus otros lados.

6. La maqueta de un automóvil mide 16 cm de largo, 6,25 cm, de ancho y 6,7 cm de alta. Si está hecha a escala 1: 24, ¿cuáles son las dimensiones reales del automóvil?

7. Cierto modelo de coche tiene una longitud de 4,32 m. Una maqueta de ese coche mide 18 cm. ¿Con qué escala está hecha?





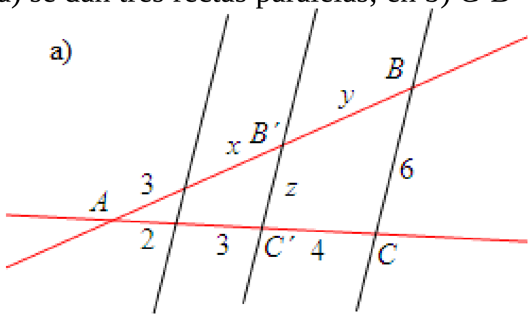
8. Los lados del triángulo dado en la figura adjunta miden 7, 6 y 4 cm. Si el lado *AC* se divide en cuatro partes iguales, trazando paralelas a la base por los puntos de división se obtienen otros tres triángulos más pequeños.

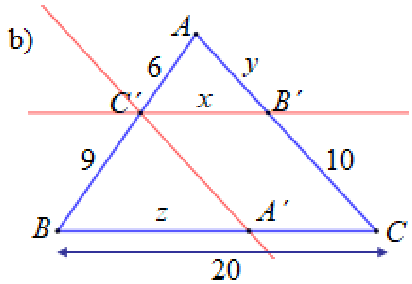
a) ¿Cuáles serán las longitudes de los lados de cada uno de los triángulos obtenidos?

b) Si la altura desde *A* mide 3,42 cm, ¿cuánto medirán las alturas de cada uno de los tres triángulos más pequeños?

c) ¿Cuánto valen las superficies de cada uno de los cuatro triángulos semejantes?

9. Aplicando el teorema de Tales halla los valores de *x*, *y*, *z* en las siguientes figuras. (En a) se dan tres rectas paralelas; en b) *C´B´* es paralela al lado *BC*; *C´A´*, paralela a *AC*).

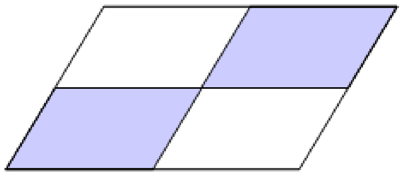




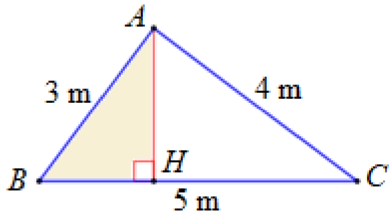
10. Divide el segmento *AB* en 6 partes iguales.

11. Ana mide 159 cm y proyecta una sombra de 53 cm. A la misma hora, la torre del campanario de la iglesia y un ciprés proyectan sombras de longitud 13,5 m y 5,2 m, respectivamente. ¿Cuál es la altura de la iglesia y del ciprés?

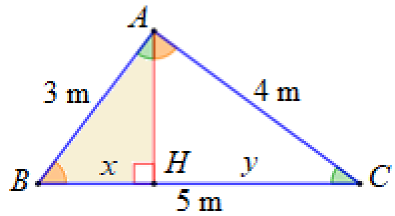
12. En la figura de la derecha, el paralelogramo grande es semejante a cada uno de los pequeños, que son iguales. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos? Si la atura del paralelogramo grande es 3,8 cm, ¿cuál será la de uno de los paralelogramos pequeños? ¿Cuál es la razón de semejanza entre sus áreas?



13. Halla el área del triángulo *ABH* de la figura, siendo *AH* la altura de *ABC* desde *A*.



→ El triángulo *ABC* es rectángulo, pues las longitudes de los lados forman una terna pitagórica: $5^2 = 4^2 + 3^2$.
También son rectángulos los triángulos con vértice en *H*, *ABH* y *AHC*, pues la altura es perpendicular a la base.
Además, los tres triángulos son semejantes. (Puede verse que el ángulo *B* es común en *ABC* y *ABH*; lo mismo pasa con el ángulo *C*, es común en *ABC* y *AHC*. Por tanto, los ángulos que faltan también son iguales). (Ver figura).



Por la semejanza entre *ABC* y *ABH* se tiene:

$$\frac{AH}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}.$$

Por Pitágoras, en el triángulo *ABH* se cumple:

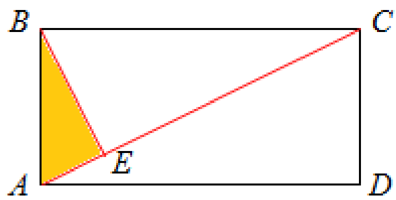
$$3^2 = (AH)^2 + x^2 \Rightarrow 9 = \frac{144}{25} + x^2 \Rightarrow \frac{225-144}{25} = x^2 \Rightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Por tanto, el área del triángulo *ABH* es: $S = \dfrac{\frac{9}{5}\cdot\frac{12}{5}}{2} = \dfrac{54}{25}$ m^2.

<u>De otra forma</u>: La razón de semejanza entre las longitudes de los lados de los triángulos *ABC* y *ABH* es $\frac{3}{5}$. Por tanto, la razón entre sus áreas será $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Como el área de *ABC* es $\frac{3\cdot 4}{2} = 6$ m^2, el área de *AHB* será $6\cdot\frac{9}{25} = \frac{54}{25}$ m^2.

14. Los lados del rectángulo de la figura son uno doble que otro. Si *BE* es perpendicular a la diagonal *AC*:
a) Comprueba que los triángulos *ACB* y *AEB* son semejantes.
b) Si el área del rectángulo *ABCD* vale 200 cm^2, ¿cuánto vale la del triángulo *AEB*?

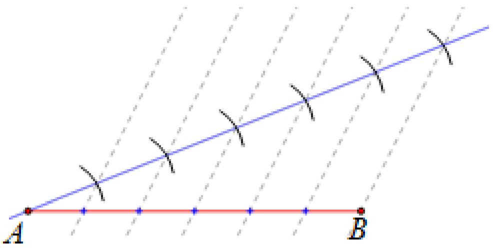


15. La maqueta de un rascacielos en forma de prisma cuadrangular mide 5 cm de lado por 22 cm de alto. Si está hecha a escala 1 : 1000, ¿cuáles son las medidas de ese edificio en la realidad? ¿Qué volumen ocupa la maqueta y cuál será el volumen real del rascacielos?

Soluciones:

1. Aula: rectángulo de dimensiones 9 × 7 cm. Mesa: rectángulo de dimensiones 1,2 × 0,8 cm.
2. 7,8 × 5,7 metros. Superficie en plano: 5,2 · 3,8 = 19,76 cm^2. Superficie real: 7,8 · 5,7 = 44,46 m^2 = 444600 cm^2 = 22500 · 19,76 cm^2.
3. 4,8 km. **4**. 225 km. **5**. r = 1,5; 9 y 19,5 cm. **6**. 384×150×160,8 cm. **7**. 1 : 24.
8. a) 1,75, 1,5 y 1 cm; 3,5, 3 y 2 cm; 5,25, 4,5 y 3 cm. b) 0,855; 1,71; 2,565. c) 0,748125 cm^2; 2,9925 cm^2; 6,7331 cm^2; 11,97 cm^2.
9. a) $x=\frac{9}{2}$; y = 6; $z=\frac{30}{9}$.
b) $y=\frac{20}{3}$; x = 8; $z=12$.

10.



11. 40,5 m; 15,6 m.
12. 1/2; 1,9; 1/4.
14. a) Tienen los ángulos iguales. b) 20 cm^2.
15. Medidas: 50 m de lado; 220 m de altura. Volumen de la maqueta: 550 cm^3. Volumen real: 550000 m^3.