Tema 8. Sistemas de ecuaciones lineales Resumen

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

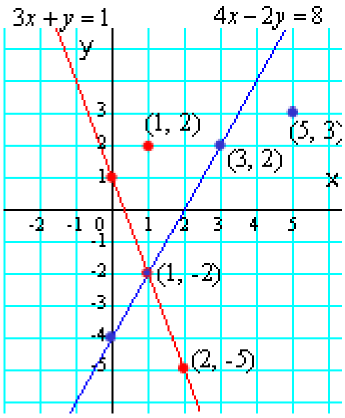
Son expresiones de la forma $ax+by=c$. Las incógnitas son x e y, mientras que a, b y c son números. (Las incógnitas llevan exponente 1, que no es necesario indicar, y van sumadas o restadas; en ningún caso van multiplicadas o divididas).

- Las soluciones de estas ecuaciones son los pares de valores (uno para x y otro para y) que cumplen la ecuación.
- Las soluciones de una ecuación con dos incógnitas son los puntos de una recta en el plano. La ecuación explícita de esa recta se encuentra despejando la incógnita y. Después, dando valores a x se encuentran los puntos de esa recta: los pares solución de la ecuación.

Ejemplos:

a) $\underline{4x-2y=8}$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

El par $x = 3$ e $y = 2$ es solución, pues $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$.
También es solución el par $x = 1$ e $y = -2$: $4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 8$.
El par $x = 5$ e $y = 3$ NO es solución de esa ecuación, pues
$4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14 \neq 8$.
Para representar la recta asociada puede despejarse y:
$4x-2y=8 \Rightarrow 2y=4x-8 \Rightarrow y=2x-4$.
Algunos de sus puntos son: (0, –4); (1, –2); (2, 0); (3, 2) …



b) La ecuación $\underline{3x+y=1}$ tiene por soluciones
$x = 2$ e $y = -5$; $x = 1$ e $y = -2$, e infinitos pares más.
El par $x = 1$ e $y = 2$ no es solución de ella.
La recta asociada es $y=-3x+1$.
Algunos de sus puntos son: (0, 1); (1, –2); (2, –5); (–1, 4) …

- Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitos pares de soluciones. Esos pares se corresponden con los puntos de una recta.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Su forma más simple es $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

- La solución de un sistema es el par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Ejemplo:

Las dos ecuaciones del ejemplo anterior determinan el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$.

Su solución es $x = 1$ e $y = -2$, ya que ese par es solución de ambas ecuaciones.

- Como puede verse, los valores solución, $x = 1$ e $y = -2$, se corresponden con las coordenadas del punto (1, –2), que es el de corte de las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones.
- Por tanto, la solución de un sistema puede encontrarse representando las rectas asociadas y hallar el punto de corte. Este es el método gráfico, que tiene el inconveniente de que el punto de corte no siempre es fácil de precisar.

Resolución de sistemas

Resolver un sistema es encontrar sus soluciones.
Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción (además del gráfico).

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra ecuación. Se obtiene una nueva ecuación de primer grado, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo:

Para resolver el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$:

1.º Se despeja y en la segunda ecuación ($y=1-3x$).
2.º Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x-2(1-3x)=8$.
3.º Se resuelve la nueva ecuación: $4x-2(1-3x)=8 \Rightarrow 4x-2+6x=8 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$.
4.º El valor x = 1 se lleva a la ecuación despejada: $y=1-3\cdot1=-2$.
La solución del sistema es: x = 1 e y = –2.

Método de Igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando esos resultados se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo:

En el mismo sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$, puede despejarse la incógnita y en las dos ecuaciones. Se obtiene: $\begin{cases} 4x-8=2y \\ y=1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ y=1-3x \end{cases}$. Igualando: $2x-4=1-3x \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$.
El valor x = 1 se lleva a la cualquiera de las ecuaciones: $y=1-3\cdot1=-2$.
La solución del sistema es: x = 1 e y = –2.

Método de reducción

Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo:

En el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 2, queda: $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$.
Sumando ambas ecuaciones, término a término, se elimina la y: se obtiene $10x=10 \Rightarrow x=1$.
Ese valor (x = 1) se sustituye en cualquiera de las ecuaciones; se obtiene y = –2.

Observación: Los sistemas que no tienen solución se llaman incompatibles.

El sistema $\begin{cases} x-2y=8 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$ no tiene solución. Si se despeja x en la primera ecuación $(x=2y+8)$ y se sustituye en la 2ª, se obtiene, $2(2y+8)-4y=3 \Rightarrow 4x+16-4x=3 \Rightarrow$ 16 = 3, que es falso. (Algo similar aparecerá si el sistema se intenta resolver por otro método. Desde el punto de vista gráfico, las rectas asociadas a cada ecuación son paralelas. Compruébalo).

Resolución de problemas con ayuda de sistemas: llámale *x*; llámale *y*.
La aplicación de sistemas es necesaria cuando en un problema hay dos incógnitas. A una de esas incógnitas se le llama *x*, a la otra *y*.
Para resolver un problema, debes:
1.º Leer detenidamente el problema: saber qué datos te dan y lo que te piden encontrar.
2.º Descubrir las relaciones entre los datos y las incógnitas. Escribir esas relaciones en forma de igualdad. Con las ecuaciones halladas se forma un sistema.
3.º Resolver ese sistema.
4.º Comprobar que la solución obtenida es correcta.

Ejemplo:
En una granja, entre gallinas y conejos hay 72 cabezas y 184 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?
→ Se desconoce el número de gallinas y el número de conejos. Si se llama *x* al número de gallinas, e *y* al de conejos, debe cumplirse:

$x + y = 72 \rightarrow$ gallinas + conejos = 72.

Cada gallina tiene 2 patas ⇒ entre las *x* gallinas tendrán 2*x* patas.
Cada conejo tiene 4 patas ⇒ entre los *y* conejos tendrán 4*y* patas.
En total hay 184 patas: $2x + 4y = 184$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y = 72 \\ 2x + 4y = 184 \end{cases}$.

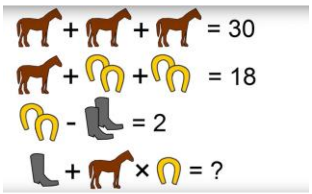
Multiplicando por 4 la primera ecuación se tiene: $\begin{cases} 4x + 4y = 288 \\ 2x + 4y = 184 \end{cases} \Rightarrow$ (restando)

$\Rightarrow 2x = 104 \Rightarrow x = 52 \rightarrow$ (sustituyendo $x = 52$ en la primera ecuación) $\rightarrow y = 20$.
Por tanto, en la granja hay 52 gallinas y 20 conejos.

- Comprobación:

Número de cabezas: 52 + 20 = 72 → de acuerdo con el enunciado.
Número de patas: 52 · 2 + 20 · 4 = 104 + 80 = 184 → de acuerdo con el enunciado.

Sistemas con iconos
Están muy extendidos en las redes sociales. Suelen proponerse como entretenimiento de los usuarios. A continuación se muestra un ejemplo:



Como puede observarse, aparecen cuatro relaciones; en este caso, las tres primeras son lineales. Hay que hallar el valor de cada icono, para así determinar el valor de la 4.ª igualdad.
Si 3 caballos = 30 → 3*c* = 30 ⇒ *c* = 10 → 1 caballo vale 10.
Si 1 caballo más 4 herraduras = 18 ⇒ *c* + 4*h* = 18 → 10 + 4*h* = 18 → 4*h* = 8 ⇒ *h* = 2 → 1 herradura vale 2.
Si 2 herraduras – 2 botas = 2 ⇒ 2*h* – 2*b* = 2 → 4 – 2*b* = 2 ⇒ 2*b* = 2 ⇒ *b* = 1 → 1 bota vale 1.
Por tanto 1 bota + 1 caballo × 1 herradura, valdrá: 1 + 10 × 2 = 21.

Ejercicios y Problemas

1. Da tres pares de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x+y=7$ b) $2x-y=8$ c) $-3x+y=0$ d) $5x-6y=13$

2. Para las ecuaciones anteriores, indica la ecuación de la que es solución alguno de los siguientes partes (Justifícalo haciendo la comprobación):

A(3, 1) *B*(2, 5) *C*(1, 3) *D*(3, –2) *E*(5, 2) *F*(–1, –3)

→ par *A*(3, 1):
No es solución de a) $x+y=7$, pues 3 + 1 = 4 ≠ 7.
No es solución de b) $2x-y=8$, pues 2·3 –1 = 5 ≠ 8.
Ni de c) $-3x+y=0$, pues –3·3 + 1 = –8 ≠ 0.
Tampoco es solución de d) $5x-6y=13$, pues $5\cdot 3-6\cdot 1=9\neq 7$.

3. Representa gráficamente las rectas asociadas a las ecuaciones del ejercicio 1.

a) Comprueba gráficamente que el sistema $\begin{cases} 2x-y=8 \\ 5x-6y=13 \end{cases}$ tienen solución. ¿Cuál es?

b) Ídem para el sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ -3x+y=0 \end{cases}$. Sin hacer cálculos, ¿se puede dar su solución con exactitud?

c) Propón otro sistema que tenga solución fácil de encontrar.

4. Resuelve el sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ por los tres métodos algebraicos. Comprueba que la solución es la misma.

5. Resuelve por sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-3y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+2y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$

6. Resuelve por igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 5x-y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+2y=7 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

7. Resuelve por reducción los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ x-3y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+5y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+y=5 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+4y=-1 \end{cases}$

8. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+5y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$

9. Halla dos números sabiendo que su suma es 87 y su diferencia 25.

10. Pedro lleva billetes de 5 € y de 10 €. En total son 23 billetes, que suponen 145 euros. ¿Cuántos billetes tiene de cada valor?

11. Un estudiante realiza un examen de tipo test. Por cada respuesta acertada recibe 5 puntos, pero por cada error se le restan 2 puntos. Si ha contestado a 50 preguntas y su calificación ha sido de 173 puntos, ¿cuántas respuestas contesto correctamente?

12. En una caja hay peras y manzanas. Si se quitan tres peras y se reemplazan por tres manzanas, la razón de peras y manzanas es de 1 a 1. Si se quitan tres manzanas y se reemplazan por tres peras, la razón de peras y manzanas es de 13 a 7. ¿Cuántas manzanas hay en la caja?

13. Si te doy 5 € tendremos el mismo dinero; pero si tú me das 10 € yo tendré el doble que tú. ¿Cuánto dinero tenemos cada uno?

14. Se han mezclado dos tipos de vino, uno que cuesta 4 euros el litro con otro de 5 euros el litro. Si se han obtenido 50 litros de mezcla que se vende a 4,20 euros el litro, ¿cuántos litros se han empleado de cada tipo de vino?

15. Halla la respuesta de cada uno de los siguientes acertijos:

a)

b)

c)

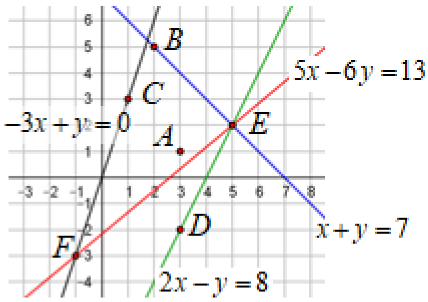
Soluciones:

1. Hay infinitos pares. Por ejemplo: a) (0, 7), (1, 6), (2, 5); b) (0, –8), (4, 0), (3, –2); c) (0, 0), (1, 3), (2, 6); d) (0, 2), (3, 1), (6, 0).

2. (3, 1) de ninguna; (2, 5) de a); (1, 3) de c); (3, –2) de b); (5, 2) de a), b) y d); (–1, –3) de c) y d).

3. a) Las rectas se cortan en $E(5, 2)$. Solución: $x = 5$, $y = 2$.
b) Las rectas se cortan, pero las coordenadas del punto de corte hay que darlas por aproximación: $x \approx 1{,}8$, $y \approx 5{,}3$. (La solución exacta es $x = 7/4 = 1{,}75$; $y = 21/4 = 5{,}25$).

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 5x - 6y = 13 \end{cases}$, con solución (5, 2).

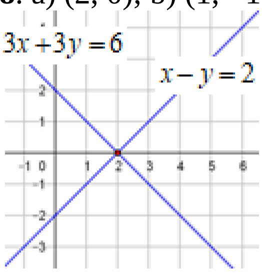


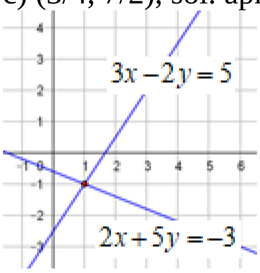
4. $x = 5$; $y = 2$. **5**. a) (3, –1); b) (5, 1); c) (2, –1); d) Incompatible.

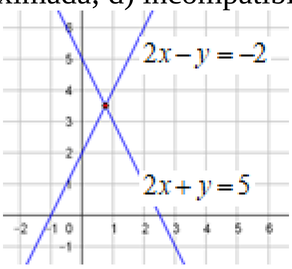
6. a) (1, 3); b) (2, –1). c) (2, 3); d) (–3, 2).

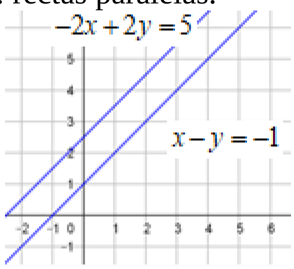
7. a) (5, –3); b) (1, –1); c) (9, 14); d) (29/2, –15/2).

8. a) (2, 0); b) (1, –1); c) (3/4, 7/2), sol. aproximada; d) incompatible: rectas paralelas.









9. 56 y 31. **10**. 17 de 5 € y 6 de 10 €. **11**. 39 aciertos; 11 fallos. **12**. 23 peras y 17 manzanas.
13. Yo, 50 €; tú, 40 €. **14**. 40 litros de 4 €/L, 10 de 5 €/L. **15**. a) 232; b) 15,75; c) 17.