Tema 7 (II). Ecuaciones de segundo grado Resumen

Ecuaciones de segundo grado

La ecuación en su forma estándar es $\boxed{ax^2+bx+c=0}$.
(Donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$).

Ejemplos:
Son ecuaciones de segundo grado:
a) $2x^2+4x-6=0$. b) $x^2+4x+4=0$. c) $x^2-4x+6=0$.

- Sus soluciones se hallan aplicando la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Dependiendo del valor de b^2-4ac, una ecuación de segundo grado puede tener:
- dos soluciones distintas, cuando $b^2-4ac>0$;
- una única solución, que se dice *doble*, cuando $b^2-4ac=0$;
- ninguna solución real, cuando $b^2-4ac<0$.

Ejemplos:
Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

a) $2x^2+4x-6=0 \rightarrow (a=2,\ b=4,\ c=-6) \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{4}=$

$=\dfrac{-4\pm\sqrt{64}}{4}=\dfrac{-4\pm8}{4}$. Por tanto: $x_1=\dfrac{-4-8}{4}=\dfrac{-12}{4}=-3$ y $x_2=\dfrac{-4+8}{4}=\dfrac{4}{4}=1$.

Las soluciones son: $x_1=-3$ y $x_2=1$.
Comprobación:
Sustituyendo $x=-3$ en $2x^2+4x-6 \rightarrow 2(-3)^2+4(-3)-6=2\cdot9-12-6=18-18=0$.
Sustituyendo $x=1$ en $2x^2+4x-6 \rightarrow 2\cdot1^2+4\cdot1-6=2+4-6=0$.
Como el resultado es 0 en ambos casos, se cumple la ecuación.

b) $x^2+4x+4=0 \rightarrow (a=1,\ b=4,\ c=4) \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Sólo tiene una solución, $x=-2$, pues $b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot4=0$.
Comprobación:
Sustituyendo $x=-2$ en $x^2+4x+4 \rightarrow (-2)^2+4(-2)+4=4-8+4=8-8=0$. Se cumple.

c) $x^2-4x+6=0 \Rightarrow x=\dfrac{+4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ No tiene solución,
pues la raíz de un número negativo no existe: $b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot6<0$.

Problema:
Halla un número tal que "si a su cuadrado se le resta el triple del número el resultado es 130".
$\rightarrow$ Si el número buscado es x, entonces, debe cumplirse:
$x^2-3x=130 \Rightarrow x^2-3x-130=0 \rightarrow (a=1,\ b=-3,\ c=-130) \Rightarrow$

$$x=\frac{+3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-130)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+520}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{529}}{2}=\frac{3\pm 23}{2}=\begin{cases}-10\\13\end{cases}.$$

<u>Comprobación</u>:

Si $x = -10$ se cumple que $x^2-3x=130 \to (-10)^2-3\cdot(-10)=100+30=130$.

Igualmente, si $x = 13$ se cumple que $x^2-3x=130 \to 13^2-3\cdot 13=169-39=130$.

<u>Ecuación incompleta de segundo grado</u>

Es de la forma:

(1) $\boxed{ax^2+c=0}$, $b = 0$; con $a \neq 0$. (2) $\boxed{ax^2+bx=0}$, $c = 0$; con $a \neq 0$.

Ejemplos:

Son ecuaciones incompletas de segundo grado:

a) $x^2-9=0$. b) $2x^2-32=0$. c) $x^2-4x=0$. d) $3x^2+6x=0$.

- Para hallar las soluciones de una ecuación incompleta no es preciso recurrir a la fórmula anterior (aunque pueden resolverse aplicándola).

Ejemplos:

Las soluciones de las ecuaciones anteriores son:

a) $x^2-9=0 \to$ (despejando x^2) $\Rightarrow x^2=9 \to$ (haciendo la raíz cuadrada) $\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$.

Las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

Efectivamente: $3^2-9=9-9=0$ y $(-3)^2-9=9-9=0$.

$\to x^2+9=0$ no tiene soluciones reales, pues $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9$, que no es posible.

b) $2x^2-32=0 \Rightarrow 2x^2=32 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\sqrt{16}=\pm 4$. Soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

$\to$ Aplicando la fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, si $b = 0$, $a = 2$ y $c = -32$:

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 2\cdot(-32)}}{2\cdot 2}=\frac{\pm\sqrt{256}}{4}=\frac{\pm 16}{4}\begin{cases}-4\\4\end{cases}.$$

c) $x^2-4x=0 \to$ (sacando factor común) $\Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ o $x-4=0 \Rightarrow x=4$.

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

(Recuerda: para que un producto valga 0 alguno de sus factores debe valer 0. En la igualdad anterior, los factores son x y $x - 4$).

d) $3x^2+6x=0 \to$ (sacando factor común) $\Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x = 0$ o $x+2=0 \Rightarrow$ $x=-2$. Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

$\to$ Aplicando la fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, si $c = 0$, $a = 3$ y $b = 6$:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 3\cdot 0}}{2\cdot 3}=\frac{-6\pm\sqrt{36}}{6}=\frac{-6\pm 6}{6}=\begin{cases}-2\\0\end{cases}.$$

Ejercicios y Problemas

1. Asocia, entre los valores que se indican, las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2+5x-6=0 \rightarrow x=1;\ x=2;\ x=-6;\ x=0.$

$\rightarrow x=1$: $1^2+5\cdot 1-6=0 \Rightarrow x=1$ es sol. $\rightarrow x=2$: $2^2+5\cdot 2-6\neq 0 \Rightarrow x=2$ no es sol.

$\rightarrow x=-6$: $(-6)^2+5(-6)-6=36-30-6=0 \Rightarrow x=-6$ es sol.

$\rightarrow x=0$: $0^2+5\cdot 0-6\neq 0 \Rightarrow x=0$ no es sol.

b) $x^2-6x+8=0 \rightarrow x=1;\ x=2;\ x=0;\ x=4.$

c) $x^2-4x=0 \rightarrow x=1;\ x=2;\ x=0;\ x=4.$

d) $x^2-49=0 \rightarrow x=6;\ x=7;\ x=0;\ x=-7.$

2. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-x-2=0$ b) $x^2-6x+9=0$ c) $x^2-7x+10=0$ d) $3x^2+6x-24=0$

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2-x=0$ b) $x^2-6x=0$ c) $2x^2-8x=0$ d) $3x^2+6x=0$

4. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $x^2-1=0$ b) $x^2-100=0$ c) $2x^2-72=0$ d) $3x^2+48=0$

5. Las siguientes ecuaciones está desordenadas. Ordénalas y halla sus soluciones.

a) $x^2=x+12$ b) $x^2+9=-6x$ c) $130-4x^2=-14$ d) $5x=x^2$

6. Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a) $x^2=\dfrac{x}{2}+3$ b) $x(x-5)=6$ c) $x+\dfrac{1}{x}=2$ d) $(x-1)\cdot(x+3)-5x=7$

7. El producto de dos números enteros consecutivos es 72. Plantea una ecuación de segundo grado para hallarlos. ¿De qué números se trata?

8. Descompón el número 23 en dos sumandos positivos de manera que el cuadrado del menor más el doble del mayor valga 81.

$\rightarrow$ Si el menor de los números vale x, el mayor será $23-x$.

Debe cumplirse que: $x^2+2(23-x)=81$.

Operando se obtiene la ecuación: $x^2-2x-35=0$.

Su solución es: $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-35)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{144}}{2}=\dfrac{2\pm 12}{2}=\begin{cases}-5\\ 7\end{cases}$.

Como se piden número positivos, la solución es $x=7$; el número mayor valdrá 16.

Comprobación: $7^2+2\cdot 16=49+32=81$.

(Si no se exigiese que los números fuesen positivos, también valdría la solución $x=-5$; con el mayor $23-(-5)=28$. Efectivamente: $(-5)^2+2\cdot 28=25+56=81$).

9. La diferencia de dos números es 10. Hállalos sabiendo que la diferencia de sus cuadrados es 180.

10. Un número menos su cuadrado es igual a –20. ¿De qué número se trata? ¿Hay más de una solución?

11. La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si su área vale 375 cm^2, ¿Cuáles son sus dimensiones?

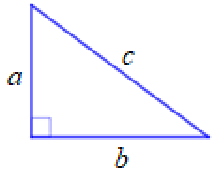
12. El producto de dos números impares, positios y consecutivos, vale 99. Halla esos números.

13. La suma de los cuadrados de dos números positivos y consecutivos vale 365. ¿Qué números son?

14. El área de un rectángulo es 391 dam^2. Si la base es 6 decámetros (dam) más larga que ancha, ¿cuánto mide de larga y cuánto de ancha?

15. La base de un triángulo mide la mitad que su altura. Si su área mide 400 cm^2, ¿cuánto vale su base?

16. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm. Halla sus catetos sabiendo que uno es 5 cm más largo que el otro. (Debes recordar el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$)



17. La base de un rectángulo mide 4 cm más que su altura. Si su diagonal mide 20 cm, halla las dimensiones del rectángulo.

18. La diagonal de un cuadrado mide $\sqrt{162}$ cm, ¿cuánto mide su lado?; ¿y su área? (Haz un dibujo).

19. Si a los lados de un cuadrado se le añaden 2 cm a uno y 4 cm al otro se obtiene un rectángulo de área 143 cm^2. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado inicial? (Comienza dibujando un cuadrado de lado *x*).

20. Si a los lados de un cuadrado se le añaden 2 cm a uno y 4 cm al otro se obtiene un rectángulo cuya área es 68 cm^2 mayor que la del cuadrado. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado inicial?

Soluciones:
1. a) $x = 1$; $x = –6$. b) $x = 2$; $x = 4$. c) $x = 0$; $x = 4$. d) $x = 7$; $x = –7$.
2. a) $x = –1$; $x = 2$. b) $x = 3$, doble. c) $x = 2$; $x = 5$. d) $x = 2$; $x = –4$.
3. a) $x = 0$; $x = 1$. b) $x = 0$; $x = 6$. c) $x = 0$; $x = 4$. d) $x = 0$; $x = –2$.
4. a) $x = –1$; $x = 1$. b) $x = –10$; $x = 10$. c) $x = –6$; $x = 6$. d) No tiene sol.
5. a) $x = –3$; $x = 4$. b) $x = 3$, doble. c) $x = –6$; $x = 6$. d) $x = 0$; $x = 5$.
6. a) $x = –3/2$; $x = 2$. b) $x = –1$; $x = 6$. c) $x = 1$, doble. d) $x = –2$; $x = 5$.
7. $x = –9$ y $x = –8$; $x = 8$ y $x = 9$.

9. 14 y 4.	**10**. –5 y 4.	**11**. 25 × 15	**12**. 9 y 11.
13. 13 y 14.	**14**. 23 × 17 dam.	**15**. 20 cm.	**16**. 15 y 20 cm.
17. 16 × 12 cm.	**18**. 9 cm; 81 cm^2.	**19**. 9 cm.	**20**. 10 cm.