

Tema 7 (I). Ecuaciones de primer grado

Resumen

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas.

En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra x .

- Las ecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas. La ecuación $2x = 34$ es de primer grado; $x^2 = 25$ es una ecuación de segundo grado.
- Soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que cumplen la ecuación.

Ejemplos:

a) La solución de la ecuación $2x = 34$ es $x = 17$, pues $2 \cdot 17 = 34$.

b) La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = 5$ y $x = -5$, pues $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:

Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

a) $2x = 18$ y $4x = 36$. b) $2x + 3 = x - 5$ y $2x = x - 8$. c) $x + \frac{x}{2} = 30$ y $2x + x = 60$.

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras (a) es $x = 9$; que la solución de las dos segundas (b) es $x = -8$; y que la solución de las dos últimas (c) es $x = 20$. (¿Comprobado?).

Resolución de una ecuación

- Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones.
- Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita (dejarla sola en un miembro de la igualdad). Para ello hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
 1. Sumar o restar la misma expresión (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es cambiar los términos de un lado al otro de la igualdad. Esto se llama transposición de términos.
 2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número (o expresión algebraica) los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es quitar los denominadores de la ecuación.

Ejemplos:

a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede transformarse como sigue:

→ Se suma 3 a cada miembro → $2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + 3 = x + 7 + 3 \Rightarrow 2x = x + 10$.

→ Se resta x a cada miembro → $2x - x = x + 10 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Así se consigue despejar la x ; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$.

b) La ecuación $x + \frac{x}{2} = 30$ se transforma así:

→ Se multiplica por 2 cada miembro → $2 \cdot \left(x + \frac{x}{2} \right) = 2 \cdot 30 \Leftrightarrow 2x + x = 60 \Rightarrow 3x = 60$.

→ Se divide por 3 cada miembro → $\frac{3x}{3} = \frac{60}{3} \Rightarrow x = 20$.

La solución de la ecuación es $x = 20$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: transposición de términos

- Ecuaciones $x + a = b$ o $x - a = b$.

Se resuelven restando o sumando a a ambos miembros. Queda: $x = b - a$ o $x = b + a$.

Ejemplos:

a) $x + 5 = 8 \rightarrow$ restando 5 se tiene: $x = 8 - 5 \Rightarrow x = 3$.

b) $x - 3 = 6 \rightarrow$ sumando 3 se tiene: $x = 6 + 3 = 9$. La solución es $x = 9$.

Observa:

Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x + a = b \Rightarrow x = b - a$.

Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x - a = b \Rightarrow x = b + a$.

- Ecuaciones $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b$.

Se resuelve dividiendo (o multiplicando) por a ambos miembros. Queda: $x = \frac{b}{a}$ o $x = ab$.

Ejemplos:

a1) $2x = 34 \rightarrow$ dividiendo por 2 se tiene: $x = \frac{34}{2} = 17$. La solución es $x = 17$.

a2) $2x = -3 \rightarrow$ dividiendo por 2 se tiene: $x = \frac{-3}{2} = -1,5$. La solución es $x = -1,5$.

b1) $\frac{x}{3} = 2 \rightarrow$ multiplicando por 3 se tiene: $x = 2 \cdot 3 = 6$. La solución es $x = 6$.

b2) $\frac{x}{5} = -1 \rightarrow$ multiplicando por 5 se tiene: $x = -1 \cdot 5 = -5$. La solución es $x = -5$.

Observa:

Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$; $\frac{x}{a} = b \Rightarrow x = ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por el un múltiplo común de todos ellos, particularmente por el m.c.m.
3. Se pasan (transponen) las x a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan las x y los números.
4. Se despeja la x : lo que multiplica a la x pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la x , pasa multiplicando al otro miembro. (Todo siguiendo las reglas de los signos).

Ejemplos:

a) $3x - 5 + 5x = 6 - 2x + 7 + x \rightarrow$ se transponen las x a la derecha y los números a la izquierda:

$$3x + 5x + 2x - x = 6 + 7 + 5 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{9} = 2.$$

b) $3 + 4x - (2x - 7) = 14 - 9(x + 1) \rightarrow$ se resuelven los paréntesis:

$$3 + 4x - 2x + 7 = 14 - 9x - 9 \rightarrow$$
 se transponen términos, se agrupa y se despeja:

$$4x - 2x + 9x = 14 - 9 - 3 - 7 \Rightarrow 11x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{11}.$$

c) $2x - \frac{5x}{3} + 1 = \frac{4}{5} + \frac{x}{10} \rightarrow$ Se multiplica por el mcm(3, 5, 10) = 30:

$$30\left(2x - \frac{5x}{3} + 1\right) = 30\left(\frac{4}{5} + \frac{x}{10}\right) \rightarrow \text{se opera (propiedad distributiva):}$$

$$60x - 60 \cdot \frac{5x}{3} + 60 = 60 \cdot \frac{4}{5} + 60 \cdot \frac{x}{10} \rightarrow \text{se simplifica: } 60x - 100x + 60 = 48 + 6x \rightarrow$$

$$\text{se transponen términos: } 60x - 100x - 6x = 48 - 60 \Rightarrow -46x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-46} = \frac{6}{23}.$$

d) $2x + 3(5 - 2x) = 2 - \frac{x-7}{4} \rightarrow$ Se multiplica por 4 y se opera (hay que tener en cuenta la propiedad distributiva y las reglas de signos):

$$4(2x + 3(5 - 2x)) = 4\left(2 - \frac{x-7}{4}\right) \Rightarrow 8x + 12(5 - 2x) = 8 - \cancel{4} \cdot \frac{x-7}{\cancel{4}} \Rightarrow$$

$$8x + 60 - 24x = 8 - (x - 7) \Rightarrow 8x + 60 - 24x = 8 - x + 7 \rightarrow \text{se transponen términos:}$$

$$8x - 24x + x = 8 + 7 - 60 \Rightarrow -15x = -45 \Rightarrow 15x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{15} = 3.$$

Planteamiento y resolución de problemas

• Las ecuaciones se emplean para resolver problemas, pues al establecer la relación entre los datos y el valor desconocido (la x) suele obtenerse una ecuación. Para ello es preciso:

1. Leer detenidamente el enunciado. Si hay alguna palabra o algún concepto que no sabes o no entiendes, busca cómo enterarte; pregunta. Haz un dibujo si lo ves conveniente.
2. Descubrir los datos que se dan y la respuesta que se pide: "qué nos dan y qué nos piden".
3. Establecer la relación entre los datos y la incógnita. Esto es, escribir la ecuación. (No siempre se encuentra "a la primera"; a veces hay que recordar relaciones matemáticas generales, aplicar propiedades...).
4. Por último, debes comprobar siempre que tu solución es correcta, que cumple la ecuación.

Ejemplos:

a) Halla un número tal que al sumarle su mitad se obtiene 30.

\rightarrow Si al número buscado se le llama x , entonces, la ecuación es: $x + \frac{x}{2} = 30$.

$$\text{Multiplicando por 2: } 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot 30 \Rightarrow 2\left(\frac{3x}{2}\right) = 60 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20.$$

El número buscado es 20. Efectivamente cumple que 20 más (su mitad) $10 = 30$.

b) Si se pide: "calcular los ángulos de un triángulo isósceles, sabiendo que el ángulo desigual es 30° más pequeño que los otros dos".

En este caso, hay que saber dos cosas:

- 1) Que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales; y, en consecuencia, dos ángulos iguales.
- 2) Que la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo vale 180° :

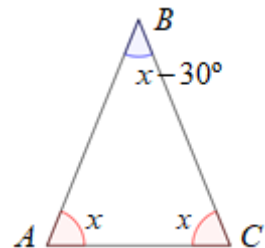
$$A + B + C = 180^\circ.$$

Si los ángulos iguales miden x , el desigual medirá $x - 30^\circ$.

En consecuencia,

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow x + (x - 30) + x = 180 \Rightarrow 3x - 30 = 180 \Rightarrow 3x = 210 \Rightarrow x = 70.$$

Los ángulos buscados valen: $A = C = x = 70^\circ$; $B = 30^\circ$.



Ejercicios y Problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+10=8$ b) $3x-5=-20$ c) $23-4x=3$ d) $3x+7=-2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x-5+2x=0$ b) $3(x-5)=9$ c) $2-4x=3x-5$ d) $11=-2(2-3x)$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x-(5+2x)+5=x$ b) $3(x-5)=6-2(x-3)$ c) $2x-4(x-1)=-3x+9$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $2x-3(2-x)=5+x$ b) $3-2(2x+3)=3(2-5x)+2$ c) $3(x-4)=5(2+5x)$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2}=5$ b) $\frac{x-2}{4}=-1$ c) $\frac{3x}{2}=\frac{3}{4}$ d) $\frac{x}{3}=0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{2}+2=5$ b) $\frac{x}{4}=\frac{2x-5}{3}$ c) $\frac{3x}{2}-4=0$ d) $\frac{2x}{3}=5-x \Rightarrow$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x-6}{2}=2x+3$ b) $\frac{3x}{2}-2x+2=5$ c) $\frac{x}{4}+3=2-(1+x)$ d) $\frac{3x-2}{4}=2-5(1-x)$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}=\frac{7}{6}$ b) $\frac{x}{4}+3=2-\frac{x-2}{2}$ c) $\frac{3x-9}{4}=\frac{x-2}{2}$

9. Resuelve:

a) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{3}=\frac{14}{3}$ b) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{3}=\frac{4}{3}$ c) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{3}=\frac{4}{3}+x$ d) $\frac{5x}{2}-\frac{3x}{10}=\frac{4}{5}+x$

10. Resuelve:

a) $\frac{4x}{5}-2\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{6}\right)=3$ b) $\frac{4x}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{6}\right)=3\left(x-\frac{7}{3}\right)$ c) $\frac{4x}{5}-3\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{6}\right)=0$

11. Si a un número se le resta su tercera parte el resultado es 40. ¿Cuál es ese número?

12. Si a cierto número le restas siete unidades te da lo mismo que si lo divides por 5. ¿De qué número se trata?

13. La edad de Pedro es la cuarta parte de la de su padre. Si la suma de sus edades es 50, ¿cuántos años tiene cada uno?

14. Un poste está clavado en el suelo. La parte enterrada es $\frac{1}{10}$ de su longitud. Si la parte visible mide 126 cm, halla, planteando una ecuación, la longitud total del poste. (Haz un dibujo apropiado).

15. Escribe la expresión algebraica asociada al enunciado: “un número más su mitad vale 45”.
¿De qué número se trata?

16. La medida en grados de los tres ángulos de un triángulo viene dada por tres múltiplos consecutivos de 10. Plantea una ecuación que te permita hallar lo que mide cada ángulo. ¿Cuánto mide el menor de ellos?



17. Calcula los ángulos de un triángulo isósceles, sabiendo que el ángulo desigual es 15° más grande que los otros dos.

18. Los lados iguales de un triángulo isósceles son tres veces más largos que su base. Si el perímetro del triángulo es 140 cm, ¿cuánto miden sus lados?

19. En una clase hay 35 alumnos. Si hay cinco chicos por cada dos chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

20. A una cuba de vino, inicialmente llena, se le extrae un sexto de su capacidad más 15 litros. Si añadiendo un cuarto de su capacidad éste vuelve a llenarse, ¿cuántos litros caben en la cuba?



21. Se han mezclado dos tipos de vino, uno que cuesta 4 euros el litro con otro de 5 euros el litro. Si la mezcla sale a 4,20 euros el litro, ¿cuántos litros se han empleado del más caro si del más barato se han empleado 40?

22. Se han mezclado x litros de vino, que cuesta 4 euros el litro, con 20 litros de vino que cuesta a 5 euros el litro. Si la mezcla sale a 4,25 €/litro, ¿cuántos litros se han empleado del primer vino?



23. Dos amigos que viven en dos pueblos distantes 12 km deciden encontrarse en un punto situado entre ambos pueblos. Los dos salen a la misma hora, uno caminando a una velocidad de 4 km/h; el otro en bici, a una velocidad de 20 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre el que va andando? ¿Cuánto tardan en encontrarse?

24. Un depósito se está llenando de agua. Si cuando el depósito alcanza el nivel de un sexto de su capacidad se le añaden 130 litros, entonces se llena hasta los tres quintos, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Soluciones:

1. a) -1 . b) -5 . c) 5 . d) -3 . 2. a) 1 . b) 8 . c) 1 . d) $5/2$. 3. a) 0 . b) $27/5$. c) 5 .

8. a) $x = \frac{11}{4}$. b) $x = 1$. c) -1 . 5. a) 10 . b) -2 . c) $1/2$. d) 0 .

6. a) 2 . b) 4 . c) $8/3$. d) 3 . 7. a) 12 . b) -6 . c) $16/5$. d) $10/17$. 8. a) $7/10$. b) 0 . c) 5 .

9. a) $x = 2$. b) $x = \frac{20}{11}$. c) $x = -\frac{10}{7}$. d) $x = \frac{2}{3}$. 10. a) $x = \frac{65}{2}$. b) $x = \frac{101}{35}$. c) $x = \frac{25}{2}$.

11. 60 . 12. $1,75$. 13. Pedro, 10 ; Padre, 40 años. 14. 140 cm. 15. 30 . 16. 50° .

17. 55° , 55° y 70° . 18. Base, 20 ; lados, 60 cada uno. 19. 25 chicos; 10 chicas.

20. 180 litros. 21. 10 litros. 22. 60 litros. 23. 2 km. $0,5$ h. 24. 300 .