Tema 5 (I). Proporcionalidad Resumen

La razón de dos números *a* y *b* es la fracción $\frac{a}{b}$. (Es su cociente, en el orden que se dice).

Ejemplo:

Si en una clase hay 3 chicas por cada 2 chicos, la razón correspondiente, chicas–chicos, es $\frac{3}{2}$.

Una proporción es la igualdad de dos razones. Esto es, una igualdad de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Esa igualdad indica que las cantidades *a* y *c* son directamente proporcionales a las cantidades *b* y *d*, respectivamente. Puede leerse así: "*a* es a *b* como *c* es a *d*".

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Ejemplo:

Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales. Por tanto, todas las razones que se forman son iguales; esto es:

$$\frac{2}{3}=\frac{14}{21}=\frac{20}{30}=\frac{30}{y}=\frac{x}{60}=\frac{1}{k}.$$

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	14	20	**30**	***x***	**1**
Magnitud B	**3**	21	30	***y***	**60**	***k***

Propiedad: En una proporción, el producto de los *extremos* (*a* y *d*) es igual al producto de los *medios* (*b* y *c*). Esto es: $a\cdot d=b\cdot c$.

- Esta propiedad permite encontrar el valor desconocido de uno cualquiera de los cuatro términos de la proporción, conocidos los otros tres.

Ejemplos:

a) De $\frac{2}{3}=\frac{30}{y} \Rightarrow 2\cdot y=3\cdot 30 \Rightarrow y=\frac{3\cdot 30}{2}=\frac{90}{2}=45$.

b) En un frutero hay peras y manzanas. La razón peras–manzanas es de 3 a 4. ¿Si hay 12 manzanas, cuántas peras habrá?

La proporción que se obtiene es $\frac{3}{4}=\frac{x}{12} \Rightarrow 3\cdot 12=4\cdot x \Rightarrow 36=4x \Rightarrow x=9$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa: constante de proporcionalidad

En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A. (Dividiendo la razón dada).

Ejemplo:

En la Tabla 1 el valor de B cuando A = 1 es 3 : 2 = 1,5. Es el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse, por ejemplo, de la igualdad $\frac{20}{30}=\frac{1}{k}$. Sea como sea, *k* = 1,5.

- El valor de *k*, para dos magnitudes proporcionales, es siempre el mismo, y se llama constante de proporcionalidad.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan multiplicando los de A por *k*. (Para la Tabla 1, si A = 4 ⇒ B = 4 · 1,5 = 6; si A = 30 ⇒ B = 30 · 1,5 = 45).
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo los de B por *k*. (En la misma Tabla 1, si B = 15 ⇒ A = 15 : 1,5 = 10; si B = 60 ⇒ A = 60 : 1,5 = 40).

Los problemas de regla de tres (simple) pueden resolverse:

- aplicando la propiedad de la igualdad de razones: cálculo del valor desconocido
- mediante la constante de proporcionalidad: reducción a la unidad.

Ejemplo:
Si 15 vacas se comen 36 kg de pienso al día, ¿cuántos kg de pienso serán necesarios para alimentar a 50 vacas diariamente?

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 15 vacas $\rightarrow$ comen 36 kg

50 vacas $\rightarrow$ comerán x kg $\Rightarrow$ Las proporciones asociadas son:

$\frac{15}{50}=\frac{36}{x}$, o bien: $\frac{15}{36}=\frac{50}{x}$. En ambos casos: $x=\frac{36 \cdot 50}{15}=120$ kg.

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar lo que come una vaca al día, que es $\frac{36}{15}=2{,}4$ kg. En consecuencia, 50 vacas comerán: 2,4 · 50 = 120 kg.

Regla de tres compuesta
Intervienen más variables. Conviene reducir a la unidad.

Ejemplos:
1. Un granjero necesita 294 kilos de pienso para alimentar a 15 vacas durante 7 días. ¿Durante cuántos días podría alimentar a 10 vacas si dispusiese den 840 kilos de pienso?
$\rightarrow$ Conviene calcular cuánto pienso necesita 1 vaca en 1 día:
15 vacas durante 7 días comen lo mismo que 1 vaca durante 15 · 7 = 105 días.
Si en 105 días consume 294 kg de pienso $\Rightarrow$ cada día come 294/105 = 2,8 kg.
Con 840 kilos de pienso podría comer durante 840/2,8 = 300 días.
Como son 10 vacas, tendrían pienso para 300/10 = 30 días.

2. Para hacer una zanja de 60 metros, 3 excavadoras han empleado 4 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 4 excavadoras para hacer una zanja de 100 metros?

$\rightarrow$ Conviene calcular los metros de zanja que hace una excavadora en 1 hora:
3 excavadoras trabajando 4 horas hacen lo mismo que 1 excavadora en 3 · 4 = 12 horas.
Si en 12 horas se excava 60 m, en 1 hora excavará 5 m.
Para hacer una zanja de 100 metros necesitará 100/5 = 20 horas.
Entre 4 excavadoras harían la zanja en 20/4 = 5 horas.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:
Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son inversamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, …, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, …

Tabla 2. Inversamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	8	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	***y***	**2,5**	***k***

Propiedad: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $2 \cdot 50=4 \cdot 25=8 \cdot 12{,}5=10 \cdot 10=...=20 \cdot y=x \cdot 2{,}5=1 \cdot k$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.

Ejemplo:
Para las magnitudes dadas en la tabla 2, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $2{\cdot}50 = 20{\cdot}y$, entonces $y = 5$; y si $2{\cdot}50 = x{\cdot}2{,}5$, entonces $x = 40$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad inversa
Es el valor de *k* en la Tabla 2, que puede obtenerse de la igualdad $2{\cdot}50 = 1{\cdot}k \Rightarrow k = 100$. (Es el valor de B correspondiente al valor de A = 1).

- Conociendo la constante *k*, los valores de B se hallan dividiendo *k* entre los valores de A. (Para la Tabla 2, si A = 2 ⇒ B = 100 : 2 = 50; si A = 20 ⇒ B = 100 : 20 = 5).
- Conociendo la constante *k*, los valores de A se hallan dividiendo *k* entre los valores de B. (Para la Tabla 2, si B = 10 ⇒ A = 100 : 10 = 10; si B = 8 ⇒ A = 100 : 8 = 12,5).

Los problemas de regla de tres inversa pueden resolverse:

- aplicando la propiedad de los productos.
- mediante la constante de proporcionalidad: reducción a la unidad.

Ejemplo:
Si 2 pintores encalan una pared en 20 horas, ¿cuántas horas tardarían en encalarla entre 5 pintores?
Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 2 pintores → tardan 20 h

5 pintores → tardarán *x* h $\Rightarrow 2 \cdot 20 = 5 \cdot x \Rightarrow 40 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{40}{5} = 8$ h.

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el tiempo que tardaría un solo pintor. Ese tiempo sería de 40 horas → 2 · 20 = 28; el doble que si lo hacen entre dos. En consecuencia, entre 5 pintores emplearían $\dfrac{40}{5} = 8$ horas.

Repartos directamente proporcionales
Repartir una cantidad T entre tres números *a*, *b* y *c*, de manera directamente proporcional, consiste en asignar a cada número la parte de T que sea directamente proporcional a su valor. Esto es, si las cantidades correspondientes fuesen *A*, *B* y *C*, debe cumplirse que

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \Leftrightarrow A = k{\cdot}a,\ B = k{\cdot}b;\ C = k{\cdot}c.$$

El valor de *k*, que es el correspondiente a 1, se obtiene dividiendo T entre (*a* + *b* + *c*).

Ejemplo:
Para repartir directamente proporcional una ganancia de 15000 €, entre tres personas que han realizado un trabajo común, dedicando 230, 450 y 120 horas, respectivamente, se determina la ganancia correspondiente a una hora de trabajo. Como el total de horas trabajadas es de 230 + 450 + 120 = 800, la ganancia unitaria será $\dfrac{15000}{800} = 18{,}75$ €/h.

Por tanto:
– al que trabajó 230 horas le corresponderán 230 · 18,75 = 4312,5 €.
– al que trabajó 450 horas le corresponderán 450 · 18,75 = 8437,5 €
– al que trabajó 120 horas le corresponderán 120 · 18,75 = 2250 €.

Observación:
Puede comprobarse que el cociente entre la ganancia de cada uno y su número de horas trabajadas es constante:

$$\frac{4312{,}5}{230} = \frac{8437{,}5}{450} = \frac{2250}{120} = 18{,}75$$

Repartos inversamente proporcionales
Repartir una cantidad T entre tres números *a*, *b* y *c*, de manera inversamente proporcional, consiste en asignar a cada número la parte de T que sea inversamente proporcional a su valor. Esto es, si las cantidades correspondientes fuesen *A*, *B* y *C*, debe cumplirse que

$$A \cdot a = B \cdot b = C \cdot c = k \Leftrightarrow A = \frac{k}{a},\ B = \frac{k}{b};\ C = \frac{k}{c}.$$

Por tanto, las cantidades *A*, *B* y *C* son directamente proporcionales a $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$, respectivamente. El valor de *k* se obtiene dividiendo T entre $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Ejemplo:
Para repartir una cantidad de 15000 €, inversamente proporcional a los años de tres herederos, pongamos de 12, 15 y 21 años, se hace un reparto directo entre las cantidades inversas, esto es, entre $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{21}$. Como la suma total es $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} = \frac{83}{420}$, se tendrá:

– si a $\frac{83}{420}$ le corresponde 15000 €,
a $\frac{1}{12}$ le corresponderá *x* $\Rightarrow$ $x = (15000 \cdot 1/12) : (83/420) = 6325{,}30$ €

– si a $\frac{83}{420}$ le corresponde 15000 €,
a $\frac{1}{15}$ le corresponderá *y* $\Rightarrow$ y = $(15000 \cdot 1/15) : (83/420) = 5060{,}24$ €

– si a $\frac{83}{420}$ le corresponde 15000 €,
a $\frac{1}{21}$ le corresponderá *z* $\Rightarrow$ $z = (15000 \cdot 1/21) : (83/420) = 3614{,}46$ €

Por tanto: al de 12 años le corresponderán 6325,30 €; al de 15 años, 5060,24 €; al de 21 años, 3614,46 €.

Observación:
Puede comprobarse que el producto de las edades de cada uno por su cantidad correspondiente es constante:

$12 \cdot 6325{,}30 = 15 \cdot 5060{,}24 = 21 \cdot 3614{,}46 = 75.903{,}6$.

Ejercicios y Problemas

1. En una clase hay 5 chicas por cada 3 chicos.
   a) ¿Cuál es la razón de sexos en esa clase?
   b) Si en esa clase hay 20 chicas, escribe la proporción que permita determinar el número de chicos. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

2. En una clase hay 5 chicas por cada 3 chicos.
   a) ¿Qué fracción del total representa a las chicas?
   b) Si en la clase hay 12 chicos, ¿cuántos alumnos hay en total?

3. En un instituto que tiene 627 alumnos, cinco de cada once son chicos.
   a) Escribe la razón de sexos asociada.
   b) ¿Cuántos chicos y chicas hay en ese instituto?

4. En una cesta de fruta hay 3 manzanas por cada 4 naranjas.
   a) ¿Cuál es la razón definida por los números de manzanas y naranjas?
   b) Si en la cesta hay 15 manzanas, ¿cuántas naranjas habrá?

5. En la siguiente tabla, calcula los valores de *a* y *b* sabiendo que las magnitudes A y B son directamente proporcionales

A	3	4	*a*
B	12	*b*	20

6. Por 2,4 kg de patatas se han pagado 2,64 €. ¿A cuánto sale el kg? ¿Cuánto deberá pagarse por 4,2 kg?

7. Con 40 kg de pienso se pueden alimentar 16 vacas. ¿Cuántos kilos de pienso serán necesarios para alimentar a 40 vacas?

8. Por trabajar 2,5 horas a Pedro le han pagado 30 €. ¿Cuánto le pagarán otro día por trabajar 4 horas?

9. En la siguiente tabla, calcula los valores de *a* y *b* sabiendo que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales

A	3	4	*a*
B	12	*b*	20

10. Para limpiar un parque 8 jardineros han empleado 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 6 jardineros? ¿Y 2 jardineros?

11. A la velocidad constante de 4 km/h, un excursionista tarda 2,5 horas en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardaría en hacer el mismo trayecto a una velocidad de 5 km/h?

12. A la velocidad constante de 90 km/h, un camionero tarda 3 h y 30 min en realizar un trayecto. ¿Qué velocidad debe llevar si desea emplear 3 h en realizar el mismo trayecto?

13. Un ganadero necesita cada día 320 kg de forraje para alimentar a 200 ovejas. ¿Cuántos kilos de forraje necesitará para alimentar a 150 ovejas durante 4 días?

14. Un granjero necesita cada día 255 kg de pienso para dar de comer a 750 gallinas. ¿Cuántos kilos de pienso necesitará para dar de comer a 500 gallinas durante una semana?
(Observación. Determina cuánto come una gallina al día.)

15. Para vaciar un depósito de agua de 4500 m^3 de volumen se necesitan 5 desagües abiertos durante 6 horas. ¿Cuántas desagües iguales a los anteriores serán necesarios para vaciar otro depósito de 6000 m^3 en 4 horas?

16. Una excavadora, trabajando 10 horas al día, abre una zanja de 1000 metros en 8 días. ¿Cuánto tardaría en abrir una zanja de 600 metros, trabajando 12 horas al día?
(Observación. Determina cuántos metros excava en una hora.)

17. Por la realización de un trabajo tres personas reciben la cantidad de 1200 €. ¿Cómo se repartirían el dinero si el primero trabajó 10 horas, el segundo 14 horas y el tercero, 6 horas?

18. Un pequeño empresario desea repartir unos beneficios de 36000 euros entre cuatro empleados, proporcionalmente al número de años de antigüedad en la empresa. Los años de antigüedad son 15, 10, 6 y 3. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno de ellos?

19. Se reparten 90 euros entre el primero y el segundo clasificado en una carrera, de manera inversamente proporcional al puesto alcanzado. ¿Qué dinero recibirá cada uno?

20. El mismo empresario desea incentivar la puntualidad de sus cuatro empleados repartiendo 4000 € de manera inversamente proporcional al número de días que estos llegan con retraso al trabajo. Si los retrasos de esos empleados fueron, respectivamente, 2, 4, 6 y 8, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno de ellos?

Soluciones:

1. a) $\frac{5}{3}$. b) $\frac{5}{3}=\frac{20}{x} \Rightarrow x = 12$. **2**. a) $\frac{5}{8}$. b) 32. **3**. a) $\frac{5}{6}$.b) 285 y 342. **4**. a) $\frac{3}{4}$. b) 20.
5. a = 5; b = 16. **6**. 1,10 €; 4,62 €. **7**. 100 kg. **8**. 48 €. **9**. a = 1,8; b = 9.
10. 4 h. 12 h. **11**. 2 h. **12**. 105 km/h. **13**. 960 kg.
14. 3,4 · 50 · 7 = 1190 kg. **15**. 10. **16**. 4 días.
17. 400 €; 560 €; 240 €. **18**. 15882,3 €; 10588,2 €; 6353,9 €; 3176,5 €.
19. 60 y 30 €. **20**. 1920, 960, 640, 480 euros.