

Tema 10. Teorema de Pitágoras

Resumen

El teorema de Pitágoras establece la relación entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos. Esa relación es:

“En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”.

O lo que es lo mismo:

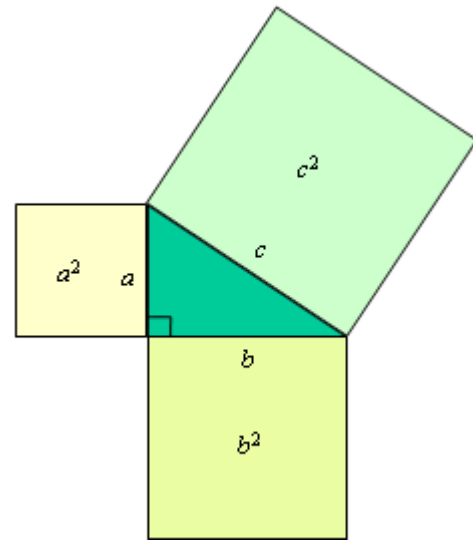
Si los catetos miden a y b , y la hipotenusa c , entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



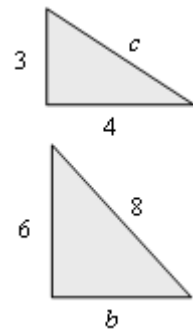
Ejemplos:

- a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, c , cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5.$$

- b) Si la hipotenusa vale $c = 8$ cm y un cateto vale $a = 6$ cm, el otro cateto, b , cumple:

$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5,29.$$



Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras

En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos...), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas... Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

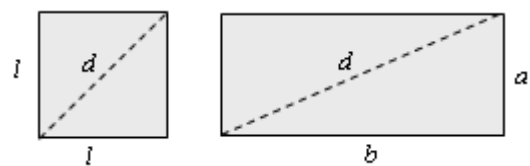
- En los cuadrados y en los rectángulos puede hallarse la diagonal cuando se conocen los lados.

En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.

También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.

En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

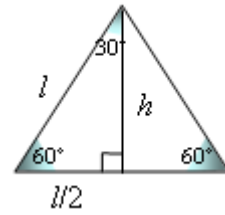


Ejemplos:

- a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,48$.

- b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

- En un triángulo equilátero, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



$$\text{Esto es: } l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}.$$

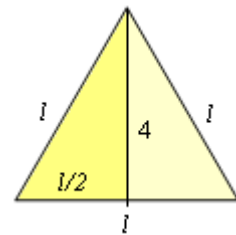
Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá: $h = \frac{\sqrt{3} \cdot 15}{2} \approx 13$ cm.

b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:

$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4,61.$$

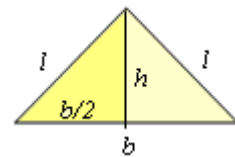


- En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

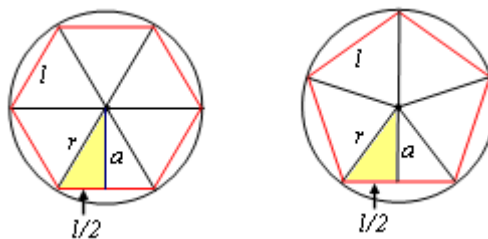
Ejemplo:

Si en el triángulo adjunto el lado $l = 5$ cm y la base $b = 8$ cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$



- En los polígonos regulares pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.



Como puede observarse, se establece la relación: $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.

Ejercicios

(Para resolver los ejercicios de esta hoja puede utilizarse calculadora)

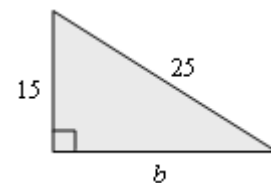
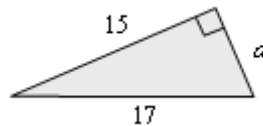
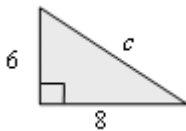
1. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cm. Comprueba, midiendo, que su hipotenusa mide 5 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

.....

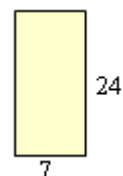
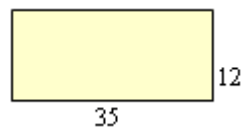
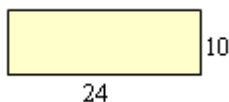
2. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 3. Comprueba que su hipotenusa mide 3,6 cm (aproximadamente). Escribe la relación pitagórica para las medidas de los lados de ese triángulo rectángulo.

.....

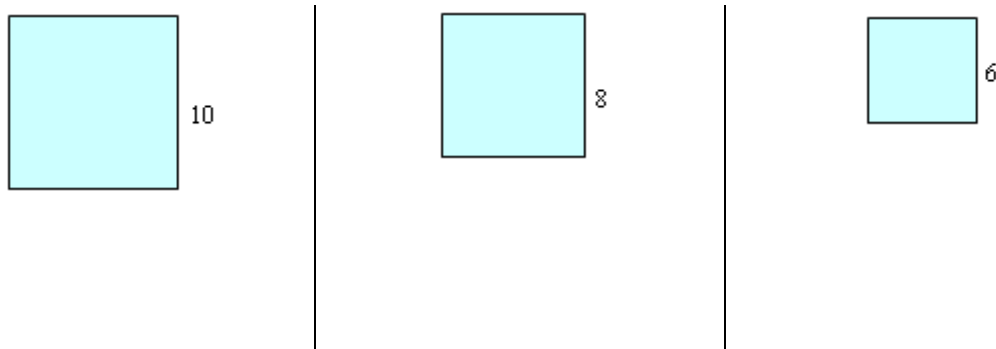
3. Halla el lado desconocido en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:



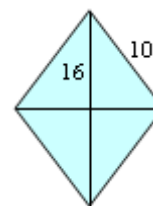
4. Halla la diagonal de los siguientes rectángulos.



5. Halla la diagonal de los siguientes cuadrados.

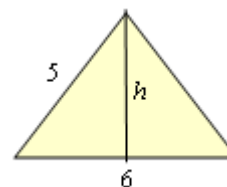


6. El lado de un rombo mide 10 cm y su diagonal mayor 16 cm. ¿Cuánto vale su diagonal menor?



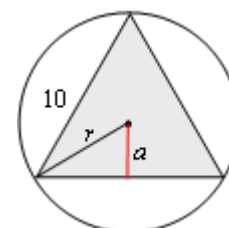
7. Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Halla su lado. (Haz un dibujo).

8. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 5 cm. Si su base mide 6 cm, ¿cuánto medirá su altura?



9. En la figura adjunta se muestra un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia. Si el lado del triángulo mide 10 cm, halla la altura del triángulo, su apotema y el radio de la circunferencia.

Nota: La apotema de un triángulo equilátero es la tercera parte de su altura. Toma $\sqrt{75} = 8,7$ y $\sqrt{33,41} = 5,78$.



Soluciones:

3. $c = 10$; $a = 8$; $b = 20$. 4. 26; 37; 25. 5. Aproximadamente: 14,14; 11,31; 8,49.

6. 12 cm. 7. 5 cm. 8. 4 cm. 9. $h = 8,7$ cm; $a = 2,9$ cm; $r = 5,78$ cm.