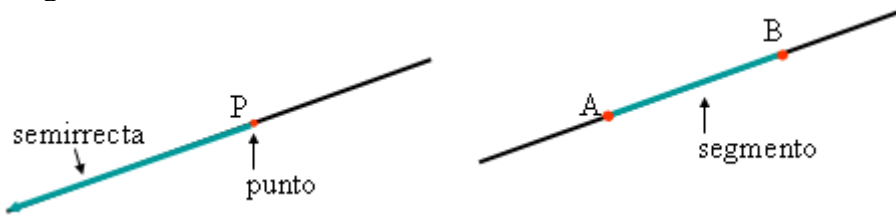


Tema 9 (I). Geometría: Rectas y ángulos

Resumen

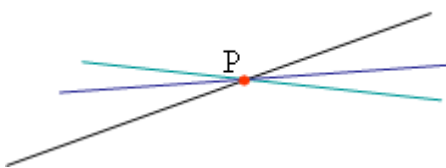
Punto, recta, segmento



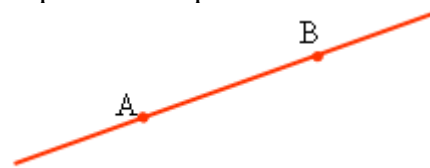
Un punto divide a una recta en dos semirrectas.

Un segmento es un trozo de recta comprendido entre dos puntos.

Por un punto pasan infinitas rectas.



Por dos puntos sólo pasa una recta.



Ángulos

Es cada una de las partes del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común. El origen de esas semirrectas se llama vértice del ángulo; las semirrectas que lo limitan se llaman lados del ángulo.

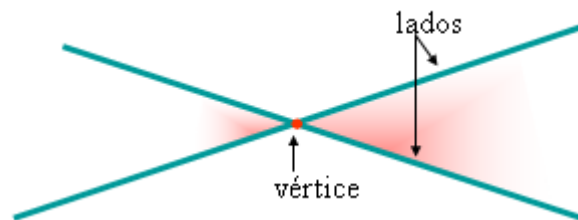
Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

La abertura de un ángulo se mide en grados, minutos y segundos.

El ángulo completo (que equivale al plano entero) mide 360° .

Un semiplano, que puede verse como un ángulo formado por dos semirrectas de la misma recta, mide 180° .

Un ángulo que mide 90° se llama recto.



Los ángulos que miden entre 0° y 90° se llaman agudos. Los que miden entre 90° y 180° , obtusos.

Si dos ángulos tienen en común el vértice y un lado se llaman consecutivos o adyacentes.

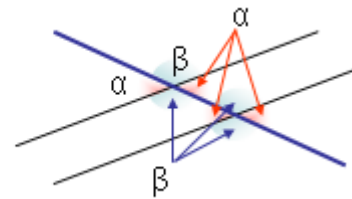
Dos ángulos se llaman complementarios si entre los dos suman 90° .

Dos ángulos se llaman suplementarios si entre los dos suman 180° .

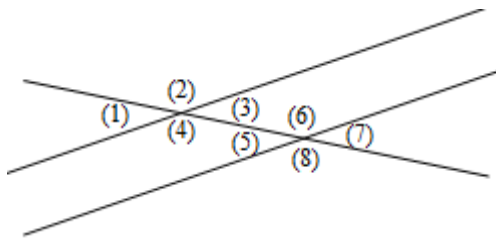


Algunas relaciones angulares

Dos rectas que se cortan formando un ángulo recto se llaman perpendiculares. Las rectas que no se cortan se dice que son paralelas.



- Si dos rectas paralelas son cortadas por otra, se forman ocho ángulos, iguales cuatro a cuatro. (Además, los ángulos α y β son suplementarios).



Son iguales los ángulos (1), (3), (5) y (7); y lo mismo pasa con (2), (4), (6) y (8).

→ (1) y (3), (2) y (4), ... se llaman opuestos por el vértice.

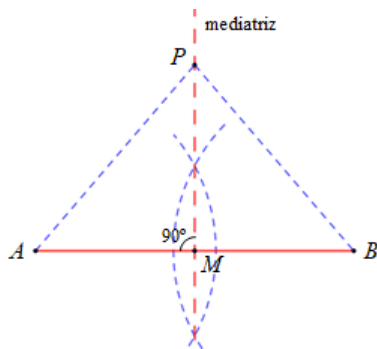
→ (1) y (5), (2) y (6), ... se llaman correspondientes.

→ (3) y (5), (4) y (6) se llaman alternos-internos.

→ (1) y (7), (2) y (8) se llaman alternos-externos.

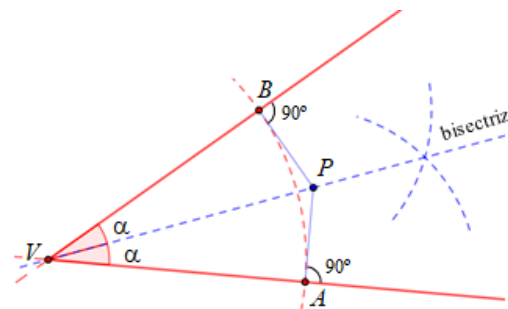
Mediatriz de un segmento. Es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

Propiedad: Cada punto de la mediatriz está a igual distancia de los extremos del segmento: si P es de la mediatriz, se verifica que $PA = PB$. La mediatriz se puede trazar con ayuda de un compás.



Bisectriz de un ángulo. Es la recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Propiedad: Cada punto de la bisectriz está a igual distancia de los lados del ángulo: si P es de la bisectriz, se cumple que $PA = PB$. La bisectriz se puede trazar con ayuda de un compás.



Medida de ángulos

La unidad de medida es el grado ($^\circ$), que es el resultado de dividir un ángulo completo en 360 partes iguales. Un ángulo completo mide 360° .

- La medida (amplitud) de un ángulo puede expresarse en forma sexagesimal: en grados, minutos y segundos. Por ejemplo: $25^\circ 30' 36''$.
- La medida de un ángulo también se puede expresar en forma decimal. Por ejemplo: $25,51^\circ$.

Para pasar de una forma a otra hay que tener en cuenta que:

- $1 \text{ grado} = 60 \text{ minutos} \rightarrow 1^\circ = 60'$. Por tanto, para pasar de grados a minutos se multiplica por 60. Para pasar de minutos a grados se divide por 60.

Ejemplos:

- a) $20^\circ = (20 \cdot 60) = 1200'$
- b) $1,2^\circ = (1,2 \cdot 60) = 72'$
- c) $0,1^\circ = (0,1 \cdot 60) = 6'$
- d) $0,12^\circ = (0,12 \cdot 60) = 7,2'$
- e) $300' = (300 : 60) = 5^\circ$
- f) $12' = (12 : 60) = 0,2^\circ$
- g) $132' = 120' + 12' = 2^\circ + 0,2^\circ = 2,2^\circ$
- h) $350' = (350 : 60) = 5,833\dots$
- i) $30,1^\circ = 30^\circ + 0,1^\circ = 30^\circ 6'$

• 1 minuto = 60 segundos $\rightarrow 1' = 60''$. Por tanto, para pasar de minutos a segundos se multiplica por 60. Para pasar de segundos a minutos se divide por 60.

Para pasar de segundos a grados se divide por 3600; de grados a segundo, se multiplica por 3600.

Ejemplos:

- a) $12' = (12 \cdot 60) = 720''$
- b) $0,6' = (0,6 \cdot 60) = 36''$
- c) $384'' = (384 : 60) = 6,4' = 6' 24''$
- d) $900'' = (900 : 3600) = 0,25^\circ$
- e) $30,12^\circ = 30^\circ + 0,12^\circ = 30^\circ 7,6' = 30^\circ 7' + 0,6' = 30^\circ 7' 36''$
- f) $25,51^\circ = 25^\circ + 0,51^\circ = 30^\circ 30,6' = 30^\circ 30' + 0,6' = 30^\circ 30' 36''$

• La conversión de una forma a otra puede hacerse con la calculadora, usando la tecla $\boxed{\text{° ' ''}}$.

Para el ángulo $25^\circ 30' 36''$ se teclaea $25 \boxed{\text{° ' ''}} 30 \boxed{\text{° ' ''}} 36 \boxed{\text{° ' ''}} \boxed{=}$ $\boxed{\text{° ' ''}}$ $\rightarrow 25,51$.

Al revés, si teclaeas $25,51 \boxed{\text{° ' ''}} \boxed{=}$ se obtiene $25^\circ 30' 36''$.

Siempre hay que introducir los grados, minutos y segundos, incluso si son 0.

Por ejemplo, para el ángulo $0^\circ 25' 30''$ se teclaea $0 \boxed{\text{° ' ''}} 25 \boxed{\text{° ' ''}} 30 \boxed{\text{° ' ''}} \boxed{=}$ $\boxed{\text{° ' ''}}$ $\rightarrow 0,425$.

Suma y resta de ángulos dados en forma sexagesimal

Si vienen expresados en grados, minutos y segundos, conviene sumar cada unidad por separado: grados + grados; minutos + minutos; segundos + segundos. Para expresar el resultado en la misma forma sexagesimal, cuando los segundos o los minutos sean más de 60, cada $60''$ se transforman en $1'$ y cada $60'$ se convierten en 1° .

Ejemplos:

- a) $(18^\circ 7' 38'') + (12^\circ 32' 42'') = (18 + 12)^\circ (7 + 32)' (38 + 42)'' = 30^\circ 45' 80'' = (\text{como } 80'' = 1' 20'' \text{ se suma } 1' \text{ al resultado anterior}) = 30^\circ (45 + 1)' 20'' = 30^\circ 46' 20''$.
- b) $(38^\circ 53' 47'') + (50^\circ 43' 8'') = (38 + 50)^\circ (53 + 43)' (47 + 8)'' = 88^\circ 98' 55'' = (\text{como } 98' = 1^\circ 38' \text{ se suma } 1^\circ \text{ al resultado anterior}) = (88 + 1)^\circ 38' 55'' = 89^\circ 38' 55''$.
- c) $(32^\circ 47' 32'') + (10^\circ 42' 45'') = (32 + 10)^\circ (47 + 42)' (32 + 45)'' = 42^\circ 89' 77'' = 42^\circ 89' 1' + 76'' = 42^\circ 90' 17'' = 42^\circ 1^\circ + 30' 17'' = 43^\circ 30' 17''$.

A veces, para calcular sumas se disponen las cantidades como se indica en los ejemplos que siguen:

$$(32^\circ 47' 32'') + (10^\circ 42' 12''); \quad (32^\circ 47' 32'') + (10^\circ 42' 45'')$$

$\begin{array}{r} 32^\circ \quad 47' \quad 32'' \\ 10^\circ \quad 42' \quad 12'' \\ \hline 42^\circ \quad 79' \quad 44'' \\ 42^\circ \quad 60'+19' \quad 44'' \\ 43^\circ \quad \leftarrow(1^\circ)+19' \quad 44'' \end{array}$	$\begin{array}{r} 32^\circ \quad 47' \quad 32'' \\ 10^\circ \quad 42' \quad 45'' \\ \hline 42^\circ \quad 89' \quad 77'' \\ 42^\circ \quad 89'+1' \quad 60''+17'' \\ \quad \quad 90' \quad \leftarrow(1^\circ)+17'' \\ 43^\circ \quad \leftarrow(1^\circ)+30' \quad 17'' \end{array}$
---	---

• Con la calculadora la operación es inmediata. Para hallar $(32^\circ 47' 32'') + (10^\circ 42' 45'')$ se teclea: $32 \text{ [° ' "]} 47 \text{ [° ' "]} 32 \text{ [° ' "]} \text{ [+]} 10 \text{ [° ' "]} 42 \text{ [° ' "]} 45 \text{ [° ' "]} \text{ [=]} \rightarrow 43^\circ 30' 17''$.

Para restar el método es el mismo, cada unidad se resta por separado: grados – grados; minutos – minutos; segundos – segundos. Si en algún caso el minuendo fuese menor que el sustraendo se convertirá una unidad superior en otra inferior (1° en $60'$; $1'$ en $60''$).

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } (18^\circ 37' 38'') - (12^\circ 32' 42'') &= (18^\circ 36' + 60'' 38'') - (12^\circ 32' 42'') = \\ &= (18^\circ 36' 98'') - (12^\circ 32' 42'') = (18 - 12)^\circ (36 - 32)' (98 - 42)'' = 6^\circ 4' 56''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (43^\circ 37' 38'') - (12^\circ 50' 30'') &= (42^\circ + 60' 37' 38'') - (12^\circ 50' 30'') = \\ &= (42^\circ 97' 38'') - (12^\circ 50' 30'') = (42 - 12)^\circ (97 - 50)' (38 - 30)'' = 30^\circ 47' 8''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (43^\circ 37' 38'') - (12^\circ 50' 45'') &= (42^\circ + 60' 37' 38'') - (12^\circ 50' 45'') = \\ &= (42^\circ 97' 38'') - (12^\circ 50' 45'') = (42^\circ 96' + 60'' 38'') - (12^\circ 50' 45'') = \\ &= (42^\circ 96' 98'') - (12^\circ 50' 45'') = (42 - 12)^\circ (96 - 50)' (98 - 45)'' = 30^\circ 46' 53''. \end{aligned}$$

• Con la calculadora la operación es inmediata. Para hallar $(43^\circ 5' 36'') - (18^\circ 27' 43'')$ se teclea: $43 \text{ [° ' "]} 5 \text{ [° ' "]} 36 \text{ [° ' "]} \text{ [-]} 18 \text{ [° ' "]} 27 \text{ [° ' "]} 43 \text{ [° ' "]} \text{ [=]} \rightarrow 24^\circ 37' 53''$.

Igualmente, alguna “componente” es algún 0, como puede ser $(43^\circ 5') - (18^\circ 43'')$, se teclea: $43 \text{ [° ' "]} 5 \text{ [° ' "]} 0 \text{ [° ' "]} \text{ [-]} 18 \text{ [° ' "]} 0 \text{ [° ' "]} 43 \text{ [° ' "]} \text{ [=]} \rightarrow 25^\circ 4' 17''$.

Multiplicación de un ángulo dado en forma sexagesimal por un número

Si multiplica cada unidad por separado: grados · número; minutos · número; segundos + número. Para expresar el resultado en la misma forma sexagesimal, cuando los segundos o los minutos sean más de 60, cada $60''$ se transforman en $1'$ y cada $60'$ se convierten en 1° .

Ejemplos:

$$\text{a) } 13^\circ \cdot 5 = 65^\circ.$$

$$\text{b) } 35' \cdot 9 = 315' = 6^\circ 15'$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (14^\circ 19' 23'') \cdot 7 &= (14 \cdot 7)^\circ (19 \cdot 7)' (23 \cdot 7)'' = 98^\circ 133' 161'' = 98^\circ (2^\circ + 13') (2' + 41'') = \\ &= 100^\circ 15' 41''. \end{aligned}$$

• Con la calculadora, para esta última operación, se teclea:

$$14 \text{ [° ' "]} 19 \text{ [° ' "]} 23 \text{ [° ' "]} \text{ [x]} 7 \text{ [=]} \rightarrow 100^\circ 15' 41''.$$

División de un ángulo dado en forma sexagesimal por un número

Salvo en los casos inmediatos, lo haremos directamente con la calculadora.

Ejemplos:

$$\text{a) } 80^\circ : 5 = 16^\circ.$$

$$\text{b) } 180^\circ : 4 = 45^\circ$$

$$\text{c) } 90^\circ : 3 = 30^\circ.$$

$$\text{d) } (120^\circ 36' 42'') : 6 \rightarrow \text{Se teclea } 120 \text{ [° ' "]} 36 \text{ [° ' "]} 42 \text{ [° ' "]} \text{ [:]} 6 \text{ [=]} \rightarrow 20^\circ 6' 7''.$$

• Si los ángulos vienen expresados en forma decimal, las sumas y restas se hacen de la manera usual.

Ejemplos:

$$\text{a) } 18,6^\circ + 31,72^\circ = 50,32^\circ.$$

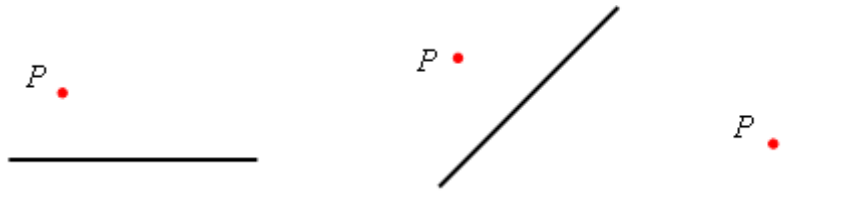
$$\text{b) } 53,6^\circ - 31,72^\circ = 21,88^\circ.$$

$$\text{c) } 32,5^\circ \cdot 8 = 260^\circ.$$

$$\text{d) } 210,95^\circ : 5 = 42,19^\circ.$$

Ejercicios

1. Traza una recta perpendicular y otra paralela a cada una de las siguientes rectas, desde el punto P.



2. Para cada uno de los ángulos siguientes, dibuja su opuesto por el vértice y su complementario.

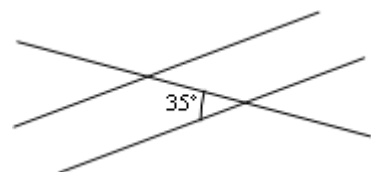


3. Dibuja un ángulo de 90° y, a partir de él traza a mano alzada, ángulos que midan: 45° ; $22,5^\circ$; 30° ; 60° . Una vez dibujados, mide con el transportador la mayor o menor exactitud de tus dibujos. Si tu resultado ha sido malo, vuelve a dibujar los mismos ángulos.

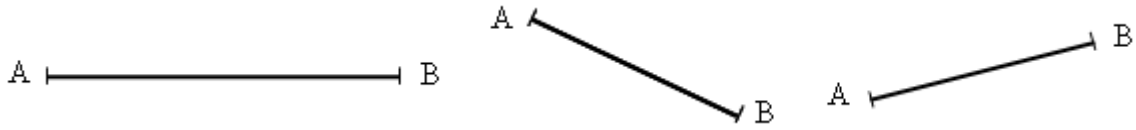


4. Con ayuda de un transportador dibuja ángulos que midan: 20° ; 35° ; 55° ; 70° . Entre los ángulos anteriores, ¿hay algunos que sean complementarios? Si es así, dibújalos consecutivamente y comprueba que dan lugar a un ángulo recto.

5. En la figura adjunta las rectas paralelas y la secante determinan ocho ángulos. Si el que se indica mide 35° , ¿cuántos grados mide cada uno de los siete ángulos restantes? (Anótalos con claridad en la figura).



6. Traza la mediatriz de cada uno de los siguientes segmentos.



7. Traza la bisectriz de cada uno de los siguientes ángulos.



8. Expresa en minutos los siguientes ángulos medidos en grados.

a) $10^\circ =$ b) $57^\circ =$ c) $0,5^\circ =$ d) $5,7^\circ =$

9. Expresa en grados los siguientes ángulos medidos en minutos.

a) $180' =$ b) $540' =$ c) $830' =$ d) $1215' =$

10. Halla las siguientes operaciones con ángulos:

a) $32^\circ + 49^\circ =$ b) $102^\circ - 78^\circ =$
 c) $45^\circ - 17^\circ + 29^\circ =$ d) $63,3^\circ + 18,9^\circ =$

11. Halla las siguientes operaciones con ángulos:

a) $(32^\circ 18') + (20^\circ 22') =$
 b) $(62^\circ 35') + (17^\circ 46') =$
 c) $(45^\circ 24') - (17^\circ 17') =$
 d) $(63^\circ 17') - (17^\circ 25') =$

12. Halla con la calculadora las operaciones siguientes:

a) $(25^\circ 12' 27'') + (10^\circ 32' 12'') =$ b) $(92^\circ 45' 28'') + (10^\circ 14' 32'')$
 c) $(25^\circ 12' 27'') - (10^\circ 32' 12'') =$ d) $(92^\circ 45' 28'') - (10^\circ 14' 32'')$

13. Halla con la calculadora las operaciones siguientes:

a) $4 \cdot (25^\circ 12' 27'') =$ b) $8 \cdot (15^\circ 0' 30'') =$
 c) $(40^\circ 30' 24'') : 2 =$ d) $(51^\circ 45' 27'') : 3 =$

Soluciones:

4. Complementarios: 20° y 70° ; 35° y 55° . 5. 35° ; 145° .
 8. a) $600'$. b) $3420'$. c) $30'$. d) $342'$. 9. a) 3° . b) 9° . c) $13,833^\circ = 13^\circ 50'$. d) $22,25^\circ$.
 10. a) 81° . b) 24° . c) 57° . d) $82,2^\circ$. 11. a) $52^\circ 40'$. b) $80^\circ 21'$. c) $28^\circ 7'$. d) $45^\circ 52'$.
 12. a) $35^\circ 44' 39''$. b) 103° . c) $14^\circ 40' 15''$. d) $82^\circ 30' 56''$.
 13. a) $100^\circ 49' 48''$. b) $120^\circ 4'$. c) $20^\circ 15' 12''$. d) $17^\circ 15' 9''$.