

Tema 8 (II). Ecuaciones

Resumen

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solo para algunos valores de las letras.

En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra x .

Ejemplos: Son ecuaciones las expresiones algebraicas siguientes:

$$\text{a) } 2x = 18 \quad \text{b) } x^2 = 4 \quad \text{c) } 2x - 3 = x + 7 \quad \text{d) } \frac{x-2}{5} = 1$$

La ecuación $2x = 18$ se cumple si $x = 9$, pues $2 \cdot 9 = 18$. Ese valor es su solución.

La ecuación $x^2 = 4$ se cumple si $x = 2$ o si $x = -2$, pues $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Esa igualdad no la cumple ningún otro valor. La ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones, que son $x = 2$ y $x = -2$.

- Cuando una igualdad se cumple para todos los valores de las letras se llama identidad.

Ejemplo:

$\frac{4x-2}{2} = 2x-1$ es una identidad. Puedes comprobarlo (hazlo) cuando $x = 2, 5, 9, \dots$, y para cualquier valor que tú decidas.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:

Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

$$\text{a) } 2x = 18 \text{ y } 4x = 36 \quad \text{b) } 2x - 3 = x + 7 \text{ y } 2x = x + 10 \quad \text{c) } \frac{x-2}{5} = 1 \text{ y } x - 2 = 5$$

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras es $x = 9$; que la solución de las dos segundas es $x = 10$; y que la solución de las dos últimas es $x = 7$. (Compruébalo).

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Esto es, los valores que cumplen la igualdad dada.

- Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
 1. Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad.
 2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad.

Ejemplos:

a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede transformarse como sigue:

$$\rightarrow \text{Se suma 3 a cada miembro} \rightarrow 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + \underline{3} = x + 7 + \underline{3} \Rightarrow 2x = x + \underline{10}.$$

$$\rightarrow \text{Se resta } x \text{ a cada miembro} \rightarrow \underline{2x} - \underline{x} = x + 10 - \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} = 10.$$

Así se consigue despejar la x ; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$.

b) La ecuación $\frac{x-2}{5} = 1$ se transforma así:

$$\rightarrow \text{Se multiplica por 5 cada miembro} \Rightarrow \frac{x-2}{5} \cdot \underline{5} = 1 \cdot \underline{5} \Leftrightarrow x - 2 = 5.$$

$$\rightarrow \text{Se suma 2 a cada miembro} \rightarrow x - 2 + \underline{2} = 5 + \underline{2} \rightarrow x = 7.$$

La solución de la ecuación es $x = 7$.

Resolución de ecuaciones fáciles

1. Ecuación $x + a = b$. Se resuelve restando a a ambos miembros. Queda: $x = b - a$.

Ejemplos: a) $x + 5 = 8 \rightarrow$ restando 5 se tiene: $x = 8 - 5 \Rightarrow x = 3$.

b) $x + 2 = -3 \rightarrow$ restando 2 se tiene: $x = -3 - 2 \Rightarrow x = -5$.

2. Ecuación $x - a = b$. Se resuelve sumando a a ambos miembros. Queda: $x = b + a$.

Ejemplos: a) $x - 3 = 6 \rightarrow$ sumando 3 se tiene: $x = 6 + 3 = 9$. La solución es $x = 9$.

b) $x - 4 = 0 \rightarrow$ sumando 4 se tiene: $x = 0 + 4 = 4$. La solución es $x = 4$.

Observa:

Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x + a = b \Rightarrow x = b - a$.

Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x - a = b \Rightarrow x = b + a$.

3. Ecuación $ax = b$. Se resuelve dividiendo por a ambos miembros. Queda: $x = \frac{b}{a}$.

Ejemplos: a) $3x = 15 \rightarrow$ dividiendo por 3 se tiene: $x = \frac{15}{3} = 5$. La solución es $x = 5$.

b) $2x = -3 \rightarrow$ dividiendo por 2 se tiene: $x = \frac{-3}{2} = -1,5$. La solución es $x = -1,5$.

4. Ecuación $\frac{x}{a} = b$. Se resuelve multiplicando por a ambos miembros. Queda: $x = ab$.

Ejemplos: a) $\frac{x}{3} = 2 \rightarrow$ multiplicando por 3 se tiene: $x = 2 \cdot 3 = 6$. La solución es $x = 6$.

b) $\frac{x}{5} = -1 \rightarrow$ multiplicando por 5 se tiene: $x = -1 \cdot 5 = -5$. La solución es $x = -5$.

Observa:

Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está

dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$; $\frac{x}{a} = b \Rightarrow x = ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por un múltiplo de los denominadores (en particular por su m.c.m.).
3. Se pasan (trasponen) las x a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan: se suman o restan.
4. Se despeja la x : lo que multiplica a la x pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la x , pasa multiplicando al otro miembro.

Ejemplos:

a) $3x - 5 + 2x = 4 - 6x + 7 + x \Rightarrow 3x + 2x + 6x - x = 4 + 7 + 5 \Rightarrow 10x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{10} = 1,6$.

b) $3 - 4x - (2x - 5) = 14 - 9x \Rightarrow 3 - 4x - 2x + 5 = 14 - 9x \Rightarrow -4x - 2x + 9x = 14 - 3 - 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$.

Ejercicios

1. Comprueba cuál es la solución de las ecuaciones que siguen, entre los valores que se dan.

a) $2x - 8 = x + 3 \rightarrow$ elige entre: $x = 9$; $x = 2$; $x = 11$.

$\rightarrow x = 9$ no es solución, pues $2 \cdot 9 - 8 = 10$ y $9 + 3 = 12$; $x = 2$, tampoco: $2 \cdot 2 - 8 \neq 2 + 3$;

$x = 11$ sí es solución, pues $2 \cdot 11 - 8 = 14$ y $11 + 3 = 14$: los resultados son iguales.

b) $\frac{x-2}{5} = 1 \rightarrow$ elige entre: $x = 7$; $x = -3$; $x = 2$.

c) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$ elige entre: $x = 0$; $x = 4$; $x = 1$; $x = 2$.

2. Halla pensando, sin despejar la x (pero justificándolo), la solución de las ecuaciones:

a) $2x = 10 \rightarrow$

b) $3x + 1 = 16 \rightarrow$

c) $2(x - 5) = 0 \rightarrow$

d) $\frac{32x+3}{7} = 5 \rightarrow$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + 2 = 9 \Rightarrow x = 9 - 2 = 7$.

b) $x - 3 = 2 \Rightarrow$

c) $x + 6 = 2 \Rightarrow$

d) $x + 5 = -3 \Rightarrow$

e) $x + 2 = 0 \Rightarrow$

f) $x - 5 = 0 \Rightarrow$

g) $x - 3 = -1 \Rightarrow x = -1 + 3 \Rightarrow x = 2$.

h) $x + 4 = 4 \Rightarrow$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x = 8 \Rightarrow$

b) $3x = -2 \Rightarrow$

c) $-4x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-4} \Rightarrow x = 3$.

d) $5x = 0 \Rightarrow$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 3 = 8 \Rightarrow$

b) $3x - 5 = -2 \Rightarrow$

c) $2 - 4x = 3 \Rightarrow$

d) $5x - 6 = -6 + x \Rightarrow$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 + 2x + 3 = x \Rightarrow$

b) $3(x - 5) = 6 \Rightarrow$

c) $2 - 4x = 3x + 9 \Rightarrow$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x - (5 + 2x) + 5 = x \Rightarrow$

b) $3(x - 5) = 6 - 2(x - 3) \Rightarrow$

c) $2x - 4(x - 1) = -3x + 9 \Rightarrow$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} = 5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4} = -1 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$

d) $\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{2} + 2 = 5 \Rightarrow$

b) $\frac{x}{4} = -1 + x \Rightarrow$

c) $\frac{x}{2} - 4 = 0 \Rightarrow$

d) $\frac{2x}{3} = -6 \Rightarrow$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x - 6}{2} = 2x + 3 \Rightarrow$

b) $\frac{3x}{2} - 2x + 2 = 5 \Rightarrow$

c) $\frac{x}{4} + 3 = 2 - (1 + x) \Rightarrow$

Soluciones.

1. a) $x = 11$. b) $x = 7$. c) $x = 4$ y $x = 1$. 2. a) 5. b) 5. c) 5. d) 1. 3. a) 7. b) 5. c) -4. d) -8. e) -2. f) 5. g) 2. h) 0.
4. a) 4. b) $-2/3$. c) 3. d) 0. 5. a) $5/2$. b) 1. c) $-1/4$. d) 0. 6. a) $1/2$. b) 7. c) 5. 7. a) 0. b) $-3/5$. c) 5.
8. a) 10. b) -4. c) 5. d) 0. 9. a) 2. b) $4/3$. c) 8. d) -9. 10. a) 12. b) -6. c) $16/5$.