Tema 7 (I). Proporcionalidad Resumen

Razón y proporción

Una razón es el cociente de dos magnitudes y se utiliza para establecer una comparación entre ellas. Se expresa como una fracción.

Ejemplo:

Si en un frutero hay 4 manzanas y 3 peras, la razón entre manzanas y peras es $\frac{3}{4}$.

Una proporción es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Por tanto, se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo:

Si la razón entre chicos y chicas en una clase es 5 a 6, $\frac{5}{6}$. Si se sabe que en esa clase hay 18 chicas, entonces puede establecerse la proporción $\frac{5}{6}=\frac{x}{18}$, igualdad que permite deducir que $x = 15$. (Observa que si $\frac{5}{6}=\frac{x}{18} \Rightarrow 5 \cdot 18 = 6 \cdot x \Rightarrow 90 = 6x \Rightarrow x = 15$).

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Ejemplo:

Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son directamente proporcionales

Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 3, por 10…, la magnitud B (de valor inicial 5) se multiplica por 2, por 3, por 10…

Tabla 1. Directamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	6	20	**30**	***x***	**1**
Magnitud B	**5**	10	15	50	***y***	**60**	***k***

Por tanto, en todos los casos, se obtendrán razones iguales a $\frac{2}{5}$.

Propiedad: si dos magnitudes son directamente proporcionales, el cociente entre las cantidades correspondientes es constante: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{20}{50}=\boxed{0,4}...=\frac{30}{y}=\frac{x}{60}=\frac{1}{k}$.

Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.

Ejemplo:

Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $\frac{2}{5}=\xrightarrow{\times 15}\frac{30}{y}$, entonces $y = 75$; y si $\frac{2}{5}=\frac{x}{60}$, entonces $x = 24$.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad directa

En los problemas de proporcionalidad resulta útil saber cuánto vale B cuando A = 1. Ese valor se halla dividiendo el valor de B por su correspondiente en A.

Ejemplo:
En la Tabla 1, el valor de B cuando A = 1 es 5 : 2 = 2,5; o 10 : 4. Será el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $\frac{2}{5}=\frac{1}{k}$ → al dividir por 2 el numerador también hay que dividir por 2 el denominador. Por tanto, k = 2,5.

- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan multiplicando los de A por *k*.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo los de B por *k*.

Ejemplo:
a) Para la Tabla 1, si A = 3 ⇒ B = 3 · 2,5 = 7,5; si A = 30 ⇒ B = 30 · 2,5 = 75.
b) a) Para la Tabla 1, si B = 10 ⇒ A = 10 : 2,5 = 4; si B = 60 ⇒ A = 60 : 2,5 = 24.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o cuando al dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:
Las magnitudes A y B, dadas en la tabla adjunta, son inversamente proporcionales
Como puede observarse, al multiplicar la magnitud A (cuyo valor inicial es 2), por 2, por 4, por 5…, la magnitud B (de valor inicial 50) se divide por 2, por 4, por 5…

Tabla 2. Inversamente proporcionales

Magnitud A	**2**	4	8	10	**20**	***x***	**1**
Magnitud B	**50**	25	12,5	10	***y***	**2,5**	***k***

Propiedad: si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $2\cdot 50=4\cdot 25=8\cdot 12,5=10\cdot 10=\boxed{100}...=20\cdot y=x\cdot 2,5=1\cdot k$.
Esta propiedad permite encontrar la cantidad *y*, de B, correspondiente a cierta cantidad conocida de A. Y al revés, la cantidad *x* de A, correspondiente a una cantidad conocida de B.

Ejemplo:
Para las magnitudes dadas en la tabla, los valores desconocidos *y* y *x* se pueden determinar fácilmente, ya que si $2\cdot 50=20\cdot y$, entonces *y* = 5; y si $2\cdot 50=x\cdot 2,5$, entonces *x* = 40.

Reducción a la unidad en la proporcionalidad inversa

En los problemas de proporcionalidad inversa el valor de B cuando A = 1 se halla multiplicando cualquier valor conocido de B por su correspondiente en A.

Ejemplo:
En la Tabla 2, el valor de B cuando A = 1 es 50 · 2 = 100; o 25 · 4. Es el valor de *k* en la tabla, que también puede obtenerse de la igualdad $2\cdot 50=1\cdot k$ ⇒ *k* = 100.

- Conociendo el valor de *k*, los valores de B se hallan dividiendo *k* entre los valores de A.
- Conociendo el valor de *k*, los valores de A se hallan dividiendo *k* entre los valores de B.

Ejemplo:
a) Para la Tabla 2, si A = 2 ⇒ B = 100 : 2 = 50; si A = 20 ⇒ B = 100 : 20 = 5.
b) Para la Tabla 2, si B = 10 ⇒ A = 100 : 10 = 10; si B = 8 ⇒ A = 100 : 8 = 12,5.

Regla de tres simple directa

Un problema de regla de tres directa es el siguiente: Por la compra 5 kg de patatas se han pagado 7,5 €. ¿Cuánto deberá pagarse por la compra de 12 kg de patatas?

- Lo primero es darse cuenta de que las magnitudes "kilogramos de patatas" y "cantidad a pagar" son directamente proporcionales: → "*A más kilos, más dinero*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si a 5 kg → 7,5 €

a 12 kg → x € $\Rightarrow \dfrac{5}{12} = \dfrac{7{,}5}{x} \Rightarrow 5 \cdot x = 7{,}5 \cdot 12 \Rightarrow 5 \cdot x = 90 \Rightarrow x = \dfrac{90}{5} = 18$ €.

Recuerda: Al tratarse de fracciones equivalentes, "*los productos cruzados son iguales*".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el precio de 1 kg de patatas. Este valor es: $\dfrac{7{,}5}{5} = 1{,}5$ €. En consecuencia, el coste de 12 kg será 12 · 1,5 = 18 kg.

Regla de tres simple inversa

Un problema de regla de tres inversa es el siguiente: Dos pintoras encalan una pared en 14 horas, ¿cuántas horas tardarían en encalarla entre 5 pintoras?

- Lo primero es darse cuenta que las magnitudes "número de pintoras" y "tiempo en encalar" son inversamente proporcionales. → "*A más pintoras, menos tiempo*".

Para resolverlo se hace el siguiente esquema:

Si 2 pintoras → tardan 14 h

5 pintoras → tardarán x h $\Rightarrow 2 \cdot 14 = 5 \cdot x \Rightarrow 28 = 5 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{28}{5} = 5{,}6$ h.

En las reglas de tres inversas "*los productos horizontales son iguales*".

- La solución mediante la reducción a la unidad consiste en determinar el tiempo que tardaría una sola pintora. Ese tiempo sería de 28 horas → 2 · 14 = 28; el doble que si lo hacen entre las dos. En consecuencia, entre 5 pintoras emplearían $\dfrac{28}{5} = 5{,}6$ horas.

Ejercicios

1. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales						
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

¿Por qué número hay que multiplicar las cantidades de la magnitud A para obtener sus correspondientes en la magnitud B?

2. Completa los cuadros en blanco en la siguiente tabla:

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	**2**	6	8	9			1
Magnitud B	**9**				45	90	

3. Indica, explicando el motivo, cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales, inversamente proporcionales, o no son proporcionales:
a) Los kilos de carne que compra Andrés y el dinero que paga por ello.
b) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y la velocidad que lleva.
c) El tiempo que tarda Andrés en ir al supermercado y lo que paga por la carne que compra.
d) Lo que pesa Andrés y lo que mide de estatura.

4. En una ciudad hay dos equipos de fútbol: equipo A y equipo B. Por cada 3 aficionados del equipo A hay 2 del equipo B.
a) Si hubiese 540 aficionados, ¿cuántos serán de cada equipo?
b) Si hubiese 250 aficionados del equipo B, ¿cuántos habría de A?

5. El kilo de carne está a 12,30 €. Si Andrés ha comprado 2,400 kg, ¿cuánto habrá pagado?

6. Otro día, Andrés pagó 13,50 € por 1,5 kilos de carne. ¿Cuánto pagó Raquel si compró 2,5 kilos de la misma carne ese día?

7. Si Andrés va caminando con una velocidad de 3 km/h tarda 20 minutos en llegar al supermercado. ¿Cuánto tardó su vecina que fue caminando con una velocidad de 5 km/h?

8. En un instituto que tiene 735 alumnos, cuatro de cada siete alumnos son chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay?

9. Por 5 refrescos se han pagado 4,50 €, ¿cuánto se pagará por 8 refrescos?

10. Se quiere pintar una pared que mide 18 m de largo por 3 m de alto. Si cada metro cuadrado de pared requiere 400 g de pintura, ¿cuántos kg de pintura se necesitan?

11. Para vaciar un contenedor de ladrillos 8 obreros han empleado 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 12 obreros?

12. Por trabajar 2,5 horas a Pedro le han pagado 20 €. ¿Cuánto le pagarán otro día por trabajar 4 horas?

13. Para hacer una zanja 3 excavadoras han empleado 4 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían 4 excavadoras?

14. El coste de un aparcamiento se calcula por minutos. Si Andrea ha pagado 2,70 € por 1 hora y media, ¿cuánto pagará Víctor que aparcó durante 2 h y 20 min?

15. Un coche, a velocidad constante de 120 km/h, tarda 1,75 horas en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardaría a una velocidad constante de 100 km/h?

16. Melisa, a velocidad constante de 100 km/h, tarda 1 hora y 30 minutos en realizar un trayecto. ¿Cuánto tiempo tardaría Julia a una velocidad constante de 75 km/h?

17. La escala de un mapa es 1 a 50000. Si la distancia en el mapa entre dos ciudades A y B es de 6 cm, ¿qué distancia hay en la realidad?

18. Por 6 horas de trabajo un jardinero ha recibido 72 €. ¿Cuánto gana a la hora? ¿Cuánto recibirá otro jardinero ha trabajado 7,5 horas?

19. Entre dos jardineros han limpiado un parque en 6 horas. ¿Cuánto tiempo hubiesen tardado 3 jardineros en hacer lo mismo?

20. Un caño llena un pilón en 9 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo entre 6 caños idénticos?

21. Dos grifos iguales llenan un depósito de 500 litros en 40 minutos. ¿Cuánto tardarían cinco grifos idénticos a ellos en llenar otro depósito de 625 litros?

22. Un ganadero tiene pienso para alimentar a 200 ovejas durante 20 días.
a) ¿Cuánto le duraría el pienso si comprara 50 ovejas más?
b) ¿Y si vendiera 40 ovejas?
Nota: Es buena idea calcular el número de raciones individuales disponibles.

23. Tres amigas, Ana, Beatriz y Carlota, han cobrado 1365 euros por un trabajo. Se reparten el dinero proporcionalmente a las horas trabajadas. Si Ana ha trabajado 25 horas, Beatriz 22 y Carlota 18, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una de ellas?

Soluciones:

1.

Magnitudes DIRECTAMENTE proporcionales							
Magnitud A	2	6	8	9	10	20	1
Magnitud B	9	27	36	40,5	45	90	4,5

Por 4,5.

2.

Magnitudes INVERSAMENTE proporcionales							
Magnitud A	2	6	8	9	0,4	0,2	1
Magnitud B	9	3	2,25	2	45	90	18

3. a) Directamente proporcionales. b) Inversamente proporcionales. c) y d) nada.
4. a) 324 de A; 216 de B. b) 375. **5**. 29,52 €. **6**. 22,50 €. **7**. 12 min.
8. 315 chicos y 420 chicas. **9**. 7,20 €. **10**. 21,6 kg. **11**. 2 h. **12**. 48 €.
13. 3 h. **14**. 4,2 €. **15**. 2 h, 6 min. **16**. 2 h. **17**. 300000 cm = 3000 m = 3 km.
18. 12 €/h; 90 €. **19**. 4 horas. **20**. 1,5 horas. **21**. Caudal por grifo 6,25 L/min. 20 min.
22. Raciones disponibles: $200 \cdot 20 = 4000$. a) $4000 : 450 = 16$ días. b) $4000 : 160 = 25$ días.
23. Total horas: $25 + 22 + 18 = 65$ h $\rightarrow$ 21 €/h. Ana, 525 €; Beatriz, 462 €; Carlota, 378 €.