# Tema 4. Divisibilidad Resumen

Un número es divisible por otro cuando su división es exacta.
Para generalizar se designan los números mediante letras. Así podemos decir: un número *a* es divisible por otro *b* cuando la división *a* : *b* es exacta.

**Ejemplo**:
a) 21 es divisible por 3. b) 40 es divisible por 8. c) 18 no es divisible por 5.

Decir que un número es divisible por otro es lo mismo que decir que el número mayor es múltiplo del menor. (Salvo el 0, que es múltiplo de todos los demás números).

**Ejemplo**:
a) 21 es múltiplo de 3. b) 100 es múltiplo de 25. c) 25 no es múltiplo de 4.

En general, decir que *a* es divisible por *b* es lo mismo que decir que *a* es múltiplo de *b*.
También puede decirse que *b* es divisor de *a*.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número natural tiene infinitos múltiplos: se obtienen multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número natural es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 1 es divisor de todos los números.

Divisores de un número; números primos
Un número puede tener varios divisores. Para hallar los divisores de un número hay que dividirlo por 2, 3, 4…: si la división es exacta, se obtiene un divisor del número.

| Números primos | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 |
| 11 | 13 | 17 | 19 |
| 23 | 29 | 31 | 37 |
| 41 | 43 | 47 | 53 |
| 59 | 61 | 67 | 71 |
| 73 | 79 | 83 | 89 |
| 97 | | | |

**Ejemplos**:
a) Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
b) Los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21.

- Si un número sólo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama primo.
- Si un número tiene más de dos divisores se llama compuesto.

**Ejemplos**:
a) Los números 7, 17 y 23 son primos. b) Los números 8, 25 y 40 son compuestos.

Criterios de divisibilidad

- Divisibilidad por 2. Un número es divisible por 2 si es par.

**Ejemplos**:
Los números 2, 24 y 130 son múltiplos de 2.

- Divisibilidad por 3. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

**Ejemplos**:
a) 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
b) Los números 122 o 2222 no son múltiplos de 3. (Las cifras de 122 suman 5; las cifras de 2222 suman 8. Ni 5 ni 8 son múltiplos de 3).

- Divisibilidad por 5. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

**Ejemplos**:
Los números 35, 70 y 1035 son múltiplos de 5.

- Divisibilidad por 9. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras en múltiplo de 9.

**Ejemplos**:
a) 909 y 1035 son múltiplos de 9, pues sus cifras suman, respectivamente, 18 y 9, que son números múltiplos de 3.
b) El número 1035 es múltiplo de 45, pues múltiplo de 5 y de 9 a la vez.

Expresión de un número como producto. Descomposición de un número en factores primos
Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.

**Ejemplo**:
$72 = 2 \cdot 36$; o también, $72 = 8 \cdot 9 = 24 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 12$. Hay varias posibilidades.
Los factores de 72 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72.

- Factor de un número es cada uno de sus divisores.
- Factorizar un número es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
- Un número puede descomponerse factorialmente de varias maneras.

Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos. Los factores primos se obtienen mediante divisiones sucesivas.
- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$32 = 2^5 \qquad 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

**Ejemplo**:
a) 72 puede escribirse como: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$. Observa: $50 : 2 = 25 \rightarrow 25 : 5 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1$.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números
Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de ellos se llama máximo común divisor: m.c.d.

**Ejemplo**:
Los números 48 y 36 tienen varios divisores comunes. El mayor de ellos es 12.
Divisores de 48: **1, 2, 3, 4, 6**, 8, **12**, 16, 24 y 48.
Divisores de 36: **1, 2, 3, 4, 6**, 9, **12**, 18 y 36.

Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

**Ejemplo**:
Los números 48 y 36 tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos es 144.
Múltiplos de 48: 48, 96, **144**, 192, 240, **288**, …, **432**, …, **576**…
Múltiplos de 36: 36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, **288**, …, **432**, …, **576**…

Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números
Para calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

**Ejemplos**:
a) Los números 48 y 36 se descomponen así: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
m.c.d.$(48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.$(48, 36) = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$.

b) Los números 100 y 135 se descomponen así: $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $135 = 3^3 \cdot 5$.
m.c.d.$(100, 135) = 5$. m.c.m.$(100, 135) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 27 \cdot 25 = 2700$.

Números primos entre sí
Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es 1.

**Ejemplos**:
a) Los números 10 y 21 son primos entre sí.
Los divisores de 10 son 1, 2, 5, y 10; los divisores de 21 son 1, 3, 7 y 21.
El único divisor común es 1.
En este caso:
m.c.d.$(10, 21) = 1$. m.c.m.$(10, 21) = 10 \cdot 21 = 210 \to 10 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$.

b) Los números 35 y 44 son primos entre sí.
Observa que: $35 = 5 \cdot 7$; $44 = 2^2 \cdot 11$.
m.c.d.$(35, 44) = 1$. m.c.m.$(35, 44) = 5 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 11 = 35 \cdot 44 = 1540$.

# Ejercicios

**1**. Entre los siguientes números empareja los que sean múltiplos y divisores entre sí:

12, 21, 6, 15, 8, 32, 7, 75, 9, 27

**2**. Halla tres múltiplos y tres divisores, si los tiene, de cada uno de los siguientes números:

| | a) 50 | b) 72 | c) 16 | d) 17 |
|---|---|---|---|---|
| Múltiplos | | | | |
| Divisores | | | | |

**3**. Halla todos los divisores de 90.

**4**. Aplicando los criterios de divisibilidad indica si los siguientes números son divisibles por 2, por 3 o por 5.

a) 102 $\rightarrow$ de 2, pues es par; de 3, pues la suma de sus cifras es 3.

b) 120 $\rightarrow$

c) 91 $\rightarrow$

**5**. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 3 y 5.

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30; \ldots$

**6**. Halla tres números que sean, a la vez, múltiplos de 2, 7 y 10.

**7**. Indica, justificando tu respuesta, cuáles de los siguientes números son primos:

a) 101 b) 103 c) 105 d) 107

**8**. Escribe como producto de factores primos los números:

a) 40 =

b) 105 =

c) 97 =

d) 360 =

40 | 105 | 97 | 360 |

**9**. A partir de su descomposición factorial, indica todos los divisores de:

a) 36 $\rightarrow$ como $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, sus divisores serán:

**1**; **2**; **3**; $2 \cdot 2 =$ **4**; $2 \cdot 3 =$ **6**; $3 \cdot 3 =$ **9**; $2 \cdot 2 \cdot 3 =$ **12**; $2 \cdot 3 \cdot 3 =$ **18**; y $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 =$ **36**.

b) 42 $\rightarrow$

c) 71 $\rightarrow$

**10**. Halla todos los divisores comunes de:

a) 18 y 24 $\rightarrow$

b) 45 y 60 $\rightarrow$

**11**. Para cada una de las parejas anteriores, halla los tres múltiplos comunes más pequeños.

a)

b)

**12**. Halla todos los múltiplos comunes de 2, 3, 5 y 7 menores que 1000. ¿Cuál es el m.c.m. de esos números?

**13**. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 25 y 35 $\rightarrow$

b) 42 y 63 $\rightarrow$

c) 30 y 80 $\rightarrow$

**14**. Para pavimentar una habitación de $400 \times 360$ cm se desean emplear baldosas cuadradas.
a) ¿Cuántas se necesitarán si miden 10 cm de lado?
b) ¿Cuánto medirán de lado para que el número de baldosas empleadas sea mínimo, sin necesidad de cortar ninguna? ¿Cuántas de esas baldosas se necesitarán?

**Soluciones:**

**1**. 12 y 6; 21 y 7; 15 y 75; 8 y 32; 9 y 27. **2**. a) 50, 100 y 150; 25, 10 y 5. b) 72, 144 y 720; 36, 18 y 1. c) 32, 48 y 64; 8, 4 y 2. d) 17, 34 y 51; 1 y 17: es primo. **3**. 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90.
**4**. b) por 2, por 3 y por 5. c) Ninguno. **5**. 30; 60 y 90. **6**. 70, 140 y 210. **7**. 101; 103; 107.
**8.** a) $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. b) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. c) $97 = 1 \cdot 97$, primo. d) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.
**9**. b) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow$ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. c) 71 es primo $\rightarrow$ 1 y 71.
**10**. a) 1, 2, 3 y 6. b) 1, 3, 5 y 15. **11**. a) 48, 96, 144. b) 84, 168, 252. **12**. 210, 420, 630.
**13**. a) 5 y 175. b) 7 y 126. c) 10 y 240. **14**. a) 1440. b) 40 cm; 90.