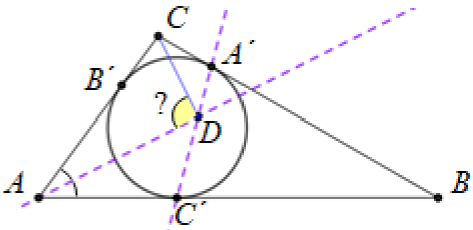
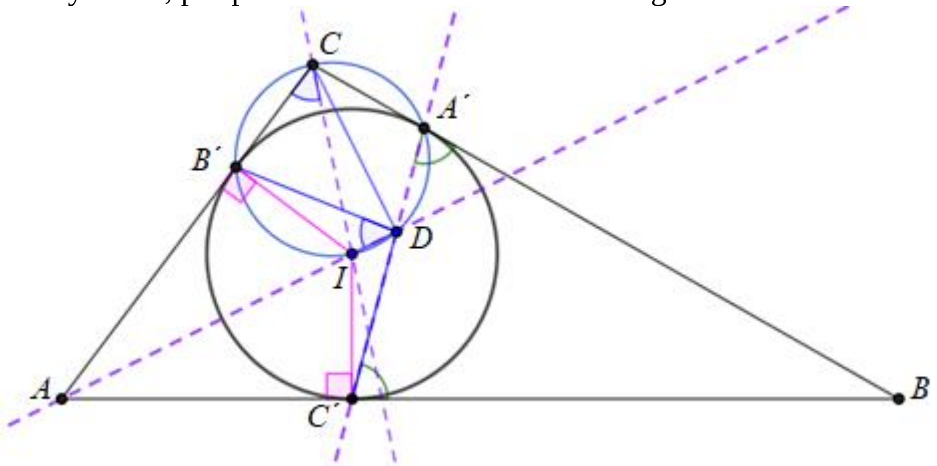
Ángulo

El problema que sigue no es inmediato; se propuso en la Olimpiada Matemática Española de 1991. Su resolución requiere conocer las propiedades del incentro (punto de corte de las bisectrices de un triángulo) y el concepto de arco capaz. También hay que descubrir triángulos iguales y aplicar que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180º.
Puede proponerse a los alumnos y profesores de bachillerato con interés por la Geometría.

Problema
Sean *A´*, *B´* y *C´* los puntos de tangencia de los lados *BC*, *CA* y *AB* de un triángulo con su circunferencia inscrita. Sea *D* el punto de intersección de *C´A´* con la bisectriz del vértice *A*. Calcular el valor del ángulo *ADC*.



Solución:
Como es sabido, cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de este; por tanto, el punto de corte de las bisectrices de un triángulo (el incentro) equidista de los tres lados. Sea *I* el centro de la circunferencia inscrita. Los radios correspondientes a los puntos de tangencia con los lados del triángulo son perpendiculares a esos lados; también las distancias *AC´* y *AB´* son iguales. Por tanto, los triángulos *AC´I* y *AIB´* son iguales. Y lo mismo puede decirse de los triángulos *AC´D* y *ADB´*, por pertenecer *D* a la bisectriz del ángulo *A*.



Por otra parte, el triángulo *C´BA´* es isósceles, siendo $A'C'B = BA'C'$.

Como $B + A'C'B + BA'C' = 180^\circ \Rightarrow B + 2\cdot A'C'B = 180^\circ \Rightarrow A'C'B = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$; luego, su suplementario, $AC'D = 90^\circ + \dfrac{B}{2}$.

También, en el triángulo *ADC´*,

$$\frac{A}{2} + C'DA + AC'D = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + C'DA + \left(90^\circ + \frac{B}{2}\right) = 180^\circ \Rightarrow C'DA = 90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow$$

$C'DA = \dfrac{C}{2}$, pues $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 90^{\circ}$.

Por tanto, los ángulos ICB' y ADB' son iguales: $ICB' = ADB' = C'DA = \dfrac{C}{2}$ (recuerda que los triángulos $AC'D$ y ADB' son iguales).
En consecuencia, desde los puntos D y C se ve el segmento IB' bajo el mismo ángulo, lo que significa que son puntos del arco capaz correspondiente al segmento IB' y de ángulo $\dfrac{C}{2}$, Luego, los puntos D, C, B' e I están en la misma circunferencia; y como el ángulo $IDC = ADC$, abarca su diámetro IC, entonces miden 90º.
Esto es, el ángulo inscrito $IDC = ADC$ = 90º, pues su ángulo central correspondiente vale 180º.