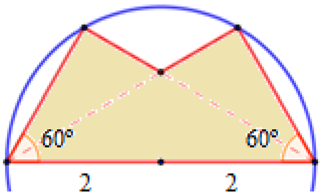
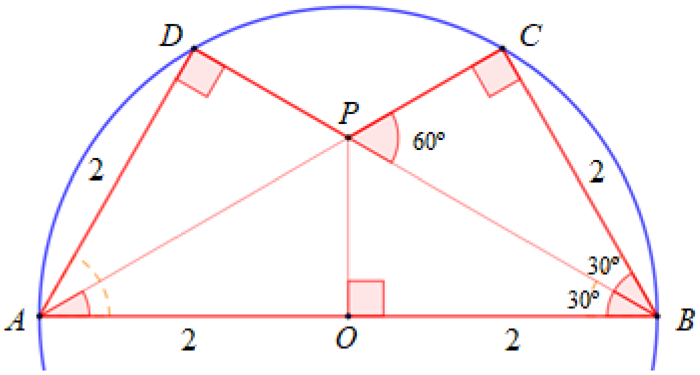
Área

El problema que sigue es bastante sencillo; adecuado para alumnos de 13 o 14 años. Puede servir para trabajar con ángulos inscritos en una circunferencia; y para aplicar Tales y Pitágoras.

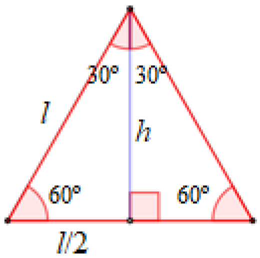
Problema
Halla el área de la parte sombreada en el semicírculo de radio 2.



Solución:
Hay que tener en cuenta tres cosas:
1. La propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia.
2. En un triángulo rectángulo de ángulos 90º, 60º, 30º, la hipotenusa mide el doble que el cateto más corto.
3. Los teoremas de Tales y de Pitágoras.



1. Por la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia (todo ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco), se deduce que los ángulos en *C* y en *D* valen 90º, pues su ángulo central, que abarca el diámetro *AB*, vale 180º.
Luego, los triángulos *ABC* y *ABD* son rectángulos, con ángulos 90º, 60º, 30º.



2. Como puede verse en la figura, la altura de cualquier triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos, con ángulos 90º, 60º, 30º, cuyo cateto corto es la mitad del lado del triángulo equilátero.
En este caso, como la hipotenusa de los triángulos *ABC* y *ABD* vale 4 ⇒ *BC* = *AD* = 2.
Además, el punto de corte, *P*, de los catetos *AC* y *BD*, es vértice común de cuatro triángulos iguales (*APD*, *APO*, *BPC* y *BPO*), todos semejantes a *ABC*. (Para verlo, basta con comprobar que todos ellos tienen iguales sus ángulos).

3. Por ser rectángulos, aplicando el teorema de Pitágoras en *ABC*:
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \Rightarrow 4^2 = |AC|^2 + 2^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,.$$

Por ser semejantes, aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|PC|} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{|PC|} \Rightarrow |PC| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,.$

Con esto, el área de cualquiera de esos cuatro triángulos es: $S_{BCP} = \dfrac{|PC|\cdot|CB|}{2} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,.$

Por tanto, el área pedida (la sombreada inicialmente) será: $S = 4\cdot S_{BCP} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\,.$