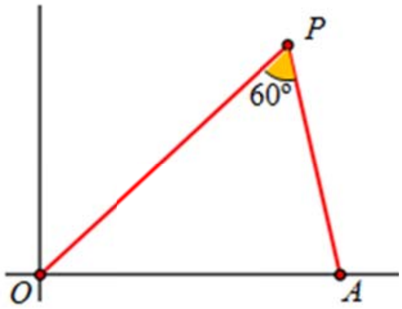
LUGAR GEOMÉTRICO

Es sorprendente la cantidad de resultados que se obtienen al teclear en Google la frase de Paul Klee; “A line is a dot that went for a walk” = "Una línea es un punto que fue a dar un paseo". Aparecen, además, una serie de vídeos que constituyen un divertimento para niños y mayores (dibujos, música,…). Por ejemplo:

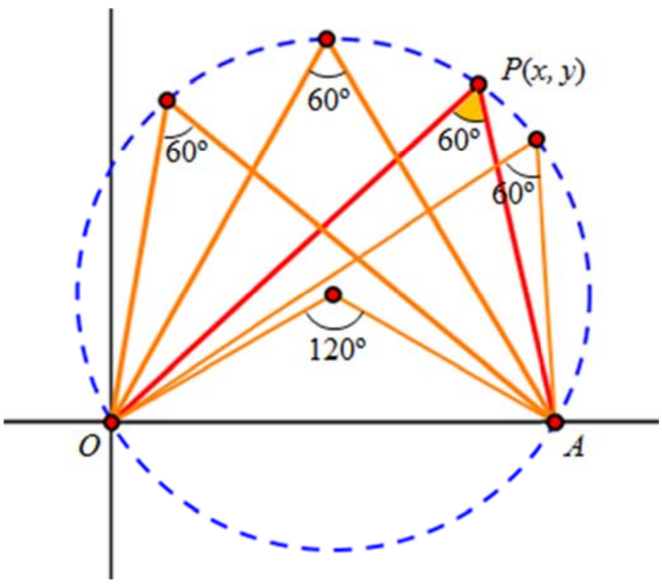
https://www.youtube.com/watch?v=7kFoi2EiG9U;
https://www.youtube.com/watch?v=cDyksXdhqV4
https://www.youtube.com/watch?v=DQEVllmeWH4

Parafraseando a Paul Klee, me atrevo a decir que: “Un lugar geométrico es un punto que fue a dar un paseo siguiendo determinadas instrucciones”.
Sirva lo dicho como introducción para plantear el problema que sigue.

Problema.
Sean los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 0)$. Se considera otro punto $P(x, y)$ en el primer cuadrante de forma que el ángulo *OPA* mida 60º. Encontrar la línea por la que puede moverse el punto. ¿Cuál será su ecuación?



Solución:
El punto *P* se mueve por una circunferencia. Por el arco capaz de 60º correspondiente al segmento *OA*, que es la parte de la circunferencia por encima de la cuerda *OA*.

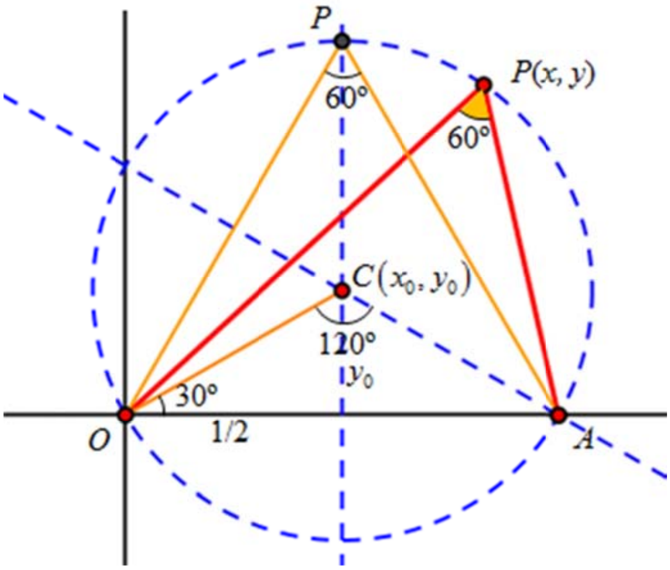


Recuérdese que “el arco capaz es el lugar geométrico de los puntos desde los que un segmento se “ve” con el mismo ángulo; es decir, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.
En este caso, como el ángulo inscrito mide 60º su correspondiente ángulo central valdrá 120º.

El centro de ese arco puede encontrase teniendo en cuenta que debe estar en la mediatriz del segmento *OA*; además, si el ángulo *OPA* = 60º, una de sus posiciones determina un triángulo equilátero, como se puede observar en la circunferencia de abajo.
Cualquier punto notable de ese triángulo es el centro del arco capaz.

<u>Ecuación del lugar geométrico</u>

Es la circunferencia con centro en $C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ y radio $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.



En efecto:

$$\tan 30^{o}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{y_0}{1/2}\Rightarrow y_0=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ → (es obvio que $x_0=\frac{1}{2}$, el puno medio del segmento OA)

El radio $|OC|=\frac{1}{\sqrt{3}}$, pues:

$$|OC|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

Luego, la ecuación de la circunferencia será:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}.$$