FUNCIONES DE DOS VARIABLES
DERIVACIÓN IMPLÍCITA (Tangente a una curva de nivel);
FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Derivación implícita y recta tangente a una curva de nivel

- Si (a, b) es un punto que cumple la ecuación $F(x,y)=c$ y, por tanto, $f(a)=b$, entonces $f'(a)=-\dfrac{F_x'(a,b)}{F_y'(a,b)}$.
- Las curvas de nivel de una función $F(x,y)$ vienen determinadas por la ecuación $F(x,y)=c$. Esas curvas, que son los puntos del plano XY que cumplen dicha ecuación, pueden definirse a partir de otra función $y=f(x)$. Esta segunda función es posible que no pueda explicitarse: no pueda encontrarse la fórmula $y=f(x)$.

Por tanto, si se desea estudiar la tasa de cambio de y respecto de x (esto es, estudiar la derivada $f'(x)$), no podrá hallarse directamente; pero el teorema de la función implícita asegura que esa derivada vale $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$. En particular, en el punto (a, b),

$$f'(a)=-\frac{F_x'(a,b)}{F_y'(a,b)}$$

- Como $f'(a)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, la ecuación de esa recta tangente será $y-f(a)=-\dfrac{F_x'(a,b)}{F_y'(a,b)}(x-a)$

1. (S09) La ecuación $e^{xy^2}-2x-4y+3=0$ define implícitamente la función $y=f(x)$ en un entorno del punto (0, 1). Entonces la derivada $f'(0)$ vale

a) 0 b) $-1/4$ c) -4

Solución:

El punto (0, 1) es de la curva, pues: $e^0-2\cdot 0-4.1+3=0$.

La derivada de $y=f(x)$ en un punto genérico es:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2e^{xy^2}-2}{2xye^{xy^2}-4} \rightarrow \text{Sustituyendo } x=0 \text{ (e } y=1\text{):} \quad f'(0)=-\frac{1-2}{-4}=-\frac{1}{4}$$

La respuesta es b)

2. (J10) La pendiente de la curva de nivel del campo $f(x,y)=2\cos(xy)-y^2x$, que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$ vale:

a) $\dfrac{-3}{2\pi}$ b) $\dfrac{\pi}{2}-1$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f_x(x,y)=-2\sin(xy)\cdot y-y^2 \rightarrow f_x(\pi/2,1)=-3;$$

$$f_y(x,y)=-2\sin(xy)\cdot x-2yx \rightarrow f_y(\pi/2,1)=-2\pi$$

La pendiente de la curva de nivel es: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{-3}{-2\pi}=\dfrac{-3}{2\pi}$

3. (J07) La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel 3 de la función $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ en el punto (2, 1) es:

a) $y=3x-5$.

b) $y=2x+1$.

c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: _____

Solución:

$$f_x(x,y)=3x^2-3y \quad \Rightarrow \quad f_x(2,1)=9$$

$$f_y(x,y)=-3x+3y^2 \quad \Rightarrow \quad f_y(2,1)=-3$$

Luego, $\dfrac{dy}{dx}(2,1)=\dfrac{-f_x(2,1)}{f_y(2,1)}=\dfrac{-9}{-3}=3$

La ecuación de la recta tangente es: $y-1=3(x-2) \Leftrightarrow y=3x-5$

La respuesta es a)

4. (J12) La recta tangente a la curva de nivel 0 del campo $f(x,y)=(x+1)(y-1)-2e^x\sin y+1$, en el punto (0, 0) es:

a) $y=-x$ b) $y=-\dfrac{x}{2}$ c) $y=0$

Solución:

La curva de nivel 0 es: $(x+1)(y-1)-2e^x\sin y+1=0$.

El punto (0, 0) es de ella, pues: $(0+1)(0-1)-2e^0\sin 0+1=-1+1=0$.

La pendiente de la recta pedida es: $m=-\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)}$.

Como:

$$f'_x(x.y)=y-1-2e^x\sin y, \quad f'_y(x,y)=x+1-2e^x\cos y,$$

se tiene que: $m=-\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)}=-\dfrac{-1}{-1}=-1$.

Así que, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-0=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x$$

La respuesta es a)

5. (J11) La ecuación $\cos(x-y)-x-3y+3=0$ define implícitamente la función $y=f(x)$ en un entorno del punto (1, 1). Entonces la derivada $f'(1)$ vale

a) 2 b) $-1/3$ c) -1

Solución:

El punto (1, 1) está en la curva de nivel, pues: $\cos(1-1)-1-3\cdot 1+3=0$.

Parciales:

$$f'_x(x.y)=-\sin(x-y)-1; \qquad f'_y(x,y)=\sin(x-y)-3$$

Por tanto:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{-\sin(x-y)-1}{\sin(x-y)-3} \quad \rightarrow \quad f'(1)=-\frac{-1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

La respuesta es b)

6. (S07) La ecuación de la recta tangente a la curva $\sqrt{1+x^2y}-xy^2+5=0$ en el punto (2, 2) es:

a) $y=9x-8$.

b) $4x+11y-30=0$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El punto (2, 2) está en la curva, pues: $\sqrt{1+4\cdot 2}-2\cdot 4+5=3-8+5=0$.

La pendiente de la curva de nivel es:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy/\left(2\sqrt{1+x^2y}\right)-y^2}{x^2/\left(2\sqrt{1+x^2y}\right)-2xy}\text{, que vale } -\frac{4}{11} \text{ en (2, 2).}$$

Por tanto, la tangente es: $y-2=-\frac{4}{11}(x-2) \Leftrightarrow 4x+11y-30=0$.

La respuesta es b)

Observación: La respuesta a) puede descartarse directamente, pues el punto (2, 2) no es de esa recta.

7. (J09) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $F(x,y)\equiv 5+xy^2+x\sqrt{y}=-1$, en el punto (–3, 1) es:

a) $y-1=\frac{4}{15}(x+3)$.

b) $y+1=-\frac{13}{31}(x-3)$.

c) Ninguna de las anteriores. Su ecuación es: _____

Solución:

La pendiente de la recta tangente viene dada por

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y^2+\sqrt{y}}{2xy+\frac{x}{2\sqrt{y}}}\rightarrow \text{(en (–3, 1))}=-\frac{2}{-15/2}=\frac{4}{15}$$

Por tanto, la recta tangente es $y-1=\frac{4}{15}(x+3)$.

La respuesta es a)

Funciones homogéneas

La función $f(x,\ y)$ es homogénea de grado $k \in \mathbf{Q}$, si para todo $t \in \mathbf{R}^+$ se cumple que $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$.

Propiedad

Si $f(x,y)$ es diferenciable y homogénea de grado k, sus derivadas parciales de orden r son funciones homogéneas de orden $k - r$:

$$\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^r},\ \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial y^r} \text{ y } \frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^{r-m}\partial y^m},\ r = 1, 2, 3,\ldots \text{ son homogéneas de grado } k - r$$

Teorema de Euler

Si $f(x,y)$ es diferenciable y homogénea de grado k, entonces se verifica la igualdad:

$$x\cdot f_x(x,\ y) + y\cdot f_y(x,\ y) = k\cdot f(x,\ y)$$

1. Comprueba que son homogéneas las funciones:

a) $f(x,y) = \dfrac{2y^3}{x+3y}$ b) $f(x,y) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución:

a) $f(tx,ty) = \dfrac{2(ty)^3}{tx+3(ty)} = \dfrac{2t^3y^3}{t\left(x+3y\right)} = t^2\cdot\dfrac{2y^3}{x+3y} = t^2\cdot f(x,y) \rightarrow$ Homogénea: $k = 2$.

b) $f(tx,ty) = \dfrac{3(tx)}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}} = \dfrac{3tx}{\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}} = \dfrac{3tx}{\sqrt{t^2\left(x^2+y^2\right)}} = \dfrac{3tx}{t\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Como $f(tx,ty) = f(x,y)$, la función es homogénea de grado $k = 0$.

2. (J10) Demuestra que $f(x,y) = \dfrac{3}{2x^2+y^2}$ es una función homogénea y que cumple el teorema de Euler.

Solución:

$$f(tx,ty) = \frac{3}{2(tx)^2+(ty)^2} = \frac{3}{2t^2x^2+t^2y^2} = \frac{3}{t^2\left(2x^2+y^2\right)} = t^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2x^2+y^2}\right) = t^{-2}\cdot f(x,y).$$

Por tanto, es homogénea de grado $k = -2$.

Teorema de Euler: Debe cumplirse que $x\cdot f_x(x,\ y) + y\cdot f_y(x,\ y) = -2\cdot f(x,\ y)$.

$$f_x = \frac{-12x}{(2x^2+y^2)^2};\ f_y = \frac{-6y}{(2x^2+y^2)^2}$$

$$xf_x + yf_y = x\cdot\frac{-12x}{(2x^2+y^2)^2} + y\cdot\frac{-6y}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{-12x}{(2x^2+y^2)^2} + \frac{-6y^2}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{-12x^2-6y^2}{(2x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-6(2x^2+y^2)}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{-6}{(2x^2+y^2)} = -2\cdot\left(\frac{3}{2x^2+y^2}\right) = -2\cdot f(x,y).$$

3. Comprueba que la función $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x-y}$ cumple:

a) Es homogénea de grado 3.
b) Sus derivadas parciales de primer orden son funciones homogéneas de grado 2.
c) El teorema de Euler.

Solución:

a) $f(tx,ty)=\dfrac{(tx)^3\cdot(ty)}{tx-ty}=\dfrac{t^3x^3\cdot ty}{t(x-y)}=\dfrac{t^4\left(x^3y\right)}{t(x-y)}=t^3\cdot\dfrac{x^3y}{x-y}=t^3\cdot f(x,y)\ \rightarrow$ Homogénea: $k=3$.

b) Parciales:

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2(x-y)-x^3y}{(x-y)^2}=\frac{2x^3y-3x^2y^2}{(x-y)^2};\ f_y(x,y)=\frac{x^3(x-y)-x^3y\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^4}{(x-y)^2}$$

Son homogéneas:

- $f_x(tx,ty)=\dfrac{2(tx)^3\cdot(ty)-3(tx)^2\cdot(ty)^2}{(tx-ty)^2}=\dfrac{2t^3x^3\cdot ty-3t^3x^2\cdot t^2y^2}{(t(x-y))^2}=\dfrac{2t^4x^3y-3t^4x^2y^2}{t^2(x-y)^2}\Rightarrow$

  $\Rightarrow f_x(tx,ty)=\dfrac{t^4\left(2x^3y-3x^2y^2\right)}{t^2(x-y)^2}=t^2\cdot\dfrac{\left(2x^3y-3x^2y^2\right)}{(x-y)^2}=t^2\cdot f_x(x,y)\ \rightarrow k=2.$

- $f_y(tx,ty)=\dfrac{(tx)^4}{(tx-ty)^2}=\dfrac{t^4x^4}{t^2(x-y)^2}=t^2\cdot\dfrac{x^4}{(x-y)^2}=t^2\cdot f_y(x,y)\ \rightarrow k=2.$

c) Teorema de Euler:

Debe cumplirse que $x\cdot f_x(x,\ y)+y\cdot f_y(x,\ y)=3\cdot f(x,\ y)$.

$$x\cdot\frac{2x^3y-3x^2y^2}{(x-y)^2}+y\cdot\frac{x^4}{(x-y)^2}=\frac{2x^4y-3x^3y^2}{(x-y)^2}+\frac{x^4y}{(x-y)^2}=\frac{3x^4y-3x^3y^2}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{3x^3y(x-y)}{(x-y)^2}=3\frac{x^3y}{x-y}=3\cdot f(x,y).$$

4. (S09) La función $f(x,y)=\dfrac{x^4}{y^p}-\sqrt[p]{xy^2}$ es homogénea:

a) Sólo si $p=3$ b) Si $p=2$ c) Para dos valores de p diferentes.

Solución:

$$f(x,y)=\frac{t^4x^4}{t^py^p}-\sqrt[p]{t^3xy^2}=t^{4-p}\cdot\frac{x^4}{y^p}-t^{3/p}\cdot\sqrt[p]{xy^2}.$$

Será homogénea si $4-p=3/p$ (sólo así se podrá sacar factor común para que $f(tx,ty)=t^m f(x,y)$) $\Rightarrow p=1$ o $p=3$.

La respuesta es c)

5. (J12) Si $f(x,y)$ es una función homogénea tal que $f(1, 2) = 4$, $f'_x(1,\ 2) = -8$, $f'_y(1,\ 2) = 8$, entonces su grado de homogeneidad es:

a) 1/2. b) –1 c) 2

Solución:

Si k es su grado de homogeneidad, por el teorema de Euler puede escribirse:

$$k\cdot f(1,\ 2) = 1\cdot f'_x(1,\ 2) + 2\cdot f'_y(1,\ 2) \Rightarrow k\cdot 4 = -8 + 2\cdot 8 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2.$$

La respuesta es c)

6. (J13) La función $f(x,y) = \dfrac{2x^p + 5y^p}{x^p + y}\sqrt{x}$:

a) Nunca es homogénea. b) Es homogénea sólo en el caso $p = 1$.

c) Es homogénea siempre, para cualquier p.

Solución:

$$f(tx,ty) = \frac{2t^p x^p + 5t^p y^p}{t^p x^p + ty}\sqrt{tx} = \frac{t^p}{t}\sqrt{t}\,\frac{2x^p + 5y^p}{t^{p-1}x^p + y}\sqrt{x} = t^{p-\frac{1}{2}}\,\frac{2x^p + 5y^p}{t^{p-1}x^p + y}\sqrt{x} \rightarrow$$

Para que $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ es necesario que $t^{p-1}x^p + y = x^p + y$ (véase el denominador) $\Rightarrow p = 1$.

Luego es homogénea sólo si $p = 1$.

La respuesta es b)

7. (J10) La función $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + p(y-1)}{x+y}$ es:

a) Homogénea de grado 1, si $p = 1$

b) Homogénea de grado 0, si $p = 0$

c) Homogénea de grado ___ sólo si $p =$ ___.

Solución:

$$f(tx,ty) = \frac{3t^2x^2 + p(ty-1)}{t(x+y)} \rightarrow \text{En el numerador sólo puede sacarse factor común } t \text{ si } p = 0.$$

En ese caso sería homogénea de grado 1, pues quedaría $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{x+y}$, de donde:

$$f(tx,ty) = \frac{3t^2x^2}{t(x+y)} = t\cdot\frac{3x^2}{(x+y)} = t\cdot f(x,y).$$

La respuesta es c) $\rightarrow$ Homogénea de grado 1 sólo si $p = 0$.

8. (J11) La función $f(x,y) = \dfrac{6x^3 - 2xy^2 + 27p}{x+y}$ es:

a) Homogénea de grado 1. b) Homogénea de grado 2 si $p = 0$.

c) Nunca puede ser homogénea.

Solución:

Si $p = 0$, $f(x,y) = \dfrac{6x^3 - 2xy^2}{x+y} \Rightarrow f(tx,ty) = \dfrac{6t^3x^3 - 2(tx)(t^2y^2)}{tx+ty} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(tx,ty) = \frac{t^3\left(6x^3 - 2xy^2\right)}{t(x+y)} = t^2\left(\frac{6x^3 - 2xy^2}{x+y}\right) \rightarrow \text{es homogénea de grado 2.}$$

La respuesta es b)

9. (S07) La función $f(x,y)=\dfrac{x^{2p}}{y}-\sqrt{xy^2}$ cumple el teorema de Euler:

a) Siempre, para todo número natural p.
b) Si $p = 1/4$.
c) Si $p = 5/4$.

Solución:
La función debe ser homogénea.

$$f(tx,ty)=t^{2p-1}\cdot\frac{x^{2p}}{y}-t^{3/2}\sqrt{xy^2} \Rightarrow \text{será homogénea si } 2p-1=\frac{3}{2} \Rightarrow 4p=5 \Rightarrow p=5/4.$$

La respuesta es c)

10. Comprueba que la función $f(x,y)=\dfrac{x^{2p}}{y}-\sqrt{xy^2}$ cumple el teorema de Euler.

Solución:
Debe verificarse que $x\cdot f_x(x,\ y)+y\cdot f_y(x,\ y)=k\cdot f(x,\ y)$, siendo k su grado de homogeneidad.
Para $p = 5/4$ la función es homogénea (pregunta anterior). En ese caso:

$$f(x,y)=\frac{x^{5/2}}{y}-\sqrt{xy^2}=\frac{x^{5/2}}{y}-y\sqrt{x}\text{, que es homogénea de grado } k=\frac{3}{2}.$$

Derivadas parciales:

$$f_x(x,y)=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{y}-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f_y(x,y)=-\frac{x^{5/2}}{y^2}-\sqrt{x}$$

Por tanto:

$$x\cdot f_x(x,\ y)+y\cdot f_y(x,\ y)=x\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{y}-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+y\left(-\frac{x^{5/2}}{y^2}-\sqrt{x}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{x\cdot x^{3/2}}{y}-y\cdot\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{y\cdot x^{5/2}}{y^2}-y\cdot\sqrt{x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{y}-y\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{x^{5/2}}{y}-y\cdot\sqrt{x}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{y}-y\cdot\frac{3\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^{5/2}}{y}-y\cdot\sqrt{x}\right)=\frac{3}{2}\cdot f(x,y)$$

11. (J07) Sabiendo que $f(x,y)$ es homogénea de grado 3 y que $\nabla f(1,-1)=(2,-1)$, entonces:

a) $f(1,-1)=0$
b) $f(1,-1)=1$
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Por el teorema de Euler, si f es homogénea de grado m se cumple

$$x\cdot f_x(x,y)+y\cdot f_y(x,y)=m\cdot f(x,y) \Leftrightarrow (x,\ y)\cdot\big(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\big)=m\cdot f(x,y).$$

En este caso, $x\cdot f_x(x,y)+y\cdot f_y(x,y)=3\cdot f(x,y)$.

En el punto $(1,-1)$ se tiene que $x = 1$, $y = -1$ y $\nabla f(1,-1)=(2,-1)$; luego, sustituyendo:

$$1\,f_x(1,-1)-1\,f_y(1,-1)=3\,f(1,-1) \Rightarrow 1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=3\cdot f(1,-1) \Rightarrow f(1,-1)=1$$

La respuesta es b)

12. (J09) Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado -1 tal que $f\left(5,\ \frac{1}{2}\right)=3$, entonces:

a) $f\left(2,\ \frac{1}{5}\right)=7{,}5$

b) $f(10,\ 1)=6$

c) $f(10,\ 1)=9$

Solución:

Se sabe que $f(tx,ty)=t^{-1}\cdot f(x,y)$. En particular, $f\left(t5,\ \ t\frac{1}{2}\right)=t^{-1}\cdot f\left(5,\ \ \frac{1}{2}\right)=t^{-1}\cdot 3$

Si se hace $t=\frac{2}{5}$, $f\left(t5,\ \ t\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\cdot f\left(5,\ \ \frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{15}{2}=7{,}5$

La respuesta es a)